

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра высшей математики

Выпускная квалификационная работа

**ФОРМИРОВАНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНОГО ИНТЕРЕСА
УЧАЩИХСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КУРСА ПО ВЫБОРУ
«ГРАФЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ»**

Работу выполнила:
студентка 151 группы
направления подготовки
44.03.05 Педагогическое
образование, профили
«Математика и информатика»
Локтева Наталья Юрьевна

подпись

«Допущена к защите в ГЭК»
Зав. кафедрой высшей
математики

дата

подпись

Руководитель:
доктор физ.-мат. наук,
профессор кафедры высшей
математики Малых Алла
Ефимовна

подпись

Пермь
2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНОГО ИНТЕРЕСА В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ.....	5
1.1. Общие подходы к понятию «познавательный интерес»	5
1.2. Уровни развития познавательного интереса	10
1.3. Формирование познавательного интереса в процессе обучения.....	12
1.4. Понятие познавательной деятельности.....	16
1.5. Формируемые компетенции в процессе познавательной деятельности	22
ГЛАВА 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ	26
2.1. Сведения из истории возникновения графов.....	26
2.2. Основные понятия и определения	30
2.3. Связность графов.....	33
2.4. Графы-деревья	36
2.5. Способы задания графов.....	40
2.6. Операции на графах	42
ГЛАВА 3. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ КУРСА ПО ВЫБОРУ «ГРАФЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ»	46
3.1. Постановка курса по выбору «Графы и их применение».....	46
3.2. Структура курса по выбору	48
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	59
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	60
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	63
Приложение 1 Конспект урока по теме «Понятие графа и его элементов»	63
Приложение 2 Решение задач на графах.....	69
Приложение 3 Самостоятельная деятельность учащихся	73

ВВЕДЕНИЕ

Современная школа призвана обеспечивать личностное развитие ученика, поддерживать его индивидуальность, способность к саморазвитию и творчеству уже с первого года обучения в школе, когда выявляются задатки и способности ребенка, его нравственные убеждения, закладываются основы личности. Познавательный интерес является важным фактором совершенствования процесса обучения и одновременно показателем его эффективности и результативности, поскольку он стимулирует познавательную активность, самостоятельность, творческий подход к овладению материалом, побуждает к самообразованию.

Проблема формирования познавательного интереса учащихся в процессе обучения занимает одно из ведущих мест в современных психолого-педагогических исследованиях. От ее решения в значительной степени зависит эффективность учебного процесса, поскольку интерес является важным мотивом познавательной деятельности школьника, и, одновременно, основным средством ее оптимизации. Отмеченное указывает на актуальность исследования.

Цель работы состоит в формировании познавательного интереса учащихся при изучении курса по выбору.

Для достижения этой цели следует решить **задачи**:

- проанализировать литературу по выбранному направлению;
- собрать сведения об основных понятиях теории графов;
- выяснить психолого-педагогические основы развития познавательного интереса и условия его формирования в процессе обучения математике;
- разработать курс по выбору «Графы и их применение»;
- раскрыть специфику курса по выбору в предпрофильной подготовке школьников.

Объект исследования – формирование познавательного интереса учащихся при обучении математике.

Предмет исследования – формирование познавательного интереса школьников посредством изучения курса по выбору «Графы и их применение».

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка используемой литературы, насчитывающего 31 наименование, а также трех приложений.

Во введении обоснована актуальность выбранной темы, сформулированы цель и задачи, а также объект и предмет исследования; дано краткое содержание работы.

В первой главе речь идет о теоретических аспектах познавательного интереса, рассмотрены исследования ученых-методистов по этой проблеме, уровни его развития. Подход к такому интересу формируется двумя способами: первый – используя содержание учебных предметов, второй – через познавательную деятельность. Дано также определение познавательной деятельности и методы ее организации.

Во второй главе представлены основные сведения по теории графов, которые будут изучаться учащимися. Например: формирование теории графов как науки, связность графов, их виды, графы-деревья, способы задания и операции на графах.

Последняя, *третья глава* имеет практическую направленность и опирается на материал двух предыдущих. В ней разработан курс по выбору «Графы и их применение», который включает пояснительную записку, программу курса, тематический план занятий, а также структуру каждого урока.

В заключении подведены итоги исследовательской работы.

В приложении представлен подробный конспект урока, который был апробирован в 9 классе школы МАОУ «СОШ №109», кроме того, приведены некоторые задачи, формирующие познавательный интерес учащихся, а также материалы для проведения самостоятельных работ.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНОГО ИНТЕРЕСА В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

Одним из основных показателей становления личности школьника является познавательный интерес, уровень развития которого в значительной мере определяет продуктивность процесса обучения. Важность формирования познавательного интереса у учащихся в современных условиях обучения не вызывает никаких сомнений. Однако вопрос о том, каким образом достигнуть наибольшего эффекта в его развитии, до сих пор остается открытым.

1.1. Общие подходы к понятию «познавательный интерес»

Приступая к рассмотрению проблемы развития познавательного интереса у школьников, целесообразно, прежде всего, рассмотреть теоретические основы самого понятия «интерес». В научной литературе, посвященной данной проблеме, можно встретить разнообразные, иногда противоречивые толкования этого понятия. Так, С.И. Рубинштейн определял это понятие как: «...сосредоточенность на определенном предмете мыслей, помыслов личности, вызывающая стремление ближе познакомиться с предметом, глубже в него проникнуть, не упускать из поля своего зрения» [16, с. 525].

В.А. Крутецкий предлагал следующее определение: «Интерес – это активная познавательная направленность человека на тот или иной предмет или явление действительности, связанная обычно с положительно эмоционально-окрашенным отношением к познанию объекта или к овладению той или иной деятельностью» [9, с. 184]. Он считал, что интерес носит избирательный характер и влечет за собой тенденцию обращать внимание на определенные объекты.

М.Ф. Беляев в работе «Психология интереса» дал такое определение: «Интерес есть одна из психологических активностей, характеризующая как общая сознательная устремленность личности к объекту, проникнутая отношением близости к объекту, эмоционально насыщенная и влияющая на повышение продуктивности деятельности».[1, с. 128]. А.В. Петровский предлагал следующее определение понятию интерес, которое мы возьмем за основу, **«интерес – это форма проявления познавательных потребностей, обеспечивающая направленность личности на осознание целей деятельности и тем самым способствует ориентировке, ознакомлению с новыми фактами, более полному и глубокому отражению действительности. В связи с этим интерес определяется как эмоционально-познавательное отношение, непосредственно мотивированное, имеющие тенденцию переходить в познавательную направленность личности»** [24, с. 211].

Исходя из анализа психолого-педагогической литературы, можно сделать вывод о том, что, несмотря на различные трактовки сущности интереса, большинство психологов относят его к категории направленности, то есть стремлению личности к определенному объекту или виду деятельности.

Важнейшая область общего феномена интереса – **познавательный интерес**. Его предметом является самое значительное свойство человека: познавать окружающий мир не только с целью биологической и социальной ориентировки в действительности, но и в самом существенном отношении человека к миру – в стремлении проникать в его многообразие, отражать в сознании сущностные стороны, причинно-следственные связи, закономерности, противоречивость. В школе объектом познавательного интереса учащихся является содержание учебных предметов, овладение которыми составляет основную значимость учения. Отсюда следует, что в сферу познавательного интереса включаются не только приобретаемые школьником знания, но и овладение ими, а также процесс учения в целом, позволяющий приобретать необходимые способы познания. Он представляет особый сплав

важнейших для развития личности психологических процессов. В интеллектуальной деятельности, протекающей под влиянием познавательного интереса, проявляются: активный поиск; догадка; исследовательский подход; готовность к решению задач. Эмоциональные проявления, вплетенные в познавательный интерес, выражаются: эмоциями удивления; чувством интеллектуальной радости и успеха.

Особенность познавательного интереса заключается в том, что он отражает единство объективного и субъективного. Поэтому целенаправленное воспитание интереса может опираться на объективные свойства явлений, процессов действительности, которые привлекают учащихся. Опираясь на интерес и зная, что составляет субъективную значимость для школьника, можно выстраивать учебный процесс таким образом, чтобы вызвать, укреплять и совершенствовать познавательные интересы учащихся. Итак, формируя познавательный интерес, учитель обеспечивает благоприятную атмосферу обучения, движения своих учеников к решению тех целей и задач, которые ставятся обучением.

В середине 70-х – 80-х годов прошлого столетия дидактическая мысль сосредотачивалась на проблеме познавательных интересов как мотивов эффективной учебной деятельности. Обобщая результаты собственных многочисленных исследований, опираясь на теоретический опыт, накопленный и вне их научной школы, ленинградские дидакты З.И. Васильева, В.Н. Максимова, Г.И. Щукина предлагали оригинальную концепцию формирования познавательных интересов учащихся. В их трактовке познавательный интерес – это особая избирательная направленность личности на процесс познания, ее избирательный характер выражен в той или иной предметной области знаний [23].

Несколько иную точку зрения высказывала Н.Г. Морозова. Познавательными она называла интересы, направленные на процесс учебного познания и на его результаты. Интерес рассматривался ею как «эмоционально-познавательное

отношение (возникающее из эмоционально-познавательного переживания) к предмету или к непосредственно мотивированной деятельности, отношение, переходящее при благоприятных условиях в эмоционально-познавательную направленность личности» [13, с. 11].

В.Б. Бондаревский, В.С. Мухина, С.Л. Рубинштейн считали, что познавательный интерес выступает как:

- избирательная направленность психических процессов человека на объекты и явления окружающего мира;
- тенденция, стремление, потребность личности заниматься именно данной областью явлений, деятельностью, которая приносит удовлетворение;
- особое, избирательно наполненное активными помыслами, яркими эмоциями, волевыми устремлениями отношение к окружающему миру, его объектам, явлениям, процессам [16].

По мнению ряда авторов (Л.С. Выготский, В.В. Давыдов, А.Н. Леонтьев, Ю.Н. Кулюткин, А.Б. Орлов, А.К. Маркова, С.Л. Рубинштейн) «познавательный интерес – это мотив, лежащий в основе учебной деятельности, придающий ей творческий, устремленный характер» [16, с. 448].

В.А. Сластениным познавательный интерес рассматривался как внутренняя движущая сила учения, проявляющаяся в целенаправленном состоянии школьника, обусловленном знаниями, умениями, опытом творческой деятельности, характеризующаяся потребностью в знаниях, готовностью к активному познанию как деятельность, приносящая удовлетворение.

Ш.А. Амонашвили определял познавательный интерес как форму стремлений личности, как направленность самостоятельного поиска, постижения секретов, свободного обсуждения проблемы, решения трудных задач, утверждения собственного мнения.

В исследованиях В.Г. Иванова отмечалось, что по уровню осознанности и действенности различают следующие виды познавательных интересов:

- **занимательность** – наиболее низкий уровень интереса, возникает в результате яркости впечатления, новизны предмета; отличается непродолжительностью, нестойкостью и легко вытесняется новыми яркими впечатлениями;
- **интерес частный, узкий** – это интерес к определенным фактам, той или иной теме, иногда к ее частному вопросу;
- **интерес обобщенный, широкий** – к предмету в целом. Очень высокая степень осознанности и активности;
- **интерес специализированный, глубокий, индивидуальный** – наиболее высокая степень осознанности, проявляется в одном из трех направлений: длительной направленности личности на изучение определенного предмета и потребности в расширении и углублении знаний по нему; самостоятельном и творческом подходе к изучаемым вопросам; дополнительном изучении ряда разделов предмета; добровольном выборе заданий повышенной сложности по интересующему предмету и их успешном выполнении.

Таким образом, *познавательный интерес* может выступать как сильный и значимый мотив, который побуждает школьника заниматься увлеченно на уроке, внеклассных занятиях или в процессе подготовки домашних заданий. Под влиянием этого сильного мотива школьник читает дополнительную литературу по интересующему его вопросу, постоянно ставит перед собой вопросы, находит источники удовлетворения своего интереса. Учащийся не нуждается в постоянном внешнем стимулировании учения, сам идет в школу с желанием познавать, приобретать знания и активно в этом участвовать. Познавательный интерес определяет инициативу в постановке познавательных целей кроме тех, которые ставит учитель, а также придает поисковый, творческий характер любому виду, любой форме познавательной деятельности.

1.2. Уровни развития познавательного интереса

Будучи устойчивой чертой личности школьника, познавательный интерес определяет его активность в учении, инициативу в самостоятельной постановке познавательных целей, помимо тех, которые ставит перед ним учитель. Он в существенной мере определяет поисковый характер любой формы познавательной деятельности (на уроке, в домашней учебной, во внеклассной работе и др.), благотворно сказывается на всем развитии ученика. Его умственная энергия находит выход в удовлетворяющей его деятельности. В свою очередь, сама деятельность, как радость познания, становится успешной. Все это укрепляет чувство собственного достоинства, повышает самооценку, желание успешно учиться. Выявление уровней развития познавательного интереса дают возможность направленно и дифференцированно организовывать процесс обучения. Зная основные признаки проявления уровней развития познавательных интересов, учитель может точнее наметить направления работы с учащимися, которые будут способствовать развитию их личности. Выделяется **три уровня познавательного интереса**:

На **первом** – это учащиеся с высоким уровнем развития познавательных интересов, который связан с элементами исследовательской творческой деятельности, его еще иногда называют **творческим интересом**. Школьники с таким уровнем имеют нацеленность познавательных интересов на учебный предмет или их группу и проявляют большую познавательную активность на уроках (задают вопросы, отвечают по собственному желанию и др.). Они предпочитают учебную деятельность более сложного характера, отличаются самостоятельным активным поиском в пополнении информации об интересующей области. Такие учащиеся начитаны, стремятся расширить свой кругозор, используют свободное время для занятий в интересующей области.

Второй уровень – выделение существенных связей и стремления к поисковой деятельности. Под ним понимают **любопытность**. На этой стадии

учащиеся еще не имеют достаточного теоретического багажа, чтобы проникнуть в суть вещей, но уже оторвались от элементарных конкретных действий и становятся способными к самостоятельному дедуктивному подходу в обучении. Они проявляют избирательное отношение к определенному предмету. Школьники предпочитают также поисковый характер деятельности, но не всегда склонны к выполнению творческих заданий. Свой досуг иногда посвящают интересующей области, но нерегулярно.

Третий уровень (элементарный) – это учащиеся с низким уровнем развития познавательных интересов, иногда такой уровень называют **любопытством**. Интерес школьников неосознан. На уроках по отдельным учебным предметам интерес то появляется, то затухает в полной зависимости от ситуации. Активность на уроках столь же ситуативная, проявляется инертность мысли и деятельности (заученные ответы, списывание с доски), наблюдаются частые отвлечения; предпочтение отдается задачам репродуктивного характера, заданиям по образцу. Свободное время заполняется случайными занятиями, круг чтения невелик, выбор книг случаен.

В разные периоды жизни можно выделить предпочтительный уровень развития познавательного интереса, хотя переход с более низкого уровня на более высокий очень индивидуален. У младших школьников он имеет яркую эмоциональную окраску. Это интерес к впечатлениям, описаниям, наблюдениям. Познавательный интерес *подростков* в значительной мере определяется новообразованием этого возраста – стремлением к взрослению и самостоятельности. В старшем школьном возрасте появляется острый интерес к человеку, его предназначению, сверстникам, взрослым и будущей специальности. Круг интересов становится шире, что обуславливает у них некоторое снижение познавательного интереса. Но, тем не менее, познавательный интерес оказывает значительное влияние, как на жизненные планы старших школьников, так и на выбор будущей специальности.

1.3. Формирование познавательного интереса в процессе обучения

Опираясь на огромный опыт прошлого, специальные исследования и практику современности, можно говорить об *условиях*, соблюдение которых способствует формированию, развитию и укреплению познавательного интереса учащихся. *Первое* – это ситуации решения познавательных задач, активного поиска, догадок, размышления, мыслительного напряжения, противоречивости суждений, столкновений различных позиций, в которых необходимо разобраться самому, принять решение, определённую точку зрения. *Второе* условие, обеспечивающее формирование познавательных интересов и личности в целом, состоит в том, чтобы вести учебный процесс на оптимальном уровне развития учащихся. Именно это условие обеспечивает укрепление и углубление познавательного интереса на основе того, что обучение систематически и оптимально совершенствует деятельность познания, её способов и умений. Эмоциональная атмосфера обучения, положительный эмоциональный тонус учебного процесса – *третье* важное условие. Благополучная эмоциональная атмосфера обучения и учения сопряжена с двумя главными источниками развития школьника: деятельностью и общением. Они рождают многозначные отношения и создают тонус личного настроения ученика. Оба эти источника не изолированы друг от друга, а всё время переплетаются в учебном процессе, и вместе с тем стимулы, поступающие от них, различны, и различно влияние их на познавательную деятельность, интерес к знаниям.

Существует несколько способов для осуществления успешного формирования интереса к обучению:

- Такой учебный материал, который является для учащихся новым, неизвестным, поражает их воображение, заставляет удивляться. Для поддержания познавательного интереса важно учить школьников умению в знакомом видеть новое. Такое преподавание подводит к осознанию того, что у

обыденных, повторяющихся явлений окружающего мира множество удивительных сторон, о которых он сможет узнать на уроках.

- Показ новейших достижений науки. Сейчас, больше чем когда-либо, необходимо расширять рамки учебных программ, знакомить учеников с основными направлениями научных поисков, открытиями.

- Сам процесс деятельности. Для того, чтобы возбудить желание учиться, нужно развивать потребность ученика заниматься познавательной деятельностью, а это значит, что в самом ее процессе он должен находить привлекательные стороны, чтобы сам процесс учения содержал в себе положительные заряды интереса.

Формирование познавательных интересов учащихся в обучении может происходить по двум основным направлениям. Первое – содержание учебных предметов, а второе – через организацию познавательной деятельности учащихся. В первом случае могут влиять: новизна, практическая значимость, межпредметные связи, исторические сведения.

Новизна содержания учебного материала. Первое, что является предметом познавательного интереса для школьников – это новые знания о мире. У части детей сам факт познания чего-либо неизвестного вызывает интерес. Для других – изучаемый материал только тогда интересен, когда его содержание смогло их поразить, удивить, озадачить.

Новые факты и сведения, новизна содержания – не единственный и не постоянный стимул познавательного интереса, которым располагает содержание обучения. После уроков изучения нового материала идет целая серия уроков, рассматривающих единое содержание, которое либо закрепляется, либо углубляется.

Практическая значимость. На формирование познавательного интереса существенное влияние оказывает *практическая значимость* содержания знаний. Интерес к изучению того или иного математического вопроса зависит от убежденности учащегося в необходимости изучить. Использование

мотивации в виде примеров практического использования математических фактов подводит ученика к осознанию необходимости теоретических знаний. Для многих учеников источник формирования познавательных интересов лежит в их практической деятельности. Поэтому для того, чтобы школьников заинтересовал и теоретический аспект используют прикладные задачи вычислительного характера.

Межпредметные связи. Ещё одним стимулом интереса, заключённым в содержании учебного материала, являются межпредметные связи математики с другими дисциплинами. Благодаря прикладным задачам, позволяющим интегрировать материал математики и естественных дисциплин, можно формировать познавательный интерес у школьников не только к своему предмету, но и предметам своих коллег. В действующих учебниках чаще всего прослеживается на примерах тесная связь математики с физикой. Однако для формирования познавательного интереса необходимо показывать значимость математики не только для самой себя и физики, но и для других школьных предметов естественного цикла. А сделать это можно лишь при решении определённо поставленных задач практического характера. Создавая межпредметные связи, учитель доказывает учащимся то, что математика не существует сама по себе и сама для себя, а она призвана быть центральным звеном всех естественных наук.

Исторический материал. В содержании обучения он имеет большое значение для формирования познавательного интереса. Включение в урок математики элементов историзма способствует укреплению познавательных интересов, углублению понимания материала, расширению кругозора учащихся, повышению их общей культуры. На уроках можно знакомить учащихся с биографиями великих учёных, математическими открытиями и развитием различных математических дисциплин; мотивировать введение нового понятия происхождением его термина. Пробуждают познавательный интерес и задачи с исторической фабулой, интересным содержанием.

Для многих учеников важным источником познавательного интереса является не столько учебный материал, сколько процесс познавательной деятельности. Для того, чтобы возбудить желание учиться, нужно развивать потребность ученика заниматься ею, а это значит, что в самом ее процессе школьник должен находить привлекательные стороны, а само обучения содержало в себе положительные заряды интереса. Путь к нему лежит через самостоятельную работу, проблемное обучение, творческие работы.

Самостоятельная работа. Основная ее цель состоит в том, чтобы научить школьников мыслить, анализировать и обобщать факты, что, в свою очередь, положительно сказывается на усвоении учебного материала.

Специфика самостоятельной работы заключается в том, что она:

- носит целенаправленный характер, что достигается четкой формулировкой цели работы. Задача учителя заключается в том, чтобы найти такую формулировку задания, которая вызывала бы у школьников интерес к работе и стремление выполнить ее как можно лучше. Учащиеся должны ясно представлять, в чем заключается задача и, каким образом, будет проверяться ее выполнение;
- должна быть действительно самостоятельной и побуждать ученика при ее выполнении работать напряженно;
- предполагает выполнение таких заданий, которые не допускают действия по шаблону, а требует применения знаний в новой ситуации;

Проблемное обучение – это обучение, при котором усвоение содержания материала осуществляется в процессе решения специальных проблемных ситуаций. *Проблемная ситуация* – это состояние интеллектуального затруднения человека, возникающее в случае, когда он не знает, как объяснить явление или факт происходящей действительности, не может достичь цели известным ему способом. В ее условиях выделяются два этапа продуктивной познавательной деятельности человека: возникновение проблемы и ее решение. Организация проблемного обучения предполагает применение таких

приемов и методов преподавания, которые приводили бы к возникновению взаимосвязанных проблемных ситуаций и предопределяли использование школьниками творческих методов учения. Однако их возникновение происходит не всегда. Оно возможно при постановке новых для ученика задач; их составлении и решении; логическом анализе текста; ученическом исследовании и т.д. Задачей учителя становится создание цепочки проблемных ситуаций, используя различные виды творческой деятельности учащихся и управляя их мыслительной деятельностью по усвоению новых знаний.

Творческие работы оказывают стимулирующее влияние на познавательный интерес учащихся. Они активизируют эмоционально-волевые и интеллектуальные психические процессы, способствуют формированию творческих возможностей школьников. Такие работы, могут быть самыми разнообразными. Важное место на уроках математики среди них занимает составление задач.

При создании условий для формирования познавательного интереса, а также регулярной, целенаправленной деятельности по его развитию школьники достигают высоких результатов в обучении.

1.4. Понятие познавательной деятельности

Далеко не все в учебном материале может быть интересно для учащихся. И тогда выступает еще один, не менее важный источник познавательного интереса – сам процесс такой деятельности.

Познавательная деятельность – это единство чувственного восприятия, теоретического мышления и практической деятельности. Она осуществляется на каждом жизненном шаге, во всех видах деятельности и социальных взаимоотношений учащихся, а также путем выполнения различных предметно-практических действий в учебном процессе. Взаимоотношения

проявляются в: производительном и общественно-полезном труде, ценностно-ориентационной и художественно-эстетической деятельности, а также общении. А путями выполнения могут быть: экспериментирование, конструирование, решение исследовательских задач и т.д. Лишь в процессе обучения познание приобретает четкое оформление в особой, присущей только человеку учебно-познавательной деятельности или учении. Выделяются следующие методы организации учебно-познавательной деятельности:

- получения новых знаний;
- выработки практических умений и накопления опыта учебной деятельности;
- закрепления изученного материала;
- организации взаимодействия учащихся.

Методы получения новых знаний включают такие, как рассказ, объяснение, школьная лекция, беседа, работа с книгой, организация наблюдения, иллюстрация, демонстрация. Первые четыре называют *вербальными* (словесными) методами обучения. Рассмотрим подробнее некоторые из них.

Рассказ – это метод повествовательного изложения содержания изучаемого материала учителем. Чаще всего он используется при изложении такого учебного материала, носящего описательный характер.

Под **объяснением** следует понимать словесное пояснение, анализ, доказательство и истолкование различных положений излагаемого материала. К нему чаще всего прибегают при изучении теоретического материала различных научных дисциплин.

Школьная лекция. В отличие от рассказа и объяснения, которые используются при изложении сравнительно небольшого по объему учебного материала, она представляет продолжительное устное изложение учебного материала в сочетании с приемами активизации познавательной деятельности учащихся. Так, к ним можно отнести: выписывание основной мысли, конспектирование, составление схематической модели излагаемого материала.

ла. Этот прием используется, как правило, в старших классах и занимает весь или почти весь урок (20 – 30 мин).

Беседа. Такой метод обучения является диалоговым. Учитель путем постановки логически продуманной системы вопросов побуждает учащихся рассуждать и подводит учеников к пониманию нового материала или проверяет усвоение уже изученного. Если беседа предшествует изучению нового материала, то ее называют вводящей или вступительной. Ее целью является формирование у школьников состояния готовности к изучению новой темы. По своей форме беседа может быть *индивидуальной, групповой и фронтальной*.

Работа с книгой. Сущность такого вида деятельности заключается в овладении новыми знаниями, когда ученик изучает материал, осмысливает содержащиеся факты, примеры, закономерности, приобретая умение работать с книгой.

Иллюстрацию относят к наглядным методам обучения, при котором усвоение учебного материала находится в существенной зависимости от применяемых в процессе обучения наглядных пособий и технических средств. Он предполагает показ ученикам иллюстративных пособий: плакатов, таблиц, картин, карт, зарисовок на доске и т.д.

Демонстрацию также относят к наглядным методам обучения. Она представляет синтез словесных и наглядных приемов, связанных с демонстрацией диафильмов, кинофильмов, приборов, опытов, технических установок и др.

Методы выработки учебных умений и накопления опыта учебной деятельности построены на выполнении реальных учебных действий и направлены на формирование практических умений и навыков. К ним относятся такие методы организации учебной деятельности, как *упражнения, лабораторные и практические работы*.

Под **упражнениями** понимают многократное выполнение умственного или письменного действия с целью углубления своих знаний и выработки соответствующих учебных умений и навыков. По степени самостоятельности учащихся при выполнении упражнений выделяют *воспроизводящие и творческие*.

Огромное влияние на организацию упражнений оказывает характер учебной деятельности. При этом упражнения подразделяются на: *устные, письменные, графические и практические*. Рассмотрим специфику этих упражнений.

Устные упражнения способствуют развитию логического мышления, памяти, речи и внимания учащихся. Они отличаются динамичностью и не требуют затрат времени на ведение записей. *Письменные упражнения* используются для закрепления знаний и выработки умений письма. *Графические упражнения* заключаются в выполнении рисунков, зарисовок, при проведении экскурсий, практических работ, составлении схем, чертежей, изготовлении альбомов, плакатов. Они выполняются обычно одновременно с письменными, и решают единые учебные задачи. К *практическим упражнениям* относятся работы, связанные с выработкой умений обращаться с предметами, инструментами, проводить измерения и т.д. Целью их проведения является применение теоретических знаний учащихся в учебной и трудовой деятельности.

Лабораторные работы – это изучение учащимися каких-либо явлений с помощью специального оборудования. Целью их проведения является формирование умений и навыков обращения с приборами и другим техническим оборудованием.

Практические работы. Этот метод обучения представляет осуществление учащимися предметной деятельности с целью накопления опыта использования уже имеющихся знаний и получения новых, также проводятся обычно после изучения крупных разделов или тем и носят обобщающий характер.

Методы закрепления и повторения изученного материала предназначены для сохранения в памяти учащегося полученных знаний и переносу их в долговременную память. К ним относятся такие методы, как *беседа* и *повторение*. В первом случае учитель с помощью прямых вопросов побуждает учащихся к активному воспроизведению освоенного ими материала с целью его более глубокого осмысления и долговременного запоминания. А

во втором – это процесс словесного или письменного воспроизведения выполняемых ранее учебных заданий.

Введение **методов организации взаимодействия учащихся и накопления социального опыта** способствует накоплению и освоению у школьников социального опыта общения и социальных методов организации учебной деятельности. Формирующим элементом в них выступает диалоговое общение учащихся, являющееся важнейшей составляющей современного обучения.

Можно выделить наиболее часто применяемые методы организации взаимодействия учащихся. Прежде всего, **метод взаимной проверки**, в котором школьник отдает свою тетрадь соседу по парте, а его тетрадь берет себе. Проверяться могут маленькие, написанные на листочке, самостоятельные работы или записанные в тетради отдельные задания, упражнения и целые домашние работы. Взаимопроверка работ начинается со сравнения списанных и решенных заданий с представленными учителем образцами. Ошибки подчеркиваются и обозначаются галочкой на полях. В дальнейшем переходят к дифференцированной оценке.

Обмен заданиями. Его суть заключается в том, что на уроке учащиеся выполняют задания, придуманные одноклассниками. Они могут быть подготовлены как на уроке, так и дома и являться частью домашнего задания. Этот прием помогает учителю достичь сразу несколько целей. Во-первых, учащиеся осваивают технику совместной деятельности; во-вторых, они включаются в творческую деятельность; в-третьих, проверяется домашнее задание, интерес к которому резко повышается.

Работа, ограниченная временем, представляет деятельность учащихся в составе малых групп по выполнению небольших учебных заданий. Перед ними ставятся задачи «промежуточного» характера, т.е. готовящие почву для следующего этапа учебного процесса. Задания носят разноплановый характер, ими могут быть: обмен идеями, собственным опытом; выработка правил; обмен сведениями и быстрое обсуждение почерпнутого материала из разных

источников; решение, что делать дальше, выбор варианта продолжения урока; постановка вопросов, проблем для предстоящего обсуждения; выявление и обсуждение разногласий и расхождений; проведение «мозгового штурма»; подготовка общеклассной дискуссии; пересмотр и переформулирование целей дискуссии, зашедшей в тупик; выход чувств и переживаний, возникающих как реакция на происходящее в классе.

Время работы обычно выбирается сжатое. Внутри группы выделяют ведущего, и после обсуждений представители каждой из них докладывают классу выработанные предложения. Они суммируются и далее могут обсуждаться учащимися класса совместно.

Создание ситуаций совместных переживаний способствует формированию доверительных отношений между учащимися и представляет совместную деятельность учащихся, которая содержит элементы сильного позитивного эмоционального переживания.

Организация работы учащихся-консультантов. Основными достоинствами этого метода выступают два момента: увеличение времени на устные объяснения учебного материала и формирования в классе системы взаимопомощи. Используют несколько вариантов метода организации работы консультантов:

- назначение консультантом одного из членов созданной или постоянно действующей группы на один урок, его фрагмент или на несколько уроков по конкретной теме;
- помощь слабым ученикам и подготовка их к ответу учителю после уроков;
- помощь учащимся любому желающему во время урока после выполнения своей собственной работы.

1.5. Формируемые компетенции в процессе познавательной деятельности

Важнейшей задачей современной системы образования является формирование универсальных учебных действий, обеспечивающих школьникам умение учиться, способность к саморазвитию и самосовершенствованию. **Универсальные учебные действия (УУД)** – это действия, обеспечивающие овладение ключевыми компетенциями, составляющими основу умения учиться.

Компетенция – это готовность ученика использовать усвоенные знания, умения и навыки, а также способы деятельности в жизни для решения практических и теоретических задач. Под *ключевыми компетенциями* понимается целостная система универсальных знаний, умений, навыков, а так же опыт самостоятельной деятельности и личной ответственности обучающихся. **Компетентностный подход** является одним из направлений обновления образования в стратегии модернизации содержания общего образования России.

В связи с практической ориентированностью современного образования основным результатом деятельности образовательного учреждения должна стать не система знаний, умений и навыков сама по себе, а набор ключевых компетентностей, таких как:

- **Ценностно-смысловые.** Это компетенции, связанные с ценностными ориентирами ученика, его способностью уметь выбирать целевые и смысловые установки для своих действий и поступков, принимать решения. Они обеспечивают механизм самоопределения ученика в ситуациях учебной и ином виде деятельности.

- **Общекультурные компетенции** подразумевают осведомленность обучающегося в особенностях национальной и общечеловеческой культуры, духовно-нравственных основах жизни человека и человечества.

- **Учебно-познавательные.** К ним относятся компетенции ученика в сфере самостоятельной познавательной деятельности, включающей элементы логической, методологической, общеучебной деятельности. Сюда входят способы организации целеполагания, планирования, анализа, рефлексии, самооценки. По отношению к изучаемым объектам ученик овладевает креативными навыками: добычей знаний непосредственно из окружающей действительности, владением приемами учебно-познавательных проблем, действий в нестандартных ситуациях.

- **Информационные** подразумевает готовность обучающегося самостоятельно работать с информацией различных источников, искать, анализировать и отбирать необходимую информацию, организовывать, преобразовывать, сохранять и передавать ее.

- В **коммуникативных компетенциях** реализуется использование различных коллективных приёмов работы, таких как: дискуссия, групповая работа, парная работа, при разборе задачи диалог с учителем или соседом по парте и многое другое.

- **Социально-трудовые** подразумевает овладение школьниками теми предметными знаниями, умениями и навыками, которые они будут использовать непосредственно в своей дальнейшей жизнедеятельности;

- **Компетенции личностного самосовершенствования** направлены на освоение способов физического, духовного и интеллектуального саморазвития, эмоциональной саморегуляции и самоподдержки. Ученик овладевает способами деятельности в собственных интересах и возможностях, что выражается в его непрерывном самопознании, развитии необходимых современному человеку личностных качеств, формировании психологической грамотности, культуры мышления и поведения.

В процессе познавательной деятельности очень важно, чтобы все рассмотренные выше компетенций формировалась у учащихся на каждом этапе урока, особенно учебно-познавательные. Рассмотрим их более детально

Учебно-познавательные компетенции предполагают умения:

- ставить цель, умение пояснить и организовывать ее достижение, уметь пояснить свою цель;
- организовывать планирование, анализ, рефлекссию, самооценку своей учебно-познавательной деятельности;
- задавать вопросы к наблюдаемым фактам, отыскивать причины явлений, обозначать свое понимание или непонимание по отношению к изучаемой проблеме;
- ставить познавательные задачи и выдвигать гипотезы: выбирать условия проведения наблюдения или опыта; выбирать необходимые приборы и оборудование, владеть измерительными навыками, работать с инструкциями; описывать результаты, формулировать выводы;
- выступать устно и письменно о результатах своего исследования с использованием компьютерных средств и технологий (текстовые и графические редакторы, презентации).

Ключевой характер учебно–познавательной компетенции проявляется в том, что она обязательно входит в остальные, их овладение и эффективная реализация во многом зависят от познавательной составляющей. В связи с этим владение учебно-познавательной компетенцией предполагает ее восприятие в нескольких ипостасях:

во-первых, как фактор академической мобильности личности ученика, то есть успешности его учебы в школе и готовности продолжения обучения в учреждениях профессионального образования;

во-вторых, как фактор профессиональной мобильности личности, обеспечивающей реализацию современной политики непрерывного образования, получения профессии, повышения квалификации;

в-третьих, как фактор, повышающий эффективность работы школы – социального института, призванного реализовать программу общего образования. Ведь без активной познавательной позиции ученика, без его готовности

самостоятельно осуществлять учебно-познавательную деятельность, невозможна эффективная работа школы.

Таким образом, при анализе литературы мы выяснили различные подходы к понятию познавательного интереса, обозначили его уровни, а также рассмотрели способы формирования познавательного интереса, одним из которых является процесс познавательной деятельности. В соответствии с этим мы дали определение понятию «познавательная деятельность» и описали различные методы организации учебно-познавательной деятельности. Глава заканчивается рассмотрением компетенций, формируемых в процессе познавательной деятельности. Полученные теоретические данные помогут нам при разработке собственного курса по выбору.

ГЛАВА 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

В течение последних двух десятилетий среди лиц, занимающихся различными аспектами науки и техники, значительно возросла популярность теории графов — раздела дискретной математики. Возникнув при решении математических развлекательных игр и головоломок, таких как, задача о кенигсбергских мостах, она стала мощным средством исследования и решения многих вопросов, возникающих при изучении больших и сложных систем.

2.1. Сведения из истории возникновения графов

Истоками теории графов стало не одно открытие, а целых три, и формировались они в каждом из направлений своеобразно. Само же формирование их как теории относится к 1936 году, когда венгерским математиком Денешем Кенигом (1884–1944) была опубликована книга «Теория конечных и бесконечных графов». К настоящему времени они имеют множество приложений, в различных научных дисциплинах, таких как: химия и физика, а также во многих других.

Одним из первых результатов в теории графов явился критерий существования всех ребер графа без повторений, полученный Леонардом Эйлером (1707–1783) – швейцарским, немецким и российским математиком и механиком, внесшим фундаментальный вклад в развитие этих наук. В 1736 г. ученого заинтересовала задача о семи мостах немецкого города Кенигсберга (ныне Калининград), о чем он написал в своем письме к итальянскому математику Д. Д. Маринони от 13 марта 1736 года. В этом письме Эйлер пишет о том, что ему была предложена задача об острове, расположенном в городе Кенигсберге, и окруженном рекой Прегель, через которую перекинута семь мостов. Спрашивается, может ли кто-нибудь непрерывно обойти их, проходя только

однажды через каждый мост. Задачу о Кенигсбергских мостах схематически можно изобразить так, как показано на рисунках 1 и 2.

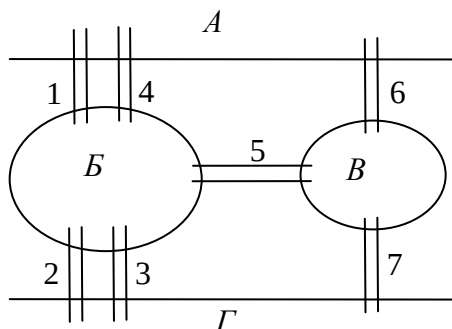


Рис. 1. Упрощенная схема мостов Кенигсберга

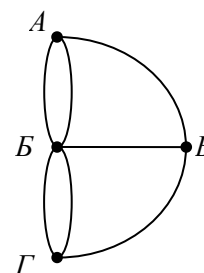


Рис. 2. Граф кенигсбергских мостов

На рисунке 2, ребра соответствуют мостам, а вершины (точки, в которых соединяются линии) – частям города. Число ребер, принадлежащих вершине, называется ее **степенью**. Вершина может быть **четной**, то есть когда ей принадлежит четное количество ребер или **нечетной** – когда количество принадлежащих ей ребер нечетно. Размышляя над задачей, Эйлер пришел к следующим выводам:

- 1) число нечетных вершин всегда четно;
- 2) одним росчерком пера можно начертить граф, все вершины которого четные, причем начать можно из любой вершины графа и закончить в ней;
- 3) граф с двумя нечетными вершинами можно начертить одним росчерком пера, причем начинать следует в одной нечетной вершине, а закончить в другой;
- 4) граф более чем с двумя нечетными вершинами невозможно начертить одним росчерком.

У графа кенигсбергских мостов четыре нечетных вершины (рис. 2). Поэтому, пройти по всем мостам, ни по одному не проходя дважды, не представляется возможным. Граф, который можно обойти, проходя один раз по каждому из его ребер, называется **универсальным**. Такое же определение имеет и **универсальная фигура**.

Хотя Эйлер и решил ряд задач, основанных на теории графов, все же существенные шаги в этой области были сделаны лишь в XIX веке. Всемирно известный немецкий инженер-электрик Густав Роберт Кирхгоф (1824–1887) способствовал этому. Ученый нашел в неявной форме число *остовов* произвольного, заданного связного графа, а значит, в частности, — число *помеченных деревьев*. Таким образом, при составлении полной системы уравнений для токов и напряжений в электрической схеме, Кирхгоф предложил по существу представлять такую схему графом и находить в нем графе *основные деревья*, с помощью которых выделяются линейно независимые системы контуров электрических цепей. Такие графы принято называть *сигнальными*. На рисунке 3 дан пример электрической цепи N , соответствующего ей графа G и остова T .

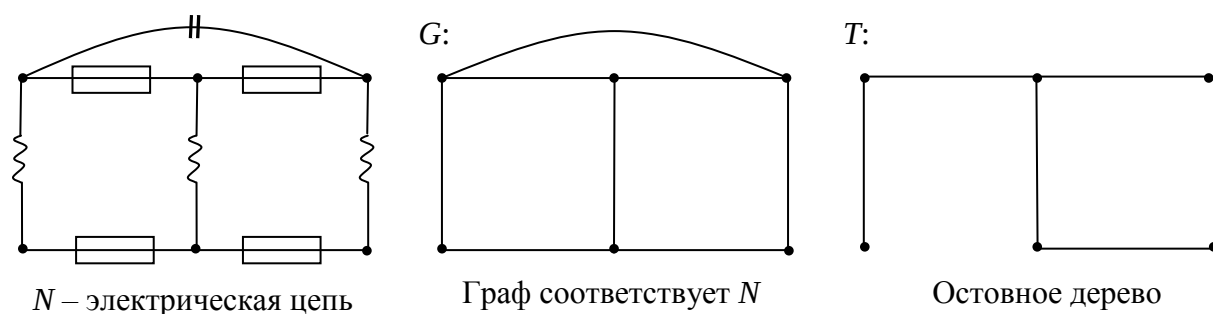


Рис. 3. Электрическая схема Кирхгофа

Значительно обогатилась теория графов от попыток применения ее средств к проблеме анализа структуры химических соединений. Существующая в химии практика графического изображения структур молекул сложилась в 60-е годы XIX века. Особенный интерес вызвала проблема изомерии, то есть объяснение ситуации, когда молекулы веществ имеют одинаковый состав, но различные свойства. На сколько можно судить эта проблема была решена графическими средствами.

Основные заслуги математического плана принадлежат Артуру Кэли (1821—1895) – английскому математику. В 1875 году он опубликовал работу в «Berichte der deutschen Chemischen Gesellschaft» (тогда ведущем химиче-

ском журнале) по перечислению алкановых изомеров. Эта работа фактически являлась первой по применению теории графов в химии.

Занимаясь чисто практическими задачами органической химии, Кэли в 1857 году открыл важный класс графов, называемых деревьями. Он стремился перечислить изомеры предельных (насыщенных) углеводородов C_nH_{2n+2} с данным числом n атомов углерода; некоторые из таких углеводородов показаны на рисунке 4.

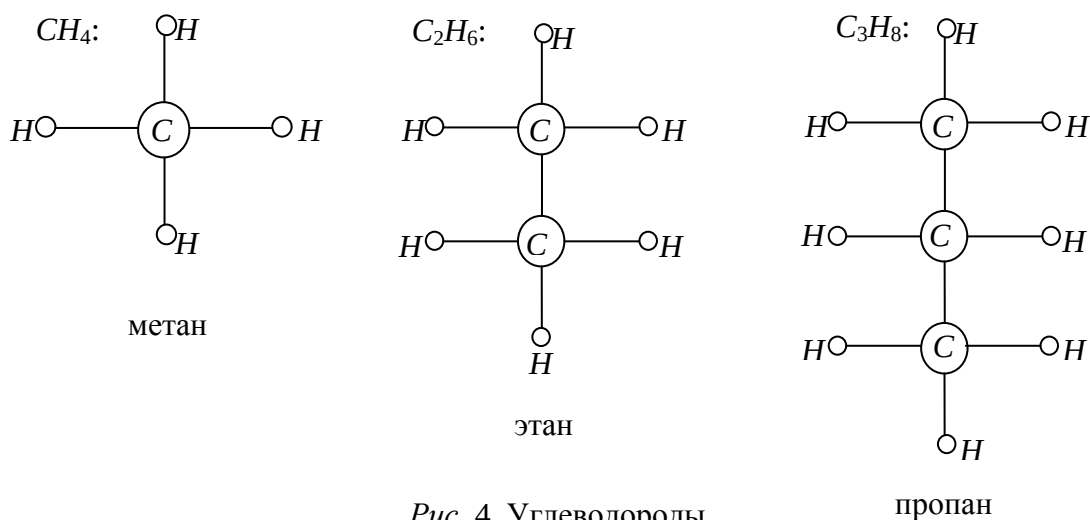


Рис. 4. Углеводороды

Конечно, ученый сформулировал задачу абстрактно: найти число всех деревьев с p вершинами, каждое из которых имеет вершины со степенями равными единице и четырем.

К концу XIX века методы решения перечислительных задач на графах в работах Кэли дополнились следующими достижениями:

- решение задачи о перечислении деревьев, у которых степени вершин не превышают 4;
- решение задачи о перечислении деревьев, у которых степени вершин равны 1 и 4;
- решение задачи о перечислении всех деревьев;
- решение задачи о перечислении корневых деревьев (в которых выделена одна из вершин).

Последние 2 из упомянутых задач у Кэли были выведены в теорему и следствие и имели следующие формулировки.

Теорема Кэли. Число помеченных деревьев с n вершинами равно n^{n-2} .

Следствие. Число помеченных корневых деревьев с n вершинами есть $T_n = n^{n-1}$. Теоретико-графовое описание молекул хорошо отображает их топологические характеристики: целостность, характер связывания (цепи, циклы, разветвления и т.п.), что важно при решении тех задач, в которых метрические отношения (длины связей, валентные и азимутальные углы) не играют большой роли.

2.2. Основные понятия и определения

Графом $G(V, E)$ называется совокупность двух множеств – непустого множества V (*вершин*) и множества E двухэлементных подмножеств множества V (E – множество *ребер*). Графически граф может быть представлен геометрической фигурой, в которой вершина изображена точкой, а ребро – отрезком линии, соединяющей точки, соответствующие концевым вершинам ребра. Элементы множеств V и E могут содержать индексы. Индексы вершин обозначают их номера, индексы ребер – номера соединяемых ими вершин. Запись e_{ij} означает, что ребро графа образовано парой вершин v_i и v_j . Например, если множества $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ и $E = \{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{24}, e_{25}, e_{35}\}$, то граф $G(V, E)$ может быть представлен на рисунке 5.

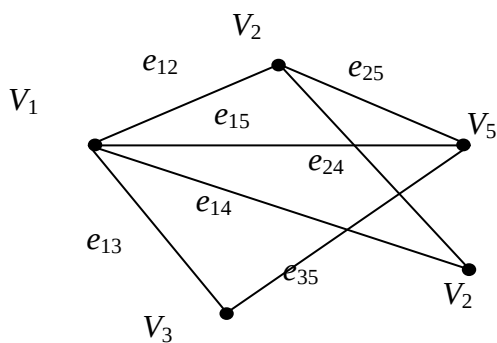


Рис. 5. Граф

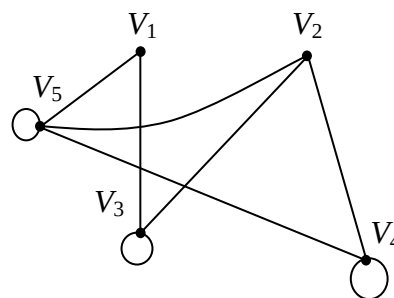


Рис. 6. Псевдограф

Любой из графов может содержать одно или несколько ребер, у которых оба конца сходятся в одной вершине. Такие ребра называются **петлями**. Граф с петлями называют **псевдографом**. На рисунке 6 представлен граф с петлями (псевдограф).

Если ребрам графа приданы направления от одной вершины к другой, то такой граф называется **ориентированным (ор-графом)**. Ребра ориентированного графа называются **дугами**. Соответствующие вершины ориентированного графа называют началом и концом. Пример ориентированного графа показан на рисунке 7. Если направления ребер не указываются, то граф называется **неориентированным** или просто **н-графом**. Ребра такого графа иногда называются **звеньями**. Для неориентированного графа используется понятие **инцидентного** ребра. Пусть V_1 и V_2 – вершины, e_{12} – соединяющее их ребро (рис. 5). Тогда ребро e_{12} инцидентно данным вершинам и наоборот, вершины V_1 и V_2 инцидентны ребру e_{12} . Два ребра инцидентные одной вершине, называются **смежными**.

В ряде случаев рассматриваются **смешанные** графы, имеющие как ориентированные, так и неориентированные ребра (рис. 8).

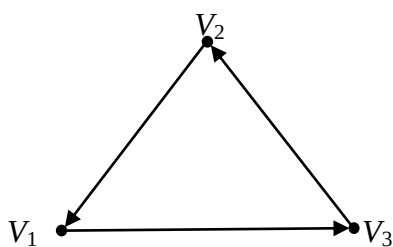


Рис. 7. Ор-граф

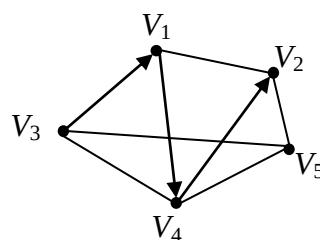


Рис. 8. Смешанный граф

Пара вершин может соединяться с двумя и более ребрами дугами (одного направления), такие ребра (дуги) называются **кратными**. Граф, не имеющий ни ребер, ни вершин называется **пустым**. Такой граф обозначается $G_\emptyset$. Граф, состоящий только из изолированных вершин, то есть не содержащий ни одного ребра называется, **нуль-графом**. Такой граф обозначается G_0 .

Простым графом называют граф, который не имеет петель или кратных ребер (рис. 6). **Полный граф** (рис. 9) – это простой граф, у которого любые две вершины соединены ребром. Полный граф обозначается G_n . Полный ориентированный граф называется **турниром**.

Плотный граф (рис. 10) – это полный граф, у которого при каждой вершине имеется петля. Плотный граф обозначается G'_n . Граф, состоящий из одной вершины, называется **тривиальным**.

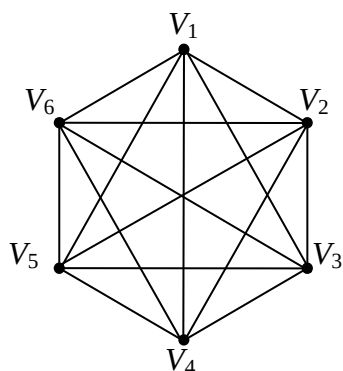


Рис. 9. Полный граф

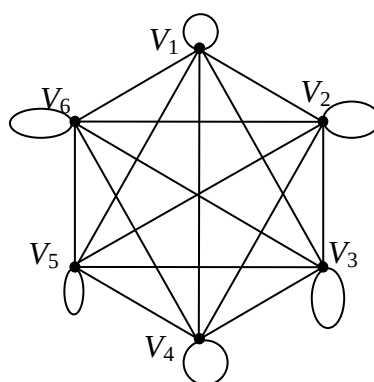


Рис. 10. Плотный граф

Следующий граф, который мы рассмотрим – **плоский** (рис. 11), который нарисован на плоскости так, что все его ребра пересекаются только в его вершинах. Любой граф, изоморфный плоскому, называют **планарным графом** (рис. 12). Плоский граф есть изображение планарного, но не каждое изображение планарного графа является плоским.

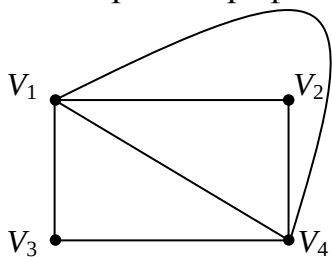


Рис. 11. Плоский граф

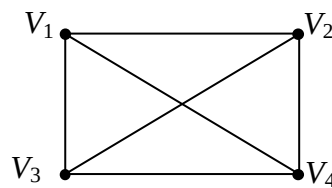


Рис. 12. Планарный граф

Перейдем к понятию **мультиграфа**. Мультиграфом (рис. 13) называется граф, у которого любые две вершины соединены кратными ребрами. Наибольшее число кратных ребер, соединяющих какую-либо пару вершин, назы-

вается **мультичислом**. **Скелетом мультиграфа** называется граф, полученный из исходного мультиграфа путем удаления петель и сведения кратных ребер в одно ребро. На рисунке 14 показан скелет мультиграфа, изображенного на рисунке 13.

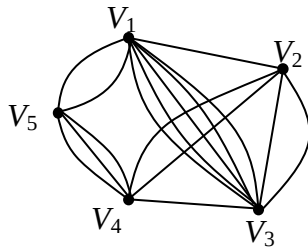


Рис. 13. Мультиграф

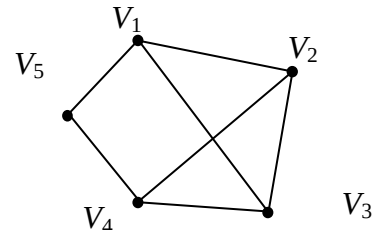


Рис. 14. Скелет мультиграфа

2.3. Связность графов

Разберем понятие *связности графа*. Итак, граф считается связным, если из любой его вершины есть **путь (маршрут)** в любую другую вершину (путь может состоять из любого количества рёбер). Пример связности приведен на рисунке 18. Однако, если, например, удалить ребро между вершинами 4 и 5, то граф не будет связным, так как из вершины 5 нельзя будет попасть ни в какую другую вершину.

Путь есть **маршрут** в орграфе без повторяющихся дуг, **простой путь** — без повторяющихся вершин. Если существует путь из одной вершины в другую, то вторая вершина **достижима** из первой. На рисунке 19 приведен пример пути.

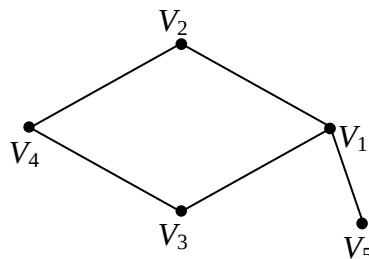


Рис. 18. Связный граф

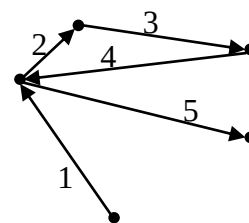


Рис. 19. Путь в орг-графе

До сих пор граф G предполагался неориентированным. Для графа можно вводить как неориентированные маршруты, цепи и простые цепи, так и ориентированные.

Теперь обратимся к ор-графу. Связность ор-графов определяется в принципе так же, как и н-графов. Специфичным для ор-графа (или смешанного графа) является понятие *сильной связности*.

Ор-граф называется **сильно-связным**, если любые его вершины взаимно достижимы.

Ор-граф называется **слабо-связным**, если является связным н-граф, полученный из него заменой ориентированных рёбер неориентированными. Граф, полученный заменой дуг на ребра, называется **ассоциированным ор-графом**. На рисунке 20 *a)* изображен сильно-связный орграф, а на рисунке 21 *b)* – слабо-связный орграф, так как, вершина B не достижима из вершины A .

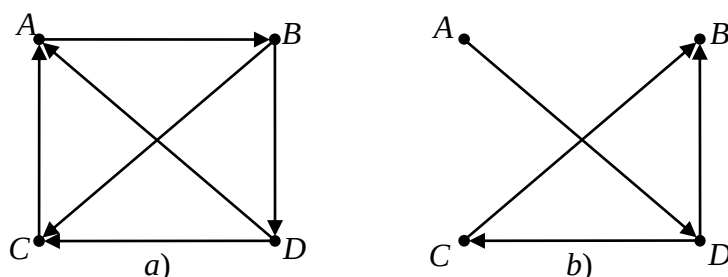


Рис. 20. Сильно связный и слабо-связный графы

Замечание. Любой связный неориентированный граф является сильно связным. Поэтому существует такое разбиение множества вершин графа на попарно непересекающиеся подмножества, что все вершины в каждом подмножестве связаны, а вершины из различных подмножеств не связаны. Каждое такое подмножество вершин графа вместе с ребрами, инцидентными этим вершинам, образует связный подграф. Следовательно, неориентированный граф представим единственным образом в виде непересекающихся связных подграфов. Эти подграфы называют **компонентами связности**. Граф, изображенный на рисунке 21, имеет три компоненты связности (рис. 22).

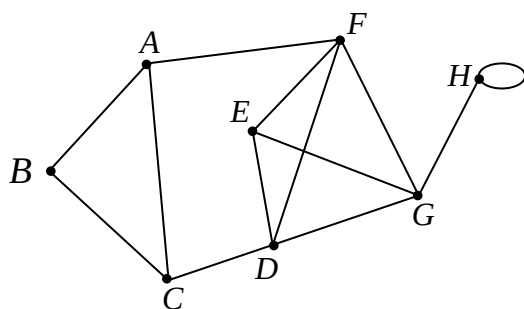


Рис. 21. Граф

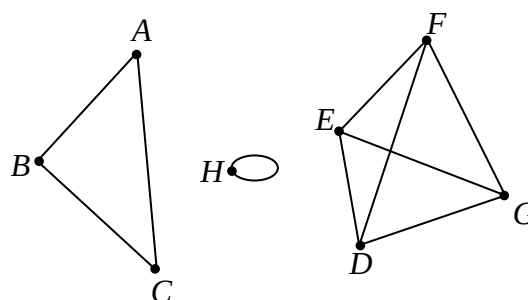


Рис. 22. Разбиение графа на компоненты связности

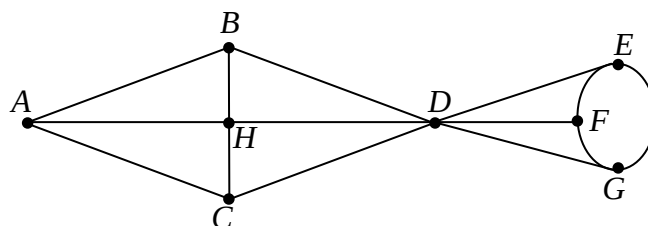


Рис. 24. Связный граф

Далее речь пойдет о понятиях, характеризующих степень связности графа. **Числом вершинной связности** графа называется число, равное наименьшему числу вершин, удаление которых приводит к несвязному или одновершинному графу. Граф, представленный на рисунке 24, связан, но он перестает быть связным, если удалить вершину D . Поэтому его вершинная связность $\chi(G)=1$. Вершина графа, удаление которой увеличивает количество компонент связности, называется **точкой сочленения**.

Можно нарушить связность графа, удаляя некоторые его ребра (дуги).

Числом реберной связности $\lambda(G)$ графа называется число, равное наименьшему числу ребер, удаление которых приводит к несвязному графу. Число реберной связности одновершинного графа полагается равным нулю. Например, если в графе, изображенном на рисунке 24, удалить не менее трех ребер между вершинами D и E , D и F , D и G , этот граф распадается на две компоненты связности, $\lambda(G)=3$. Ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности, называется **мостом**. Таким образом, точки сочленения и мосты – это своего рода «узкие места» графа.

2.4. Графы-деревья

Дерево – это конечный связный граф с выделенной вершиной (корнем) без циклов. Дерево не имеет петель и кратных рёбер. Связность означает наличие путей между любой парой вершин, а отсутствие циклов значит, то, что между парами вершин имеется только по одному пути. Наличие этих двух свойств позволяет жестко связать число вершин и число ребер: в дереве с n вершинами всегда $n-1$ ребер.

Граф, изображённый на рисунке 26, является примером дерева, а на рисунке 25 граф не является деревом, поскольку содержит цикл.

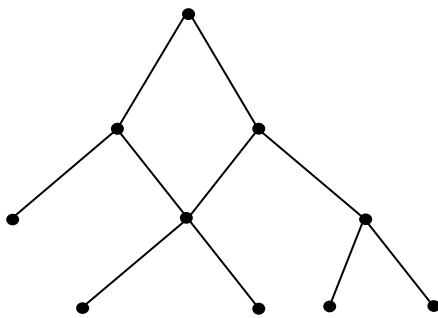


Рис. 25. Граф

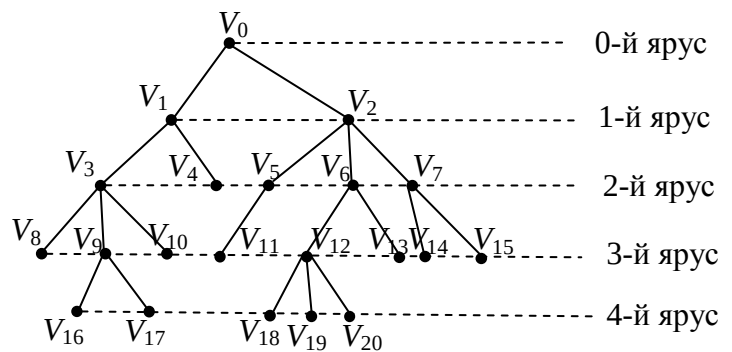


Рис. 26. Граф-дерево

Вершина графа-дерева называется **висячей**, если ее степень $= 1$. Ребро, инцидентное концевой вершине, называется **концевым**. Если конечное дерево состоит более чем из одной вершины, оно имеет хотя бы две концевые вершины и хотя бы одно концевое ребро.

Ориентированным деревом называется дерево имеющее корень, а все остальные вершины – листья. Вершина с нулевой степенью захода называется **корнем** дерева, вершины с нулевой степенью исхода (из которых не исходит ни одна дуга) называются **листьями**. На рисунке 26 изображено ориентированное дерево.

При описании ориентированных деревьев принято использовать термины: отец, сын, предок, потомок. Каждая вершина дерева называется **узлом**.

Упорядоченным деревом называется дерево, в котором поддеревья каждого узла образуют упорядоченное подмножество. Для упорядоченных деревьев принята терминология: старший и младший сын для обозначения соответственно первого и последнего сыновей некоторого узла (рис.27).

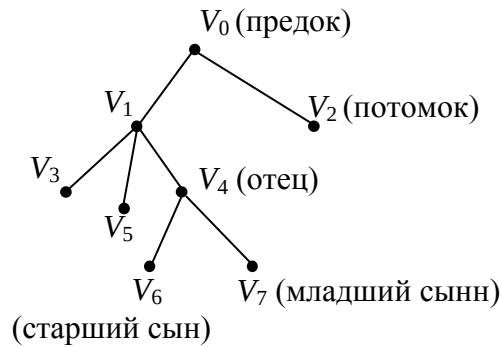


Рис. 27. Упорядоченное дерево

Наиболее характерные свойства деревьев, которые одновременно служат эквивалентными определениями дерева, сформулируем в следующей теореме.

Теорема. Граф $G(V, X)$ ($|V| = n > 1$) является деревом тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий:

- 1) граф $G(V, X)$ связан и не содержит циклов;
- 2) граф $G(V, X)$ не содержит циклов и имеет $n-1$ ребро;
- 3) граф $G(V, X)$ связан и имеет $n-1$ ребро;
- 4) граф $G(V, X)$ не содержит циклов, но добавление ребра между несмежными вершинами приводит к появлению одного и только одного элементарного цикла;
- 5) граф $G(V, X)$ связный, но утрачивает это свойство после удаления любого ребра;
- 6) в графе $G(V, X)$ всякая пара вершин соединена цепью, и только одной.

Следствие. Пусть T — лес с n вершинами и k компонентами; тогда G имеет $n-k$ ребер.

Лесом называется множество, содержащее несколько непересекающихся графов-деревьев. Граф на рисунке 28 – это лес.

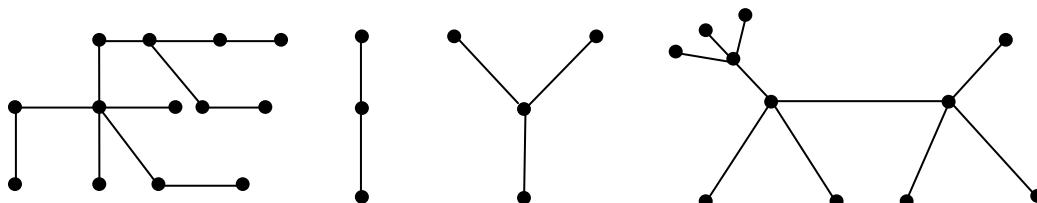


Рис. 28. Лес

Известно, что в связном графе G удаление одного ребра, принадлежащего некоторому выбранному циклу, не нарушает связности оставшегося графа. Применим эту процедуру к одному из оставшихся циклов, и так до тех пор, пока не останется ни одного цикла. В результате получим дерево, связывающее все вершины графа G ; оно называется **остовным деревом** графа G . Пример графа (рис 29) и одного из его остовных деревьев дан на рисунке 30.

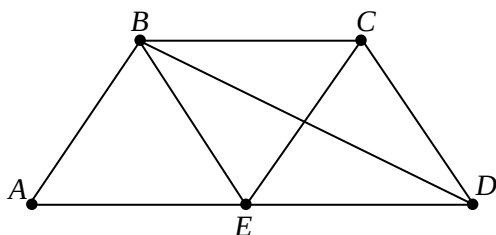


Рис. 29. Граф

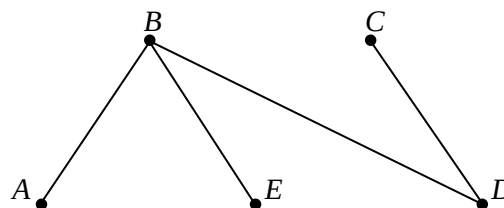


Рис. 30. Остовное дерево

Остовное дерево также иногда называют покрывающим деревом, остовом или скелетом графа.

Свойства остовного дерева:

- 1) Любое остовное дерево в графе с n вершинами содержит ровно n ребро;
- 2) Число остовных деревьев в полном графе на n вершинах выражается знаменитой формулой Кэли: n^{n-2} ;

3) В общем случае, число остовных деревьев в произвольном графе может быть вычислено при помощи, так называемой **матричной теоремы о деревьях.**

Обозначим через G произвольный граф с n вершинами, m ребрами и c компонентами. Применяя описанную выше процедуру (т.е. удаление одного ребра, принадлежащего некоторому выбранному циклу) к каждой компоненте G , получим в результате граф, называемый **остовным лесом**. Пример остовного леса на рисунке 31.

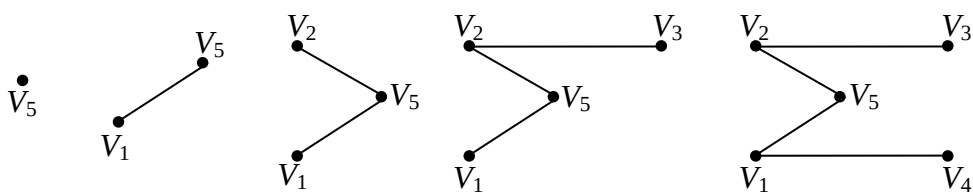


Рис. 31. Остовный лес

Число удаленных в этой процедуре ребер называется **циклическим числом** (или **цикломатическим рангом**) графа G и обозначается через $\nu(G)$.

Цикломатическим числом графа называется число $\nu(G) = m(G) + c(G) - n(G)$, где $m(G)$ число его рёбер; $c(G)$ число связных компонент графа; $n(G)$ число вершин.

Вершины максимального типа. Пусть дано конечное дерево G . **Вершинами типа 1** называют его концевые вершины. Если из дерева G все вершины типа 1 и инцидентные им концевые ребра, то в оставшемся дереве G' концевые вершины называют концевыми **вершинами типа 2** в дереве G . Аналогично определяются вершины типов 3, 4 и так далее. Конечное дерево имеет вершины лишь конечного числа типов, причем число вершин **максимального типа** равно единице или двум. (рис. 32)

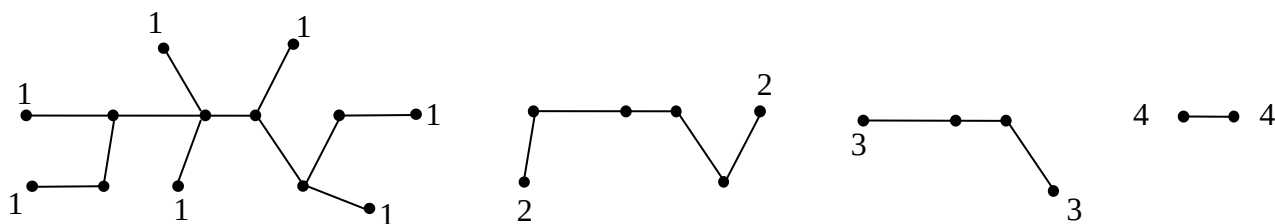


Рис. 32. Нахождение вершины максимального типа

2.5. Способы задания графов

В общем виде задать граф – значит описать множества его вершин и ребер, а также отношение инцидентности. Для описания вершин и ребер достаточно их занумеровать. Пусть $v_1, v_2, \dots, v_j, \dots, v_n$ – вершины графа G ; $e_1, e_2, \dots, e_j, \dots, e_m$ – ребра.

Отношение инцидентности задается:

1. Матрицей инцидентности;
2. Списком ребер;
3. Матрицей смежности.

Рассмотрим подробно каждый из способов.

Матрица инцидентности $\|\varepsilon_{ij}\|$ размера $m \times n$: по вертикали и горизонтали указываются вершины и ребра соответственно, а на пересечении i -й вершины и j -го ребра *в случае неориентированного* графа проставляется 1, если они инцидентны, и 0 – в противном случае, то есть:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } e_i \text{ инцидентно вершине } v_j; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

а в случае орграфа: -1 , если вершина является началом ребра, 1 – если вершина является концом ребра, и 0 – если вершина и ребро не инцидентны; если некоторая вершина является для ребра и началом, и концом (то есть ребро – петля), проставляется любое другое число, например 2 , то есть

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если вершина } v_j \text{ – начало ребра } e_i; \\ 1, & \text{если вершина } v_j \text{ – конец ребра } e_i; \\ \alpha \text{ (любое число, отличное от } -1, 1, 0), & \\ \text{если } e_i \text{ – петля, а } v_j \text{ – инцидентная вершина,} & \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В матрице инцидентности число всех вершин и число ребер графа определяется очевидным образом по размеру матрицы: число ребер $|E|$ графа равно числу строк m , а число вершин $|V|$ – числу столбцов n матрицы.

Приведем пример матрицы инцидентности (табл. 1) для двух графов, ор-графа (b) и н-графа (a), изображенных на рисунке 33.

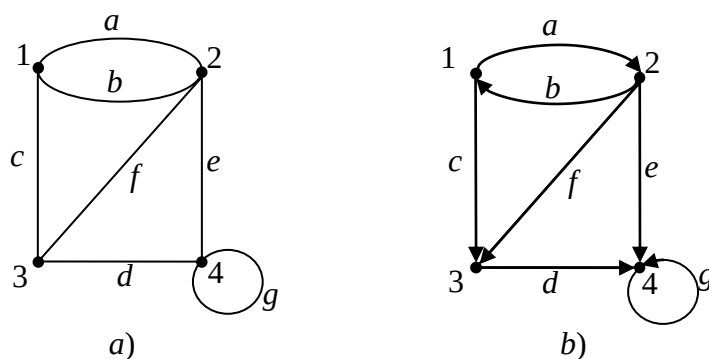


Рис. 33. Н-граф и ор-граф

Матрица инцидентности

Таблица 1

G_1	a	b	c	d	e	f	g
1	1	1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	1	1	0	0
3	0	0	1	1	0	1	0
4	0	0	0	0	1	1	1

G_2	a	b	c	d	e	f	g
1	-1	1	-1	0	0	0	0
2	1	-1	0	-1	-1	0	0
3	0	0	1	1	0	-1	0
4	0	0	0	0	1	1	1

Список ребер представляет собой два столбца: в левом перечисляются все ребра $e_j \in E$, а в правом – инцидентные ему вершины $v_j, v_{j'}$ для н-графа порядок вершин в строке произволен, ор-графа первым стоит номер начала ребра. Список ребер является более компактным описанием графа. Пример списка ребер ор-графа G_2 (рис. 33) приведен ниже в таблице 2. Для н-графа G_1 он аналогичен, однако последовательность указания вершин здесь не важна.

Список ребер

Таблица 2

ребро	a	b	c	d	e	f	g
вершины	1, 2	2, 1	1, 3	2, 3	2, 4	3, 4	4, 4

Матрица смежности $\|\delta_{kl}\|$ квадратная матрица размера $n \times n$: по вертикали и горизонтали перечисляются все вершины $v_j \in V$, а на пересечении k -й и l -й вершин в случае н-графа проставляется число, равное числу ребер, соединяющих эти вершины; для ор-графа δ_{kl} равно числу ребер с началом в k -й вершине и концом в l -й. Пример матрицы смежности для графов, изображенных на рисунке 33, приведен в таблице 3. Для н-графа (а) и для ор-графа (b).

Матрица смежности

Таблица 3

G_1	1	2	3	4
1	0	2	1	0
2	2	0	1	1
3	1	1	0	1
4	0	1	1	1

G_2	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	1
3	0	0	0	1
4	0	0	0	1

Если два графа равны, то их матрицы совпадают. Если в графе поменять нумерацию вершин, матрицы (и список ребер) в общем случае изменяются, то есть вид матриц и списка ребер зависит от нумерации вершин и ребер.

2.6. Операции на графах

В этом разделе мы введем несколько операций над графами. Первые три операции, включающие два графа, **бинарные**, а остальные четыре – **унарные**, то есть, определены на одном графе. Рассмотрим бинарные операции.

Объединение графов G_1 и G_2 , обозначаемое как $G_1 \cup G_2$, представляет собой такой граф $G_3 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$, что множество его вершин является объединением V_1 и V_2 , множество ребер – объединением E_1 и E_2 . На рисунке 34 представлен пример объединения графов G_1 и G_2 .

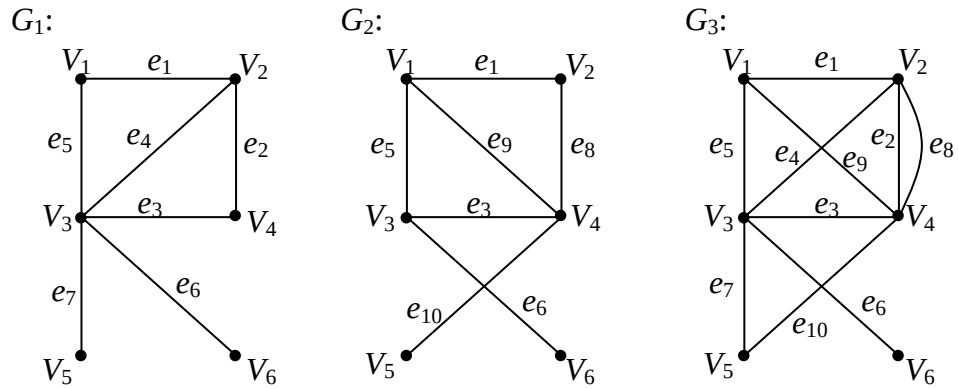


Рис. 34. Объединение графов

Пересечение графов G_1 и G_2 , обозначаемое как $G_1 \cap G_2$, представляет собой граф $G_3 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$. Таким образом, множество вершин G_3 состоит только из вершин, присутствующих одновременно в графах G_1 и G_2 , а множество ребер G_3 состоит только из ребер, присутствующих одновременно в G_1 и G_2 . Пересечение графов G_1 и G_2 показано на рисунке 35.

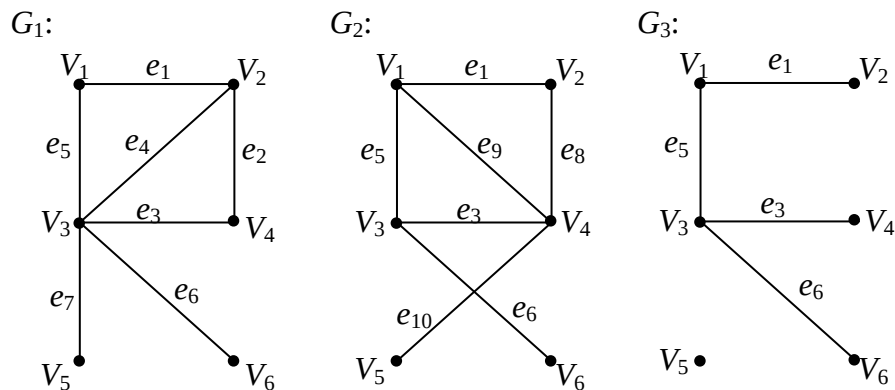


Рис. 35. Пересечение графов

Кольцевая сумма двух графов G_1 и G_2 , обозначаемая как $G_1 \oplus G_2$, представляет собой граф G_3 , порожденный на множестве ребер $E_1 \oplus E_2$. Другими словами, граф G_3 не имеет изолированных вершин и состоит только из ребер, присутствующих либо в G_1 , либо в G_2 , но не в обоих графах одновременно. Кольцевая сумма графов показана на рисунке 36.

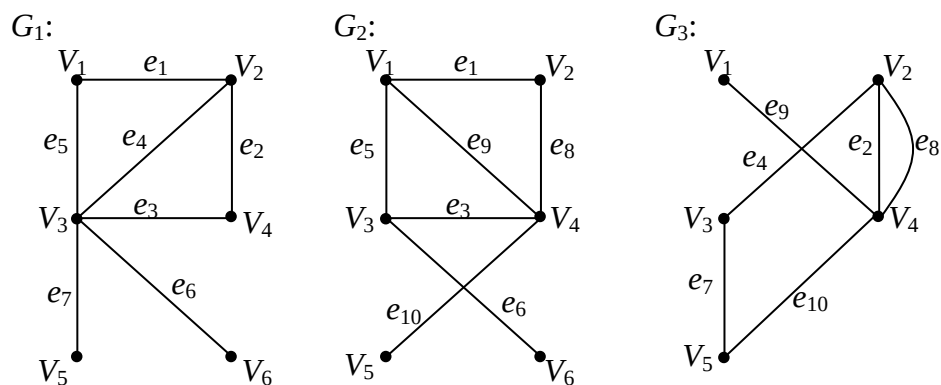


Рис. 36. Кольцевая сумма

Легко убедиться в том, что три рассмотренные операции коммутативны, то есть $G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1$, $G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1$, $G_1 \oplus G_2 = G_2 \oplus G_1$.

Также можно заметить, раз эти операции бинарны, то очевидно, что определение этих операций можно расширить на большее число графов.

Теперь рассмотрим унарные операции на графе.

Удаление вершины. Если v_i – вершина графа $G=(V,E)$, то $G-v_i$ – порожденный подграф графа G на множестве вершин $V-v_i$, то есть $G-v_i$ является графом, получившимся после удаления из графа G вершины v_i и всех ребер, инцидентных этой вершине. Удаление вершины показано на рисунке 37.

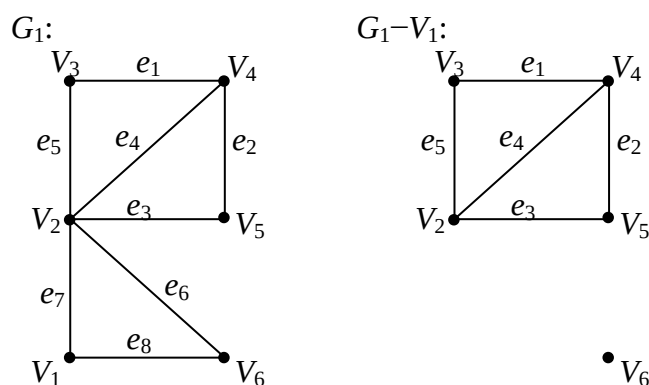


Рис. 37. Удаление вершины

Удаление ребра. Если e_i – ребро графа $G=(V,E)$, то $G-e_i$ – подграф графа G , получающийся после удаления из G ребра e_i . Заметим, что концевые вершины ребра e_i не удаляются из G . Удаление ребра показано на рисунке 38.

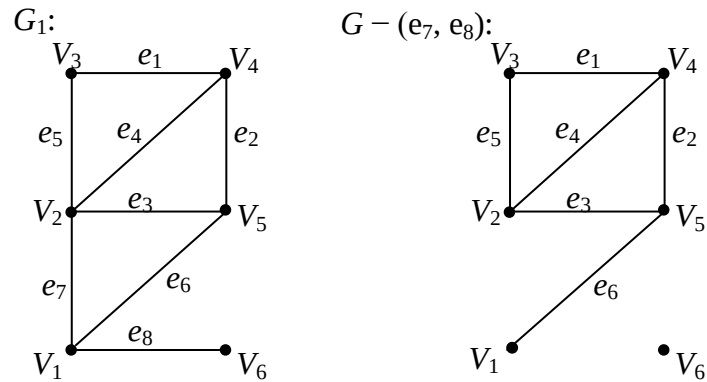


Рис. 38. Удаление ребра

Удаление из графа множества вершин или ребер определяется как последовательное удаление отдельных вершин или ребер.

Рассматриваемая далее операция замыкания, или отождествления, хорошо знакома инженерам-электрикам.

Замыкание или отождествление. Говорят, что пара вершин v_i и v_j в графе G замыкается или отождествляется, если они заменяются такой новой вершиной, что все ребра в графе G , инцидентные v_i и v_j , становятся инцидентными новой вершине.

Глава была посвящена теоретическим основам, необходимым для изучения курса по выбору «Графы и их применение». Нами были рассмотрены следующие аспекты: возникновение теории графов как отдельной науки, основные виды графов, связность, графы-деревья, способы задания и операции на графах.

ГЛАВА 3. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ КУРСА ПО ВЫБОРУ «ГРАФЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ»

Курсы по выбору – это форма организации предпрофильной подготовки на второй ступени общего образования, их содержание должно, прежде всего, способствовать решению главной задачи – самоопределению ученика относительно профиля обучения в старшей школе.

3.1. Постановка курса по выбору «Графы и их применение»

Каждому человеку в жизни приходится выполнять достаточно сложные расчеты, пользоваться вычислительной техникой, владеть практическими приемами геометрических измерений и построений, читать информацию, представленную в виде таблиц, диаграмм, графиков, понимать вероятностный характер случайных событий, составлять несложные алгоритмы. И, наконец, все больше специальностей, требующих высокого уровня образования, связано с применением именно прикладной математики. Таким образом, расширяется круг школьников, для которых математика становится особенно важным предметом.

Теория графов – одна из молодых областей дискретной математики. Первой монографии по теории графов немногим более сорока лет. Но ее методы теории графов завоевали признание не только математиков, но и инженеров, экономистов, психологов, химиков. Использование языка и методов теории графов часто ускоряет решение практических задач, упрощает расчеты, повышает производительность научной, конструкторской мысли. Именно запросы практики в значительной степени способствуют интенсивному развитию теории графов. Их применение помогает думать, объяснять, наглядно

представлять, поэтому их использование в различных школьных учебниках имеет естественную тенденцию к развитию.

Курс по выбору «Графы и их применение» является предметно-ориентированным. Его *цель* – познакомить учащихся с теорией графов и показать ее прикладную направленность.

Для достижения цели следует решить задачи:

- сформировать представление о графе как совокупности двух множеств, его составных элементов;
- показать применение языка теории графов к решению различных практических задач;
- сформировать познавательный интерес к изучению графов;
- создать положительную мотивационную базу для самостоятельного изучения теории графов;
- сформировать восприятие теории графов как самостоятельной дисциплины.

Учебный курс, излагающий основные положения теории графов, призван привлечь внимание школьников, интересующихся математикой. Предложенные темы курса, не изучаются школьной программой, но имеют ярко выраженную, прикладную направленность. На простых примерах учащимся показывается, как можно применять язык теории графов к решению различных практических задач.

Графы также успешно применяются в решении логических задач, помогают школьникам решать олимпиадные задачи, которые требуют максимальной избирательности при минимальных математических знаниях. Поисковые и исследовательские задания будут способствовать развитию познавательного интереса учащихся, а также расширят знания в учебных и внеучебных областях.

Наряду с использованием традиционных форм и методов обучения, в преподавании предусмотрено применение таких форм проведения занятий,

как дискуссия, обсуждение, конференция, лабораторно-графические работы. В преподавании курсов опорными являются творческие и практические задания.

3.2. Структура курса по выбору

Программа курса состоит из 12 занятий и предусмотрена для учащихся 9-х классов. Каждое занятие рассчитано на один академический час и проводится раз в неделю. В таблице 4 представлен тематический план курса.

Тематический план

Таблица 4

№ п/п	Тема занятия	Кол-во часов	Форма проведения занятия	Форма контроля
1.	Понятие графа и его элементов	1	Лекция – беседа; Решение задач	Вводный урок
2	Сведения из истории. Понятие уникарсальной фигуры	1	Лекция-беседа Решение задач	
3	Решение задач на уникарсальных фигурах	1	Решение задач	Творческие задания Индивидуальная работа по составлению собственных задач.
4	Виды графов и их определения	1	Лекция-беседа Решение задач	
5	Связность графов	1	Лекция; Решение задач	
6	Решение задач по пройденным темам	1	Решение задач	Самостоятельная работа
7	Графы-деревья Определения, виды	1	Лекция; Лабораторная работа по составлению сво-	Творческое задание; индивидуальное за-

			его генеалогического дерева	дание
8	Способы задания графов	1	Лекция; Решение задач	Индивидуаль- ные задания; Поисковые за- дания.
9	Операции на графах	1	Сообщения учащихся по теме; Беседа	Индивидуаль- ные задания
10	Урок-практикум по пройденным темам	1	Решение задач	Итоговый тест Выбор тем для конференции
11	Применение теории графов	1	Урок-конференция	Защита работ
12	Итоговый урок	1	Подведение итогов	Зачет
	Всего	12		

Тема 1. Понятие графа и его элементов

На эту тему составлен подробный конспект урока (приложение 1).

Тема 2. Сведения из истории. Понятие уникаральной фигуры

Тип урока: урок изучения нового материала.

Методы познавательной деятельности: рассказ, беседа, иллюстрации, упражнения.

Цели: *Дидактические:* – ознакомить учащихся с возникновением теории графов; – показать, что они формировались трижды и в различных дисциплинах; – познакомить школьников с понятием уникаральной фигуры; – научить решать задачи на уникаральные фигуры.

Развивающие: – развитие познавательного интереса, логического мышления, внимания; развитие умения читать готовые чертежи.

Воспитательные: – способствовать воспитанию целеустремленности, настойчивости, внимания.

Что изучается на уроке: формирование теории графов: первым открытием графов были исследования Леонарда Эйлера, связанные с решением занимательных задач, благодаря которым им были получены условия построения графа не отрывая карандаша от бумаги, позднее его называли уникар-

сальной фигурой; второму открытию графов способствовал Густав Кирхгоф, он представил их в виде электрической схемы и назвал такой граф *сигнальным*; наконец третье открытие графов произошло в области химии Артуром Кэли, который изучая строение молекул, пришел к открытию особого класса графов – *деревьям*.

Методические рекомендации: Познавательный интерес формируется с использованием исторических сведений, учитель рассказывает о том, как возникла теория графов, что ее формирование, как науки, происходило тремя путями, после чего она сформировалась как самостоятельная дисциплина, входящая в раздел дискретной математики. Приводятся исторические задачи, например, о семи мостах Кенигсберга. Учащимся предлагается попробовать решить ее самостоятельно, после чего рассказать об условиях, к которым пришел Эйлер, решая эту задачу и уже опираясь на эти знания перейти к решению. Здесь же следует дать понятие уникальной фигуры и предложить школьникам задачи на построение таких фигур. Некоторые из задач представлены в приложении 2.

Тема 3. Решение задач по пройденным темам

Тип урока: Урок совершенствования знаний, умений и навыков.

Методы познавательной деятельности: практическая работа, метод организации взаимодействия учащихся: обмен заданиями.

Цели: *Дидактические:* – способствовать применению учащимися полученных знаний на прошлых занятиях при решении задач.

Развивающие: – развитие познавательного интереса, логического мышления, творческих способностей, умения общаться в коллективе.

Воспитательные: – воспитание целеустремленности, настойчивости, внимания, ответственности за выполненное задание.

Методические рекомендации: Познавательный интерес формируется при помощи творческой работы и практических заданий. Учащимся предлагается самим придумать задачи, по пройденным темам. Учитель раздает кар-

точки с заданием, в котором написано на какую тему составить задачу, например: «Задача на построение уникальной фигуры» или «Задача с использованием понятий вершины и четность вершины». Школьникам дается определенное время на составление задач, после чего они обмениваются ими и решают.

Тема 4. Виды графов и их определения

Тип урока: урок изучения нового материала.

Методы познавательной деятельности: рассказ, беседа, иллюстрации, упражнения.

Цели: *Дидактические:* – познакомить школьников с видами графов и дать их определения; – научить применять их при решении задач.

Развивающие: – развитие познавательного интереса; – развитие логического мышления; – развитие внимания.

Воспитательные: – способствовать воспитанию целеустремленности, настойчивости, внимания.

Что изучается на уроке: понятие графа как совокупности двух множеств; понятие псевдографа; ор-графа, n-графа и смешанного графа; нуль-графа; плотного, полного, плоского и планарного графов, а также понятия мультиграфа и его скелета.

Методические рекомендации: На данном уроке познавательный интерес формируется при помощи новизны содержания и практических задач. Сначала необходимо ввести новое понятие графа – математическое. Для этого нужно изобразить граф и подписать его вершины и ребра, тем самым дать учащимся понять, что он представляет собой совокупность двух множеств, вершин и ребер. При изучении видов графов можно показывать учащимся слайды, на которых изображены графы и дать им возможность самим определить его вид. На каждый вид графа можно решить с школьниками задачи. В приложении 2, есть некоторые задачи. Учащимся дается возможность применять различные виды графов при решении задач.

Тема 5. Связность графов

Тип урока: урок изучения нового материала.

Методы познавательной деятельности: рассказ, беседа, иллюстрации, упражнения.

Цели: *Дидактические:* – познакомить учащихся с понятием связности; – показать как определять является ли граф связным; – научить как находить компоненты связности, точки сочленения и мосты в связном графе.

Развивающие: – развитие познавательного интереса, логического мышления, внимания.

Воспитательные: – способствовать воспитанию целеустремленности, настойчивости, внимания.

Что изучается на уроке: понятие связности, пути и маршрута в графе, компоненты связности, число реберной и вершинной связности, сильно- и слабо-связный граф, понятие моста и точки сочленения.

Методические рекомендации: Познавательный интерес формируется при помощи новизны содержания и практических задач. Понятие связности можно ввести, показывая графы (связные или не связные) и спросить школьников, в чем их отличия. Таким образом они сами придут к понятию связности. Учащимся предлагаются следующие типы заданий: нахождение кратчайшего пути в графе, определение связности графа, нахождение компонент связности, а также определение реберной и вершинной связности. В приложении 2, есть некоторые примеры таких задач.

Тема 6. Решение задач по пройденным темам

Тип урока: Уроки контроля и коррекции знаний, умений, навыков.

Методы познавательной деятельности: методы выработки учебных знаний и накопления опыта учебной деятельности.

Цели: *Дидактические:* – способствовать применению учащимися полученных знаний на прошлых занятиях при решении задач.

Развивающие: – развитие познавательного интереса; логического мышления; творческих способностей; умения общаться в коллективе.

Воспитательные: – воспитание целеустремленности, настойчивости, внимания, ответственности за выполненное задание.

Что изучается на уроке: истоки формирования теории графов; постулаты Эйлера; понятие уникальной фигуры.

Методические рекомендации: Познавательный интерес формируется при помощи самостоятельной работы, которая будет состоять из нескольких этапов. Сначала учащимся предлагается написать математический диктант, в котором нужно будет дать определения 5 изученным понятиям. Время на диктант ограниченное, 10 минут. Затем предлагается самостоятельная работа, состоящая из 8 заданий. Материалы для самостоятельной работы содержатся в приложении 3.

Тема 7. Графы-деревья, их определения и виды

Тип урока: урок изучения нового материала.

Методы познавательной деятельности: рассказ, беседа, иллюстрации, упражнения, а также творческое и исследовательское задание.

Цели: *Дидактические:* – познакомить учащихся с графами-деревьями, их компонентами и свойствами; – научить находить вершины максимального типа.

Развивающие: – развитие познавательного интереса, логического мышления, внимания.

Воспитательные: – способствовать воспитанию целеустремленности, настойчивости, внимания.

Что изучается на уроке: графы-деревья, понятие ориентированного дерева и его компоненты, понятие остовного дерева, леса, остовного леса, нахождение вершины максимального типа.

Методические рекомендации: Познавательный интерес формируется при помощи новизны содержания, практических задач и лабораторной рабо-

ты. Знакомство учащихся с важным классом графов, называемых деревьями, можно начать с упражнения типа: «Нарисуйте граф с семью вершинами и шестью ребрами, не имеющий ни одного цикла». Затем, нужно дать определение дерева, его компонентов, видов и понятий, связанных с ним. Рассмотреть особенности деревьев и возможности их использования при решении самых разнородных задач – таких, как нахождение вершин максимального типа, отыскание кратчайшего пути, а также использование деревьев в генетике. В качестве лабораторной работы предложить учащимся изобразить свою родословную в виде графа-дерева. Те, кто не успеет выполнить работу в классе, доделывают дома и приносят на следующий урок для оценивания.

Тема 8. Способы задания графов

Тип урока: урок изучения нового материала.

Методы познавательной деятельности: рассказ, беседа, иллюстрации, упражнения.

Цели: *Дидактические:* – показать учащимся, какие бывают способы задания графов и дать их характеристику; – познакомить учащихся с понятием матрицы; – научить применять различные способы задания графов при решении задач.

Развивающие: – развитие познавательного интереса, логического мышления, внимания.

Воспитательные: – способствовать воспитанию целеустремленности, настойчивости, внимания.

Что изучается на уроке: три способа задания графов: матрица смежности, матрица инцидентности, список ребер.

Методические рекомендации: Познавательный интерес формируется при помощи новизны содержания и практических задач. Прежде, чем начать знакомить учащихся со способами задания графов необходимо ввести понятие матрицы, для девятиклассников достаточным будет такое определение: *Матрица – таблица, состоящая из n -строк и n -столбцов.* После этого сле-

дует начать разговор, что граф можно задавать не только графическим способом, но и матричным и сказать об этих трех способах. Далее следует рассмотреть каждый из трех способов на отдельном примере. После чего предложить учащимся самостоятельно задать каждым из трех способов уже другой граф (пример задачи в приложении 2).

На следующее занятие учащимся предлагается выступить с докладами на общую тему «Операции на графах». Каждому школьнику (или паре школьников, в зависимости от количества слушающих курс) дается одна из 6 операций, он должен не только рассказать об этой операции, но и составить собственную задачу, которую остальные должны решить.

Тема 9. Операции на графах

Тип урока: семинар.

Методы познавательной деятельности: методы организации взаимодействия учащихся и накопление социального опыта, работа с книгой.

Цели: *Дидактические:* – научить учащихся самостоятельно добывать знания.

Развивающие: – развитие познавательного интереса, логического мышления, внимания; взаимодействия с коллективом; развитие навыков грамотной речи.

Воспитательные: – способствовать воспитанию целеустремленности, настойчивости, внимания, самостоятельности.

Что изучается на уроке: учащиеся самостоятельно изучают различные виды операций на графах, а именно объединение графов, пересечение графов, кольцевая сумма, удаление вершины, удаление ребра, замыкание или отождествление.

Методические рекомендации: Познавательный интерес формируется при помощи новизны содержания, практических задач, творческой и исследовательской работы учащихся. Этот урок учащимся предлагается провести самостоятельно, у каждого было задание подготовить доклад на общую тему

«Операции на графах». Здесь школьники выступают в качестве учителей (консультантов), они рассказывают про выбранную ими операцию, объясняют ее суть и предлагают задание по своей тематике. Таким образом, они лучше усвоят данный материал, если разберутся в нем сами. На семинаре учащиеся выступают с небольшими сообщениями, вокруг которых разворачивается дискуссия. Готовясь к семинару, учащиеся учатся работать с литературой, планировать свое выступление, лаконично выражать свои мысли. Работая на семинарском занятии, учащиеся приобретают умение выступать с сообщением, отвечать на вопросы, участвовать в дискуссии, критично, но доброжелательно относиться к выступлениям своих товарищей и самокритично к собственной деятельности. Целесообразно, чтобы учащиеся сопровождали свои выступления средствами наглядности.

Темы докладов: «Объединение графов», «Пересечение графов», «Кольцевая сумма», «Удаление вершин», «Удаление ребра», «Замыкание или отождествление».

Тема 10. Урок-практикум по пройденным темам

Тип урока: урок обобщения и систематизации знаний.

Цели: *Дидактические:* – способствовать применению учащимися полученных знаний на прошлых занятиях при решении тестовых задач.

Развивающие: – развитие познавательного интереса, логического мышления, внимания; взаимодействия с коллективом; развитие навыков грамотной речи.

Воспитательные: – способствовать воспитанию целеустремленности, настойчивости, внимания, самостоятельности.

Методические рекомендации: Познавательный интерес формируется при помощи практических задач и упражнений. Это занятие посвящено обобщению знаний по пройденному курсу. Учащимся предлагается решить итоговый тест, состоящий из 20 заданий закрытого и открытого типов. Материалы для проведения теста можно посмотреть в приложении 3.

На дом учащимся учитель дает задание подготовить выступление на тему: «Применение теории графов в различных областях науки и техники». Школьники могут поделиться на группы (не более трех человек) и выбрать одну из предложенных тем, которые можно посмотреть в приложении 3. Причем, выступать школьники должны с сопровождением мультимедиа технологий (презентации)

Тема 11. Применение теории графов в различных областях науки и техники

Тип урока: семинар

Методы познавательной деятельности: методы организации взаимодействия учащихся и накопление социального опыта, работа с книгой.

Цели: *Дидактические:* – научить учащихся самостоятельно добывать знания; – ознакомление учащихся с применением теории графов в различных областях науки и техники.

Развивающие: – развитие познавательного интереса, логического мышления, внимания; взаимодействия с коллективом; развитие навыков грамотной речи.

Воспитательные: – способствовать воспитанию целеустремленности, настойчивости, внимания, самостоятельности.

Методические рекомендации: Познавательный интерес формируется при помощи новизны содержания, практических задач, творческой и исследовательской работы учащихся. Работа исследовательских и поисковых групп освещает вопросы использования графов в математической экономике, физике и электротехнике, биологии, химии, генетике и т.д. Занятие проводится в виде пресс-конференции или круглого стола. Организуется стендовая защита поисковых и исследовательских работ.

Тема 12. Итоговый урок

На занятии подводятся итоги изучения курса. Итоговая оценка имеет зачетно-рейтинговую форму и выставляется при следующих условиях:

- учащиеся посещали все занятия;
- выполнили лабораторную работу;
- выступали с докладами;
- выполнили успешно все самостоятельные работы;
- написали итоговый тест.

Можно попросить учащихся провести рефлекссию, чтобы они высказали свое мнение о курсе. Был ли он полезен для них, что нового они узнали, достоинства и недостатки и т.д.

В результате изучения этого курса у учащихся будут сформированы представления о возможности описания с помощью графов различных ситуаций, а также решения различных задач путем сведения их к графовым. Ознакомившись с основными понятиями теории графов, со способами сведения некоторых текстовых задач к ним, а также их решению у школьников повысится интерес к теории графов.

На этом завершается практическая часть работы. Эта глава была посвящена разработке курса по выбору «Графы и их применение». К нему представлены следующие данные: пояснительная записка, в которой указаны актуальность, цели и задачи курса, на какой класс он рассчитан, а также тематическое планирование. Каждое занятие тезисно описано во втором параграфе, к некоторым из них в указанных приложениях можно посмотреть дополнительную информацию, такую как: конспект урока и внеклассного мероприятия, задачи на применение теории графов, материалы самостоятельных работ и темы докладов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выпускная квалификационная работа является исследовательской и носит практический характер. В результате исследования нами были решены следующие задачи:

- проанализирована литература по выбранному направлению;
- собраны сведения об основных понятиях теории графов;
- выяснены психолого-педагогические основы развития познавательного интереса и условия его формирования в процессе обучения математике;
- разработан курс по выбору «Графы и их применение»;
- раскрыта специфика данного курса в предпрофильной подготовке школьников.

Так как все они решены, то цель исследования достигнута.

При написании работы мы получили продукт в виде готового курса по выбору «Графы и их применение», нацеленный на формирование познавательного интереса школьников. Курс был основан на теории, заключенной в первых двух главах. Несколько занятий было апробировано с учащимися школы МАОУ «СОШ № 109», конспект одного из уроков представлен в работе.

Основные результаты работы доложены на студенческих конференциях, в рамках весенних и осенних научных сессий математического факультета ПГГПУ. Материалы исследования представлены в публикации: Локтева Н.Ю. Специфика изучения теории графов в математическом образовании школьников // Вопросы математики, ее истории и методы преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. межрегион. Науч.-практ. Конф. Студентов матем. фак-тов / ред. кол.: Ю.В. Корзнякова, И.В. Косолапова. Пермь гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2016 – Вып. 9. – С. 41-42.

В дальнейшем планируется работа с полученным результатом в общеобразовательном учреждении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беляев М.Ф.* Психология интереса / М.Ф. Беляев. – М. : Просвещение, 1977. – 583 с.
2. *Березина Л.Ю.* Графы и их применение: Пособие для учителей / Л.Ю. Березина. – М. : Просвещение, 1979. – 143 с.
3. *Емеличев В.А.* Лекции по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. – М. : Наука, 1990. – 384 с.
4. *Епишева О.Б.* Технология обучения математике на основе деятельностного подхода: кн. для учителя / О. Б. Епишева. – М. : Просвещение, 2003. – 224 с.
5. *Зимняя И.А.* Педагогическая психология / И.А. Зимняя. – М. : МПСИ, 2010. – 448 с.
6. *Зыков А.А.* Основы теории графов / А.А Зыков. – М. : Изд-во «Вузовская книга», 2004 – 664 с.
7. *Кикнадзе Д.А.* Потребности, поведение, воспитание / Д.А. Кикнадзе – М. : Мысль, 1968. – 147 с.
8. *Колягин Ю.М.* Задачи в обучении математике / Ю.М. Колягин – Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. – М. : Просвещение, 1977. – 112 с.
9. *Крутецкий В.А.* Основы педагогической психологии / В.А. Крутецкий. – М. : Просвещение, 1972 – 253 с.
10. *Крутецкий В.А.* Психология математических способностей школьников / В. А. Крутецкий. – М. : Воронеж, 1998. – 210 с.
11. *Леонтьев А.Н.* Деятельность. Сознание. Личность / А.Н. Леонтьев – М. : Политиздат, 1975. – 305 с.
12. *Максимова В.Н.* Межпредметные связи и совершенствования процесса обучения / В.Н. Максимова. – М. : Просвещение, 1984. – 335 с.

13. *Морозова Н.Г.* Воспитание познавательных интересов у детей в семье / Н.Г. Морозова. – М. : АПН, 1961. – 249 с.
14. *Оре О.* Графы и их применение / О. Оре. – М. : Мир, 1965. – 176 с.
15. *Оре О.* Теория графов / О. Оре. – М. : Наука, 1980. – 326 с.
16. *Рубинштейн С.Л.* Основы общей психологии / С.Л. Рубинштейн. – СПб. : Питер, 2001. – 712 с.
17. *Стефанова Л.Н.* Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / Подходова Н.С., Орлов В.В., Радченко В.П. и др.; под научн. ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – М. : Дрофа, 2005. – 416 с.
18. *Талызина Н.Ф.* Педагогическая психология / Н.Ф. Талызина. – М. : Академия, 2011. – 288 с.
19. *Талызина Н.Ф.* Формирование познавательной деятельности учащихся / Н.Ф. Талызина – М. : Знание, 1983. – 96 с.
20. *Харари Ф.* Перечисление графов / Ф. Харари, Э. Палмер. – М. : Мир, 1977. – 321 с.
21. *Харари Ф.* Теория графов / Ф. Харари. – М. : Мир, 1973. – 296 с.
22. *Щукина Г.И.* Роль деятельности в учебном процессе / Г.И Щукина. – М. : Просвещение, 1986. – 144 с.
23. *Щукина Г.И.* Формирование познавательных интересов учащихся в процессе обучения / Г.И Щукина. – М. : Учпедгиз, 1962. – 230 с.
24. Общая психология: учеб. для студентов пед. ин-тов. / А.В Петровский, А.В. Брушлинский, В.П. Зинченко и др.; под ред. А.В. Петровского. – 3-е изд. – М. : Просвещение, 1986. – 464 с.
25. Математический энциклопедический словарь; под ред. Ю.В. Прохорова. – М. : Большая Российская энциклопедия, 2003 – 845 с.
26. *Григорьева Д.В.* Внеурочная деятельность школьников / Д.В. Григорьева, П.В. Степанова [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://standart.edu.ru/> (дата обращения 09.03.16).

27. Федеральный государственный стандарт – ФГОС [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://standart.edu.ru> (дата обращения 23.05.16)

28. Годунова Е.К. *Введение в теорию графов*. Индивидуальные задания [Электронный ресурс] / Годунова Е.К.— Электрон. текстовые данные.— М. : Прометей, 2012. – 44 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/23979>. – ЭБС «IPRbooks», по паролю.

29. Актуальные вопросы теории и методики обучения математике в средней школе. Выпуск 1 [Электронный ресурс] : сборник научных статей / Е.Н. Жаркова [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – Киров : Вятский государственный гуманитарный университет, 2011. – 125 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/5893>. – ЭБС «IPRbooks», по паролю.

30. Избранные вопросы методики преподавания математики [Электронный ресурс] : сборник научно-методических статей / В. Азаров [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – М. : Московский городской педагогический университет, 2013. – 76 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/26482>. – ЭБС «IPRbooks», по паролю.

31. Проблемы теории и практики обучения математике [Электронный ресурс] : сборник научных работ, представленных на Международную научную конференцию «66 Герценовские чтения» / Н.В. Андрафанова [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб. : Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, 2013. – 379 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20779>. – ЭБС «IPRbooks», по паролю.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Конспект урока по теме «Понятие графа и его элементов»

(Тема 1)

Класс: 9

Тема: «Понятие графа и его элементов»

Тип урока: Комбинированный урок

Цель: Познакомить учащихся с графами и их элементами

Цели урока:

Дидактические:

- актуализировать знания учащихся о теории графов;
- познакомить с понятием степень вершины и четность вершины;
- научить применять графы и их элементы при решении логических задач.

Развивающая:

- развитие логического мышления;
- развитие познавательных интересов;

Воспитательные:

- способствовать воспитанию целеустремленности, настойчивости.

Средства обучения: тетради, презентация, проектор, доска, мел.

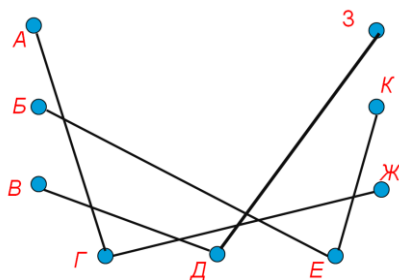
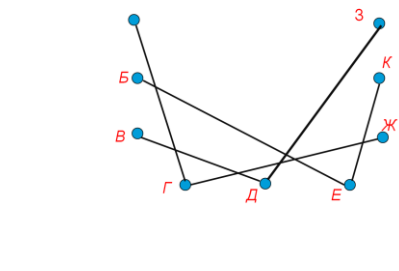
Этапы урока:

1. Организационный момент (1 мин)
2. Актуализация знаний (10 мин)
3. Мотивация и формулировка темы урока (5 мин)
4. Изучение нового материала (10 мин)
5. Закрепление нового материала (10 мин)
6. Подведение итогов (4 мин)

Таблица 5

№	Этап урока	Деятельность учителя	Деятельность ученика	Записи на доске
1	Организационный момент	– Здравствуйте, ребята, садитесь! Открываем тетради записываем сегодняшнее число. Оставляем место под тему нашего урока.		
2	Актуализация знаний	Решите задачу : У трёх подружек - Ксюши, Насти и Оли - новогодние карнавальные костюмы белого, фиолетового и синего цветов, и шапочки тех же цветов. У Насти цвет костюма и шапочки совпали, у Ксюши ни костюм, ни шапочка не были фиолетового цвета, а Оля была в белой шапочке, но цвет костюма у неё не был белым. Как были одеты девочки? 1) Будем изображать множество подружек, шапочек и костюмов прямоугольниками, а элементы множеств – точками, помещёнными в эти прямоугольники. Линиями будем обозначать соответствующие каждой девочке костюм и шапочку 2) Что мы можем точно сказать об одной из девочек и отметить это на схеме? 3) Если Оля в белой шапочке, можно ли узнать в каких шапочках остальные две девочки? 4) Что мы можем сказать о костюмах этих девочек? Внимательно прочитайте условие, может у кого-то из девочек совпадают цвет костюма и шапочки. 5) Хорошо, а что нам сказано об Оле?	Поэтапно решают задачу: 1) Перерисовывают схему к себе в тетрадь. Обозначают на ней все элементы, имеющиеся в задаче. 2) Что Оля была в белой шапочке 3) Да, по условию Ксюша не в фиолетовой шапочке, а Оля, как выяснилось, в белой, значит Ксюша в синей шапочке, а Настя в фиолетовой. 4) В условии сказано, что цвет костюма Насти совпадает с цветом ее шапочки, значит у Насти фиолетовый костюм. 5) У Оли цвет костюма отличается от белого. Так как выяснилось, что у Насти фиолетовый костюм, значит у Оли костюм синего цвета. Тогда у Ксюши костюм белого цвета.	Решение: Будем изображать множество подружек, шапочек и костюмов прямоугольниками, а элементы множеств – точками, помещёнными в эти прямоугольники. Линиями будем обозначать соответствующие каждой девочке костюм и шапочку Решения: Б) 1. Костюм и шапочка Насти одного цвета. 2. Костюм и шапочка Ксюши не фиолетового цвета. 3. Оля в белой шапочке. 4. Костюм у Оли не белый, соответствующие каждой девочке костюм и шапочку

		Замечательно! Мы решили с вами задачу! Итак, у нас получилась некая фигура, сейчас я вынесу ее на отдельный слайд.		Ксюша не в фиолетовой шапочке и не в белой, значит, в синей, а у Насти – фиолетовая шапочка. лов ми, ать соответствующие каждой девочке костюм и шапочку Бел. Фиол. Син. костюмы Бел. Фиол. Син. шапочки Ксюша Оля Настя Ксюша не в фиолетовой шапочке и не в белой, значит, в синей, а у Насти – фиолетовая шапочка. У Насти цвета шапочки и костюма совпадают по условию, а у Оли – не совпадают. соответствующие каждой девочке костюм и шапочку Бел. Фиол. Син. костюмы Бел. Фиол. Син. шапочки Ксюша Оля Настя
3	Мотивация и формулировка темы урока	-Что вы можете сказать об этой фигуре? Как ее можно назвать? -Могу дать вам небольшую подсказку. В информатике вам уже довелось познакомиться с этим понятием. -Давайте вспомним, что мы обозначали точками, вершинами этой фигуры? -А что мы обозначали линиями? Так чем может быть эта фигура, в которой каждая линия указывает на некую связь между точками? Итак, на слайде изображен граф. И тема нашего сегодняшнего занятия «Понятие графа и его элементов»	Говорят свои догадки. -Элементы множеств костюмов, шапочек и девочек. -Соответствие между одеждой и девочкой. -пытаются ответить: возможно, кто-то скажет, что эта фигура граф	Занятие №1 Понятие графа и его элементов.

4	Изучение нового материала	Еще раз дам определение графа. -Граф – это геометрическая фигура, которая состоит из точек (вершин) и линий (ребер), соединяющих эти точки (вершины). Линия (ребро) указывает на связь между двумя точками (вершинами). <u>Небольшая лекция о графах:</u> Применение и значение теории графов: -Графы являются существенным элементом математических моделей. Они помогают наглядно представить взаимоотношение между объектами или событиями в сложных системах. Легко найти примеры применения графов в самых разных областях науки и техники. Сеть дорог, трубопровод, электрическая цепь, формула химического соединения, блок-схема, генеалогическое дерево и др. С помощью графов решение математических задач упрощается. Представление данных в виде графа придает им наглядность и простоту. Графы удобно использовать для решения логических задач. -Теперь вернемся к графу. Обозначим все его вершины буквами. Хочу обратить ваше внимание, что вершины графа можно обозначать как русскими, так и латинскими буквами. Если вы решаете задачу на графы, где используются имена, названия городов, различные предметы, то вам будет проще решить задачу подписав вершины первой буквой этого слова.	Слушают небольшую лекцию, при необходимости записывают Считают степени и называют их на слайде высвечиваются названные вершины А-1, Б-1, В-1, Г-2, Е-2, К-1, З-1	Применение теории графов   9 вершин 6 ребер Степенью вершины называется число ребер принадлежащих этой вершине <table><tr><td>А=1</td><td>Е=2</td></tr><tr><td>Б=1</td><td>Ж=1</td></tr><tr><td>В=1</td><td>К=1</td></tr><tr><td>Г=2</td><td>З=1</td></tr></table>  Четные вершины: Г, Д, Е Нечетные вершины: А, Б, В, Ж, К, З Четная вершина – степень вершины является четным числом Нечетная вершина – степень вершины является нечетным числом	А=1	Е=2	Б=1	Ж=1	В=1	К=1	Г=2	З=1
А=1	Е=2											
Б=1	Ж=1											
В=1	К=1											
Г=2	З=1											

		1) Посчитайте сколько вершин у этого графа 2) Сколько ребер он имеет? 3) Посмотрим на вершину Д, сколько ребер принадлежат этой вершине? Число ребер, принадлежащее вершине, называется ее степенью. Теперь посчитайте степени остальных вершин и назовите их? 4) Также вершина может быть четной, то есть когда ей принадлежит четное количество ребер или нечетной – когда количество принадлежащих ей ребер нечетно. Скажите какие вершины будут четные, а какие нечетные?	1) 9 вершин 2) 6 ребер 3) 2 Отвечают, на слайде высвечиваются названные вершины	
5	Закрепление нового материала	Решение задачи, представленной на слайде	- решают задачу, несколько учеников выходят к доске. Один рисует условие в виде графа, другой пишет чему равны степени ее вершин, третий выписывает какие вершины четные, а какие нечетные.	Решите задачу с помощью графа Три учительницы - Ирина Васильевна, Дарья Михайловна и Софья Петровна - преподают химию, биологию и физику в школах Ярославля, Владимира и Краснодара. Известно, что: - И.В. работает не в Ярославле, а Д.М. - не во Владимире; - та, которая живет в Ярославле, преподает не физику; - работающая во Владимире – учитель химии; - Д.М. преподает не биологию. Кто в каком городе живет и какой предмет преподает? Найдите все степени вершин графа и определите их четность. Ответ 9 вершин 6 ребер $A = 1 \quad D = 2 \quad З = 1$ $B = 2 \quad E = 1$ $В = 2 \quad Ж = 1$ $Г = 1 \quad К = 1$ Четные вершины: Б, В, Д Нечетные вершины: А, Г, Е, Ж, К, З

6	Подведение итогов	На этом уроке мы с вами: • Вспомнили, что такое граф, еще раз дали его определение; • Познакомились с элементами графа: степень вершины, четность вершины; • Научились применять графы при решении логических задач. Поразмышляйте над вопросами: (вопросы на слайде)	-(Отвечают на вопросы)	Поразмышляйте над следующими вопросами: 1. Что такое граф? 2. Что называется степенью вершины? 3. Дан граф в виде треугольника. Сколько нечетных вершин в нем содержится? А четных? 4. Сколько ребер имеет следующий граф? 
---	-------------------	---	------------------------	--

Решение задач на графах

Тема 2. Сведения из истории. Понятие уникурсальной фигуры

Задача 1. *Можно ли нарисовать изображенный граф (рис. 39) не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз?*

Решение. Если рисовать граф так, как сказано в условии, то в каждую вершину, кроме начальной, можно войти столько же раз, сколько выйти из нее. То есть все вершины графа, кроме двух, должны быть четными. В этом же графе имеется три нечетные вершины, поэтому его нельзя нарисовать указанным способом.

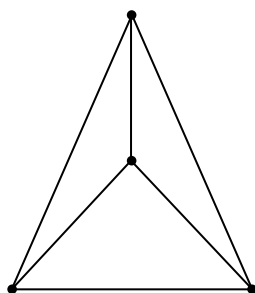


Рис. 39

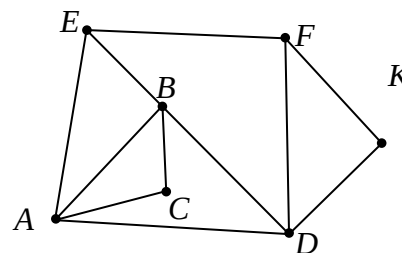


Рис. 40

Задача 2. *На озере находится семь островов, которые соединены между собой мостами (рис. 40). На какой остров должен доставить путешественников катер, чтобы они могли пройти по каждому мосту только один раз? Почему нельзя доставить путешественников на остров A?*

Решение. 1) Поскольку эта задача сводится к построению уникурсальной фигур, то при ее решении воспользуемся выводами Эйлера. В результате получим следующий ответ: катер должен доставить путешественников на остров E или F, чтобы они смогли пройти по каждому мосту один раз.

2) Из третьего правила Эйлера следует невозможность требуемого обхода если он начнется с острова A, так как граф с двумя нечетными вершинами можно начертить одним росчерком, начиная движение с одной из них и заканчивая в другой нечетной вершине.

Тема 4. Виды графов и их определения

Задача 1. На участке растут 8 деревьев: яблоня, тополь, береза, рябина, дуб, клен, лиственница и сосна. Рябина выше лиственницы, яблоня выше клена, дуб ниже березы, но выше сосны, сосна выше рябины, береза ниже тополя, а лиственница выше яблони. Расположите деревья от самого низкого к самому высокому.

Решение: Вершины графа – это деревья, обозначенный первой буквой названия дерева. В данной задаче два отношения: «быть ниже» и «быть выше». Рассмотрим первое отношение и проведем стрелки от более низкого дерева к более высокому. Если в задаче сказано, что рябина выше лиственницы, то стрелку ставим от лиственницы к рябине и т.д. Получаем ор-граф (рис. 41), на котором видно, что самое низкое дерево – клен, затем идут яблоня, лиственница, рябина, сосна, дуб, береза и тополь.

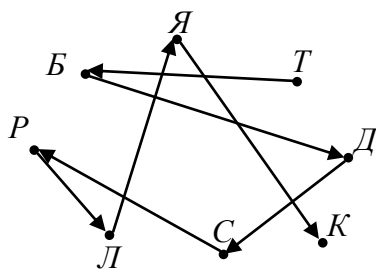


Рис. 41

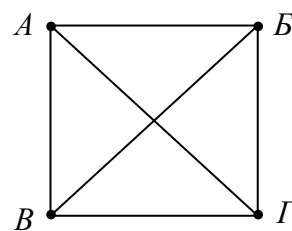


Рис. 42

Задача 2. Андрей, Борис, Виктор и Георгий играли в шахматы. Каждый из них сыграл с другим по одной партии. Сколько партий было сыграно?

Решение. Решим задачу с помощью полного графа с четырьмя вершинами A, B, B, Г (рис. 42), обозначенными по первым буквам имен каждого из мальчиков. В полном графе проводятся всевозможные ребра. В данном случае отрезки-ребра обозначают сыгранные шахматные партии. Из рисунка видно, что граф имеет 6 ребер, значит, и партий было сыграно.

Тема 5. Связность графов

Задача 1. Сколько компонент связности имеет граф, изображенный на рисунке 43.

Решение. Если в графе удалить ребра AF , CD , GH , то получится три не пересекающихся подграфа. Таким образом, этот граф имеет три компоненты связности.

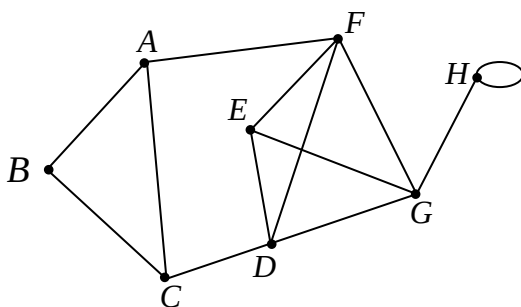


Рис. 43

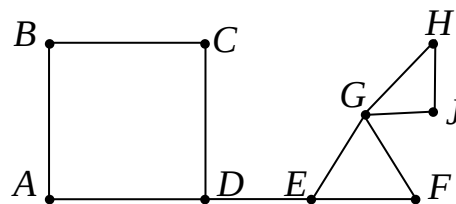


Рис. 44

Задача 2. На рисунке 44 изображен граф, укажите, сколько точек сочленения и мостов он имеет.

Решение. Точки сочленения: D , E , G – три точки сочленения.

Мост: ребро между D и E – один мост.

Задача 3. Определите, является ли граф (рис. 45) связным и если да, найдите число его вершинной и реберной связности.

Решение. 1) Граф будет связным, так как из любой его вершины можно попасть в другую.

2) Если удалить вершину D , то граф перестает быть связным. Поэтому число его вершинной связности равно 1.

3) Если в графе удалить не менее трех ребер между вершинами D и E , D и F , D и G , то этот граф распадается на две компоненты связности. Поэтому число его реберной связности равно 3.

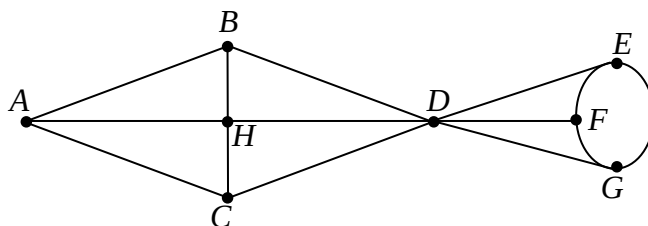


Рис. 45

Тема 8. Способы задания графов

Задача 1. На рисунке 46 задан граф, составить для него матрицы инцидентности и смежности, а также список ребер.

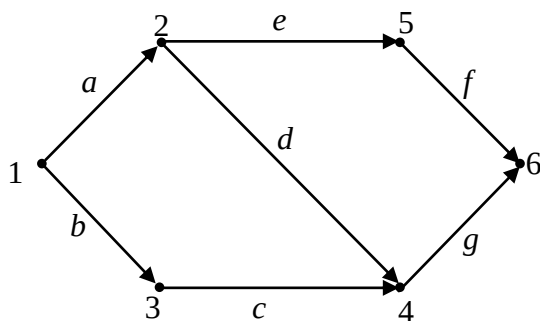


Рис. 46

Решение.

Таблица 6

Матрица инцидентности

G_1	a	b	c	d	e	f	g
1	-1	-1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	-1	-1	0	0
3	0	1	-1	0	0	0	0
4	0	0	1	1	0	0	-1
5	0	0	0	0	1	-1	0
6	0	0	0	0	0	1	1

Таблица 7

Список ребер

ребро	вершины
a	1, 2
b	1, 3
c	3, 4
d	2, 4
e	2, 5
f	5, 6
g	4, 6

Таблица 8

Матрица смежности

G_1	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	1	1	0
3	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	1
6		0	0	0	0	0

Самостоятельная деятельность учащихся

Тема 6. Решение задач по пройденным темам

Материалы для проведения самостоятельной работы:

I. Математический диктант:

Дайте определения следующим понятиям: полный граф, мультиграф, число вершинной связности, связный граф.

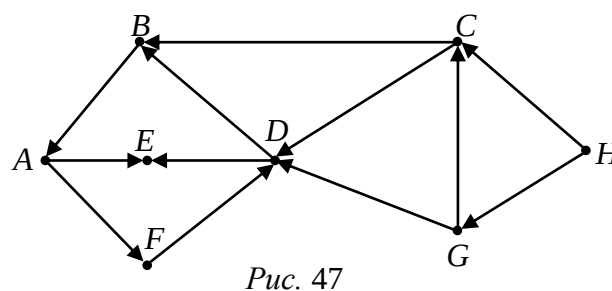
II. Задания для самостоятельной работы:

1. Пятеро ученых, участвовавших в научной конференции, обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий между ними.

Ответ: 10 рукопожатий

2. Найти все пути из $H \rightarrow E$ в ор-графе, изображенном на рисунке 47. В ответе укажите самый короткий путь.

Ответ: $H \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow E$



3. Нарисуйте полный граф с вершинами: а) $n = 2$, б) $n = 4$, в) $n = 5$

Ответ:

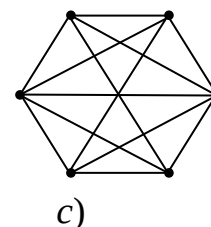
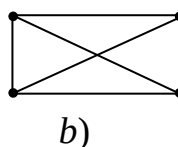
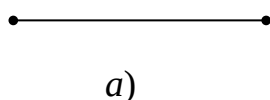


Рис. 48

4. На рисунке 49 изображен мультиграф. Определите, чему равно его мультичисло и изобразите его скелет

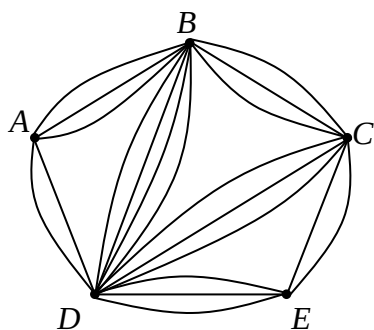


Рис. 49

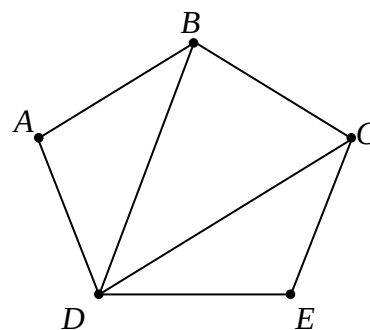


Рис. 50

Ответ: Наибольшее число кратных ребер в графе, изображенном на рисунке 49 равно четырем, следовательно, мультичисло равно 4. На рисунке 50 изображен скелет мультиграфа.

5. Определите является ли связным граф, изображенный на рисунке 51. Если нет, то, что можно сделать, чтобы он стал связным.

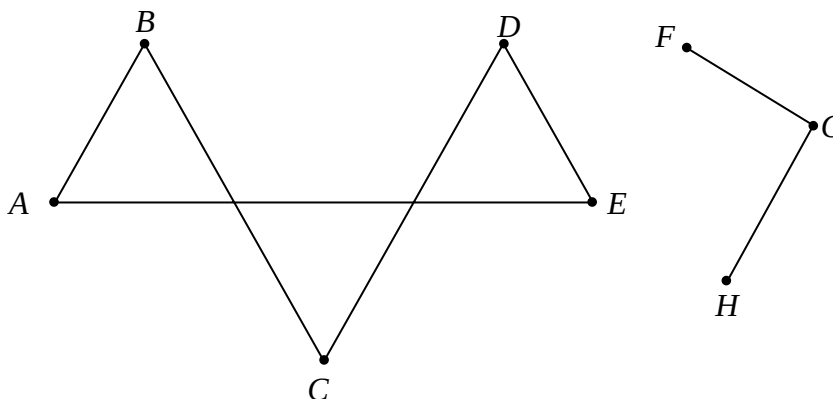


Рис. 51

Решение: Граф не является связным, так из вершин A, B, C и D нельзя попасть в вершины F, G, H . Чтобы граф стал связным, достаточно провести ребро между одними из этих вершин.

6. Возможно ли разбить граф (рис. 52) на компоненты связности, если да, то сколько их получится. Есть ли у графа мосты и точки сочленения, назовите их.

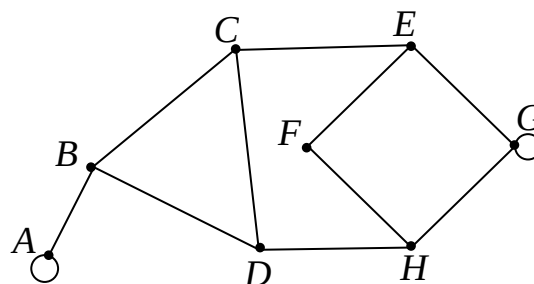


Рис. 52

Решение: Граф можно разбить на три компоненты связности, как показано на рисунке 53.

У этого графа есть мост и точка сочленения.

AB – мост

вершина G – точка сочленения

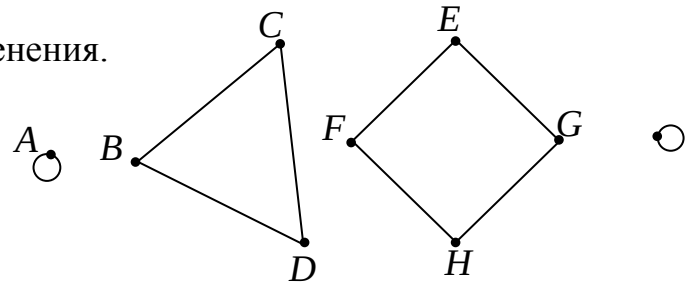


Рис. 53

7. Докажите, что если каждый из пяти человек переписывается только с двумя другими, то не найдется трех человек, которые переписываются между собой.

Решение: Изобразим граф (рис 54), который будет являться доказательством.

На рисунке видно, что каждый из пяти переписывается с двумя другими и три человека не переписываются между собой.

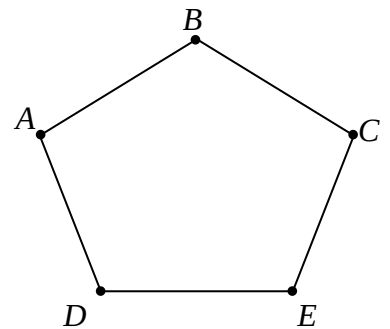


Рис. 54

8. В связном графе степени всех вершин четны. Докажите, что на ребрах этого графа можно расставить стрелки так, чтобы выполнялись следующие условия: *a)* двигаясь по стрелке, можно добраться от одной вершины до любой другой; *b)* для каждой вершины число входящих и исходящих ребер равно.

У этой задачи нет единственного решения, каждый учащийся может нарисовать свой граф, какой захочет.

Тема 10. Урок-практикум по пройденным темам

Материалы для проведения итогового теста:

1. Кто является основоположником теории графов?

- 1) Г. Кирхгоф 2) Л. Эйлер 3) А. Кэли

2. На рисунке 55 изображен граф, чему равна степень вершины A?

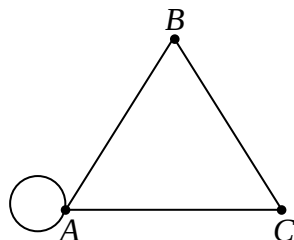


Рис. 55

- 1) двум 2) трем 3) четырем

3. Сколько нечетных степеней имеет граф, изображенный на рисунке 55?

- 1) одну 2) три 3) ни одной

4. Граф, состоящий из одной вершины, называется

- 1) тривиальный 2) нуль-граф 3) такого графа не существует

5. Какая фигура называется уникурсальной?

- 1) фигура, у которой все стороны равны;
2) фигура, состоящая из трех вершин и попарно соединяющих их ребер;
3) фигура, которую можно обойти, не проходя более одного раза по ее стороне.

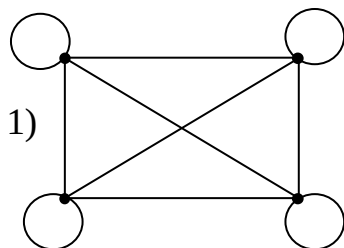
6. Граф, у которого любые две вершины соединены кратными ребрами, называется

- 1) мультиграф 2) плоский граф 3) планарный граф

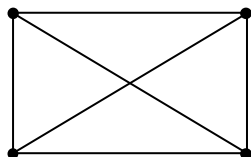
7. Какие графы называются смешанными?

- 1) графы, имеющие петли;
2) графы, имеющие ориентированные ребра;
3) графы, имеющие ориентированные и неориентированные ребра.

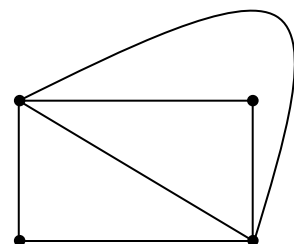
8. Из изображенных ниже графов выберите какой из них плоский.



2)



3)



9. Мультичисло графа (рис. 56) равно:

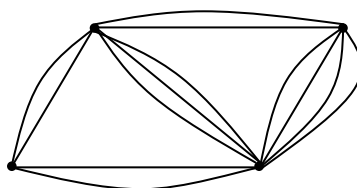


Рис. 56

1) трем

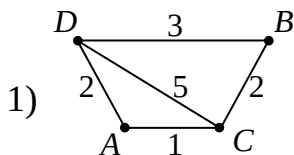
2) четырем

3) пяти

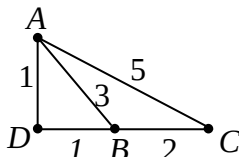
10. В таблице 8 приведена стоимость перевозки пассажиров соседними населенными пунктами. Укажите граф, соответствующий таблице.

Таблица 9

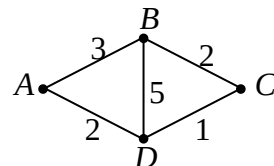
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>A</i>			1	2
<i>B</i>			2	3
<i>C</i>	1	2	0	5
<i>D</i>	2	3	5	



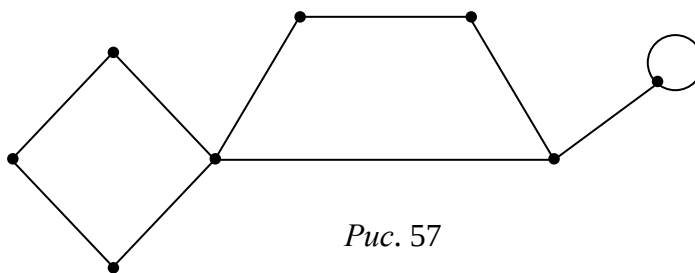
2)



3)



11. На рисунке 57 изображен граф. На сколько компонент связности его можно разбить



1) две

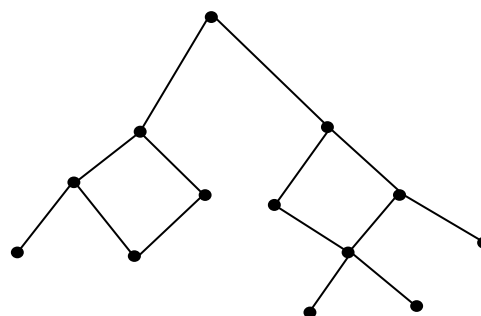
2) ни одной

3) три

12. Сколько мостов и точек сочленения имеет граф, изображенный на рисунке 56.

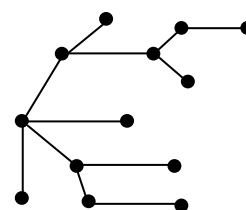
Ответ: _____

13. Является ли граф (рис. 58) деревом?



Ответ: _____

14. На рисунке 59 изображен граф-дерево, сколько висячих вершин он имеет?



Ответ: _____

15. Сколько вершин максимального типа содержит граф из предыдущего задания (рис. 58)? Определите тип.

Ответ: _____

16. Какой операции на графах не существует?

1) удаление вершины

2) кольцевая разность

3) удаление ребра

17. Граф G задан матрицей инцидентности (табл. 9). Определите, является ли он связным.

Таблица 10

G	a	b	c	d	e
1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0
4	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	1

Ответ: _____

18. Даны два графа G_1 и G_2 (рис. 60). Соотнесите название операции между ними и рисунок, изображающий эту операцию.

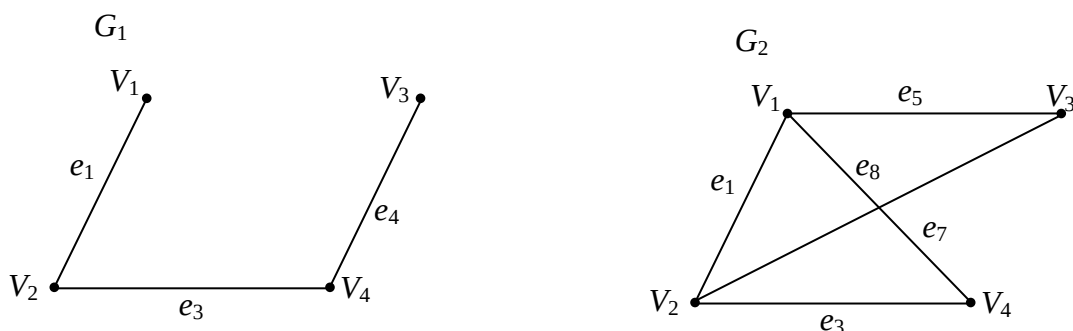


Рис. 60

1) Пересечение	a)
2) Объединение	b)
3) Кольцевая сумма	c)

Ответ: _____

19. Задайте граф, изображенный на рисунке 61 тремя способами (матрицей смежности, инцидентности, списком ребер).

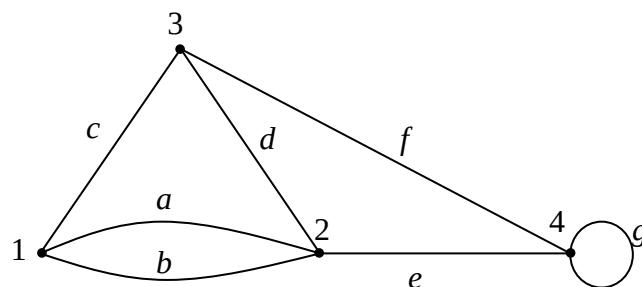


Рис. 61

Ответ:

20. Решите задачу, используя теорию графов. На карте выбраны пять городов. Среди них из любых трех найдется два, соединенные авиалиниями и два не соединенные. Докажите:

- 1) Каждый город соединен авиалиниями непосредственно только с двумя другими;
- 2) Вылетев из любого города, можно облететь остальные, побывав в каждом по разу и вернуться назад.

Ответ:

Ответы к итоговому тесту:

1) 2

2) 3

3) 3

4) 1

5) 3

6) 1

7) 3

8) 3

9) 2

10) 1

11) 3

12) 1 мост, 1 точка сочленения

13) не является

14) 7

15) две вершины максимального (4-го) типа

16) 2

17) является связным

18) 1– b ; 2– a ; 3– c

19) Матрица инцидентности (табл. 10), смежности (табл. 11), список ребер (табл. 12)

20) В качестве доказательства изобразим граф (рис.62), на котором наглядно видно два условия которые нужно доказать. Вершинами обозначим города, а ребрами авиалинии.

1) На графе видно, что каждый город соединен авиалиниями только с двумя другими.

2) В графе все вершины четные, а значит, он является уникурсальной фигурой. Следовательно, можно вылететь из одного города и побывать в каждом по разу и вернуться назад.

Таблица 11

	a	b	c	d	e	f	g
1	1	1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	1	1	0	0
3	0	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	0	1	1	1

Таблица 12

	1	2	3	4
1	0	2	1	0
2	2	0	1	1
3	1	1	0	1
4	0	1	1	1

Таблица 13

ребро	a	b	c	d	e	f	g
вершины	1, 2	1, 2	1, 3	3, 2	2, 4	3, 4	4, 4

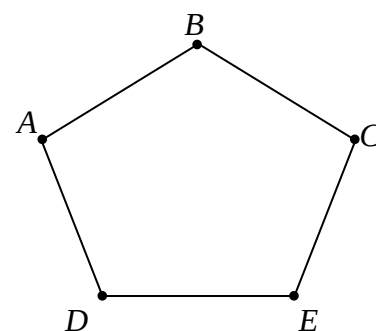


Рис. 62

Тема 11. Применение теории графов в различных областях науки и техники

В качестве поисковых и исследовательских заданий, тем для рефератов и докладов учащимся могут быть предложены следующие примерные темы:

1. Графы в головоломках
2. Графы и игры на шахматной доске
3. Использование графов в школьных учебниках
4. Графы в решении логических задач
5. Графы в химии
6. Графы в генетике
7. Графы в экономике
8. Графы и транспортные сети
9. Графы в электротехнике
10. Графы в психологии
11. Графы в физике