МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра высшей математики

Выпускная квалификационная работа

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ В ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ УЧАЩИХСЯ

Работу выполнила:
студентка 151 группы
направления подготовки 44.03.05
«Педагогическое образование»
(с двумя профилями подготовки),
профили «Математика и Информатика»,
Васильева Вероника Александровна

____
подпись

«Допущена к защите в ГЭК»
Зав. кафедрой

____
подпись

«____» __________ 2018 г.

Руководитель:
ст.преп. кафедры высшей математики
Недре Лариса Георгиевна

____
подпись

ПЕРМЬ
2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Задачи с параметрами относятся к существенной и важной части содержания современного математического образования. Они играют большую роль в формировании и развитии у учащихся логического мышления, а также математической культуры. Умение решать данные задания считается признаком высокого уровня знаний математики. Недостаточно простого применения «зазубренных» формул, необходимо понимание учениками закономерностей, наличие у них навыка анализа конкретного случая на основе общих свойств объекта, системности и последовательности. Зачастую оказывается, что выпускник школы не имеет представления о решении задач с параметрами. Отсюда возникает вопрос: почему же так происходит, ведь данный материал входит в итоговую аттестацию учащихся и как это исправить?

Можно заметить, что в учебных программах по математике общеобразовательных школ задачам с параметрами отводится незначительное место, а реальное изучение таких задач начинается только в 11-м классе. Хотя данный материал можно вводить и изучать, начиная с линейных и квадратных уравнений (неравенств). Это могут быть задания:

- на нахождение решений в общем виде;
- на определение корней, удовлетворяющих каким-либо свойствам;
- на исследование количества корней в зависимости от значений параметра.

Кроме того, итоги выполнения задания № 18 Единого государственного экзамена за 2016–2017 гг., показали, что его решают примерно 1–2% учащихся.

Для решения данных заданий используются всем известные методы: аналитический и функционально-графический (координатно-параметрический). Последнему из вышеперечисленных будет посвящена выпускная квалификационная работа. Об умении применять этот метод говорится в Федеральном государственном образовательном стандарте среднего (полного) общего образования: «овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей»[32].

Актуальность темы исследования:

1) задачи с параметрами содержатся в контрольно-измерительных материалах Основного и Единого государственных экзаменов;

2) требование Федерального государственного образовательного стандарта об овладении выпускниками школы функционально-графическим методом при решении математических задач.

Цель выпускной квалификационной работы: показать возможность использования функционально-графического метода при решении задач с параметрами в итоговой аттестации учащихся.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1) изучить учебно-методическую, математическую и историческую литературу по теме исследования;

2) описать особенности решения задач с параметрами функционально-графическим методом в школьном курсе математики;

3) проанализировать и систематизировать задачи Единого государственного экзамена, в решении которых используется функционально-графический метод;

4) разработать курс «Применение функционально-графического метода при решении задач с параметрами в итоговой аттестации»;

5) составить авторские задачи с параметрами и продемонстрировать их решение с помощью математических пакетов Wolfram Mathematica 10, GeoGebra.

Объектом исследования является функционально-графический метод при решении задач с параметрами в итоговой аттестации учащихся.

Предмет исследования: применение функционально-графического метода в решении параметрических задач школьного курса математики.

Методы исследования: анализ научно-методической и исторической литературы, аналогия, анализ и синтез при решении конкретных задач, анкетирование учащихся 11-го класса и анализ полученных результатов.

Практическая значимость: в работе представлены решения задач с параметрами функционально-графическим методом, которые могут быть использованы учащимися при подготовке к сдаче Единого государственного экзамена, а также при изучении элементарной математики в вузе.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и насчитывает 94 страницы, три приложения, три таблицы и 77 иллюстраций.

Во введении мотивируется обращение к теме исследования, формулируются актуализация, объект и предмет, ставится цель и задачи.

В первой главе раскрыты методические и теоретические основы изучения учащимися старших классов функционально-графического метода, представлены основные понятия по теме, исторические сведения, алгоритм решения задач с параметрами функционально-графическим методом.

Во второй главе рассмотрены конкретные примеры решения задач с параметрами из Единого государственного экзамена, разработка курса по теме исследования и результаты апробации занятия этого курса.

В заключении представлены полученные результаты и подведены итоги выпускной квалификационной работы.

Список литературы состоит из методических, математических книг, ссылок на электронные источники, которые были использованы при написании работы.

В приложение вынесены авторские задачи с параметрами и их решения с использованием образовательных математических пакетов Wolfram Mathematica 10, GeoGebra. Представлена инструкция работы с программами.

По материалам выпускной квалификационной работы опубликованы тезисы:

1. Применение программы Wolfram Mathematica 10 при решении систем уравнений с параметром // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах. – Пермь : ПГГПУ, 2017. – Вып.10. – 85 с.

2. Функционально-графический метод решения задач с параметрами // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. всерос. науч.-практ. конф. студентов матем. фак-тов. – Пермь, 2018. – Вып.11. –83 с.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

1.1. Исторические сведения о функционально-графическом методе решения задач

История возникновения задач с параметрами

В VII в. индийский ученый Брахмагупта изложил общее правило решения квадратных и линейных уравнений, приведенных к единой канонической форме:

$$ax^2 + bx = c, (a > 0)$$

$$ax + c = by$$

В уравнении коэффициенты, кроме параметра a, могут быть и отрицательными.

В теоретической части книги «Китаб аль-джебр ва-ль-мукабала» Аль-Хорезми дает классификацию линейных и квадратных уравнений с параметрами. Автор выделяет 6 видов уравнений, выражая их следующим образом:

1) «квадрат» равен «корню» – $ax^2 = bx$;

2) «квадрат» равен свободному члену – $ax^2 = c$;

3) «корень» равен свободному члену – $ax = c$;

4) «квадрат» и свободный член равны «корню» – $ax^2 + c = bx$;

5) «квадрат» и «корень» равны свободному члену – $ax^2 + bx = c$;

6) «корень» и свободный член равны «квадрату» – $bx + c = ax^2$.

Формулы решения квадратных уравнений по Аль-Хорезми в Европе были впервые изложены в «Книге абака», написанной в 1202 г. итальянским математиком Леонардо Фибоначчи.

Вывод формулы решения квадратного уравнения с параметром в общем виде имеется у Виета, однако он признавал только положительные корни. Итальянские математики Тарталья, Кардано, Бомбелли среди первых в XII в. учитывают, помимо положительных, и отрицательные корни. Лишь в XVII в. благодаря трудам Жирара, Декарта, Ньютона и других ученых способ решения квадратных уравнений принял современный вид [8].

Функционально-графический метод

История возникновения функционально-графического метода далеко уходит в древние века. Исследование общих зависимостей началось в XIV веке. Средневековая наука была схоластической. При таком характере не оставалось места изучению количественных зависимостей, речь шла лишь о качествах предметов и их связях друг с другом. Но среди схоластов возникла школа, утверждавшая, что качества могут быть более или менее интенсивными (платье человека, свалившегося в реку, мокрее, чем у того, кто лишь попал под дождь).

Французский ученый Николай Оресм стал изображать интенсивность длинами отрезков. Когда он располагал эти отрезки перпендикулярно некоторой прямой, их концы образовывали линию, названную им "линией интенсивностей" или "линией верхнего края» (график соответствующей функциональной зависимости). Оресм изучал даже "плоскостные" и "телесные" качества, т.е. функции, зависящие от двух или трех переменных.

Важным достижением Оресма была попытка классифицировать получившиеся графики. Он выделил три типа качеств, а также характерные свойства графиков таких качеств:

- равномерные (с постоянной интенсивностью);

- равномерно-неравномерные (с постоянной скоростью изменения интенсивности);
- неравномерно-неравномерные (все остальные).

Чтобы создать математический аппарат для изучения графиков функций, понадобилось понятие переменной величины. Это понятие было введено в науку французским философом и математиком Рене Декартом (1596-1650). Именно Декарт пришел к идеям о единстве алгебры и геометрии и о роли переменных величин, Декарт ввел фиксированный единичный отрезок и стал рассматривать отношения других отрезков к нему.

Таким образом, графики функций за все время своего существования прошли через ряд фундаментальных преобразований, приведших их к тому виду, к которому мы привыкли. Каждый этап или ступень развития графиков функций – неотъемлемая часть истории современной алгебры и геометрии.

Функционально-графический способ определения числа корней уравнения в зависимости от входящего в него параметра является более удобным, чем аналитический [12].

1.2. Функционально-графический метод при решении задач с параметрами

Для начала проведем анализ понятий, использующихся в настоящей выпускной квалификационной работе. Отбирать определения будем по следующим критериям:

1) полнота;
2) простота и доступность смысла для учащихся;
3) источник.

Определения понятий функционально-графический метод и задача с параметром возьмем у А.Г. Мордковича и В.В. Мирошина соответственно.

Функционально-графический метод – это метод, основанный на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств [19].

Задача с параметром – условие задачи, представленное в виде уравнений, неравенств или систем, совокупностей [9].

Анализ остальных определений приведем в таблицах.

Таблица 1

Определения понятия «параметр»

Источник	**Определение**
Толковый словарь Ушакова	величина, входящая в формулы и выражения, значение которой является постоянным в пределах рассматриваемой задачи, но которое в другой меняет свои значения [31]
Г.А. Ястребинецкий	переменные, которые при решении уравнения или неравенства считаются постоянными, называют параметрами, а само уравнение (неравенство) называют уравнением (неравенством), содержащим параметры [34]
«О задачах с параметром» В. Голубев, А. Гольдман	независимая переменная, значение которой в данной задаче считается фиксированным или произвольным действительным числом, или числом, принадлежащим заранее оговоренному множеству

Проанализировав определение понятия *параметр* (табл. 1), за основу возьмем трактовку В. Голубева и А. Гольдман из статьи «О задачах с параметром».

Таблица 2

Определения понятия «решить задачу с параметром»

Источник	**Определение**
«О задачах с параметром» В. Голубев, А. Гольдман	значит, предъявить обоснованный ответ либо для любого значения параметра, либо для значения параметра, принадлежащего заранее оговоренному множеству. Если требуется найти значение параметра, при которых множество решений задачи удовлетворяет объявленному условию, то

Источник	Определение
	решение состоит в поиске указанных значений параметра
Глобус24 мир образования	для каждого значения параметра найти значения x, удовлетворяющие условию поставленной задачи [5]

Из вышеперечисленных определений (табл. 2) понятия *решить задачу с параметром*, выберем также трактовку В. Голубева и А. Гольдман из статьи «О задачах с параметром».

Итоговая аттестация – форма государственного контроля (оценки) освоения выпускниками основных общеобразовательных программ среднего (полного) общего образования в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования [14]

Классификация задач по типу ограничений, накладываемых на параметр:

1) нахождение решения для любых значений параметра или значений из указанного множества;

2) определение всех значений параметра, при указанном количестве решений;

3) нахождение количества решений в зависимости от значений параметра;

4) определение всех значений параметра, при которых множество решений удовлетворяет заданным условиям.

При решении задач с параметрами вида $F(x,a) \vee 0$ или $f(x,a) \vee g(x,a)$ или

$$\begin{cases} F_1(x,y,a) \vee 0, \\ F_2(x,y,a) \vee 0, \end{cases} \quad (1)$$

где символ $\vee$ обозначает один из знаков сравнения: $=, >, <, \geq, \leq$. Часто в таких задачах ставится вопрос об исследовании:

- на наличие решений или их отсутствие;

- на единственность или наличие определенного количества решений;
- на наличие решений определенного типа.

В зависимости от условия задачи можно выделить два основных графических приема.

1. Построение графического образа на координатной плоскости xOy. В этом случае (1) приводится к виду (если возможно):

$$f_1(x) \vee g_1(x, a) \text{ или } \begin{cases} F(x, y) \vee 0, \\ G(x, y, a) \vee 0. \end{cases}$$

2. Построение графического образа на координатной плоскости xOa. В этом случае (1) приводится к виду (если возможно): $f_2(x) \vee a$.

Применение функционально-графического метода обосновано в случаях, когда ставится вопрос в задаче о количестве решений в зависимости от значения параметра или нахождения значений параметра, при которых решение отсутствует или единственно [24].

К преимуществам метода можно отнести:

- по построению графического образа можно определить, как влияет на них и само решение значение параметра;
- в некоторых случаях график дает возможность сформулировать аналитически достаточные и необходимые условия для решения задачи;
- применение теорем позволяет на основании графика делать вполне строгие и обоснованные заключения о количестве решений;
- наглядность и экономия времени;
- отсутствие громоздких сложных вычислений;
- на начальных этапах изучения метода можно использовать образовательные математические программы (например, GeoGebra, Wolfram Mathematica 10).

Алгоритм решения задач с параметрами функционально-графическим методом в координатной плоскости xOy

1. Найти область определения функций, входящих в условие задачи.
2. Построить графики функций в координатной плоскости xOy.
3. Проанализировать преобразования графиков функций в зависимости от параметра.
4. Сформулировать ответ, удовлетворяющий условию задачи.

Алгоритм решения задач с параметрами функционально-графическим методом в координатной плоскости xOa, aOx

1. Привести уравнение или неравенство к виду $x \vee f(a)$ или $a \vee f(x)$, где $\vee$ – знак сравнения.
2. Найти область допустимых значений переменной и параметра.
3. Построить графики функций на координатной плоскости xOa или aOx.
4. Отметить линии из области допустимых значений.
5. Проанализировать изменения графиков функций в зависимости от параметра.
6. Сформулировать ответ, удовлетворяющий условию задачи.

1.3. Этапы изучения функционально-графического метода при решении задач с параметрами в школьном курсе математики

Как известно, решение задач с параметром представляют для учащихся сложность, поэтому важно начать подготовку с актуализации знаний. На данном этапе учитель организует повторение определений основных понятий раздела «Функция», изучающегося с 7-го класса. К ним относятся: функция, график функции, зависимая и независимая переменная, допустимые значения аргумента и область значений функции. Следующим действием будет проверка умений в построении известных функций, а также их свойств. Обязательным шагом является определение связи между буквенными коэффициентами в формуле записи функции и графиком.

Второй этап изучения предполагает:

- введение понятий «параметр», «задача с параметром», «решить задачу с параметром»;
- решение заданий 23 из Основного государственного экзамена, который предполагает построение графика функций и поиск значений параметра, входящего во вторую функцию;
- повторение функционально-графического метода при решении уравнений вида $f(x) = g(x)$, с последующим составлением алгоритма.
- сравнение и анализ двух предыдущих пунктов с последующим составлением алгоритма решения задач с параметрами;
- рассмотрение координатно-параметрического метода, составление алгоритма решения задач с параметрами.

Заключительным этапом изучения функционально-графического метода является практическая часть, на котором разбираются решения уравнений, неравенств и их систем с параметрами.

Важный этап при разработке занятий – рефлексия, на котором ученик переосмысляет полученную информацию, анализирует собственные знания и выражает их.

ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ В ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ УЧАЩИХСЯ

В главе представлены задачи с параметрами из Открытого банка заданий ЕГЭ разных годов и их решения функционально-графическим методом. Подпункты главы классифицированы по типу задач. Задания расставлены в соответствии с изучением элементарных функций в школьном курсе математики. Пятый подпункт главы – пояснительная записка к курсу «Применение функционально-графического метода при решении задач с параметрами в итоговой аттестации», шестой – апробация исследования с анализом.

2.1. Решение задач с параметрами контрольно-измерительных материалов Единого государственного экзамена функционально-графическим методом

Решение уравнений с параметрами функционально-графическим методом

1. При каких значениях параметра a уравнение $|x-1|-1=a$ не имеет решений [16]?

Решение: Рассмотрим 2 способа решения.

I способ (координатно-параметрический):

Зададим функцию $a(x)=|x-1|-1$, построим ее график в системе координат xOa (рис. 1). Графиком функции будет «галочка», смещенная на 1 вправо и на 1 вниз от начала системы координат.

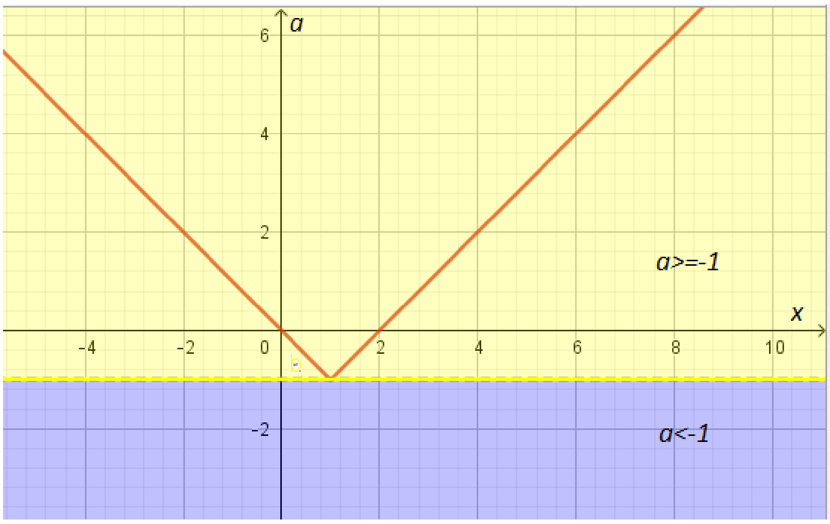

Рис. 1. Задание 1 (способ I)

По графику заметим, что при $a = -1$ уравнение имеет единственное решение, при $a > -1$ – 2 корня, а при $a < -1$ не имеет решений. Тогда из условия задачи ответом будет: $a < -1$.

II способ:

Представим уравнение в виде системы:

$$\begin{cases} y = |x - 1| - 1, \\ y = a, \end{cases} \tag{1}$$

построим графики функций (рис. 2). Придавая параметру a различные значения, заметим, что при $a = -1$ уравнение имеет единственное решение, при $a > -1$ – 2 корня, а при $a < -1$ не имеет решений.

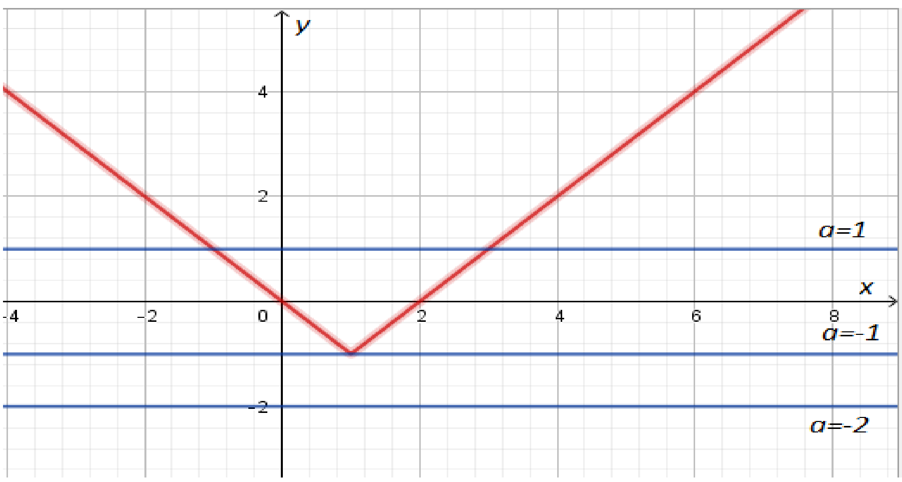

Рис. 2. Задание 1 (способ II)

Ответ: $a < -1$ или $a \in (-\infty; -1)$.

2. Для каждого значения параметра c найдите число корней уравнения $\big||2x-6|-2\big| = -x + c$ [27].

Решение: Рассмотрим два способа решения.

I способ (с переносом неизвестной в левую часть уравнения):

Перепишем уравнение $\big||2x-6|-2\big| - x = c$ и представим его в виде системы:

$$\begin{cases} y = \big||2x-6|-2\big| + x, \\ y = c \end{cases}. \qquad (2)$$

Построим график первой функции в системе координат xOy. График второй функции – семейство параллельных прямых оси абсцисс. Придавая различные значения c, найдем количество решений системы (2) (рис. 3).

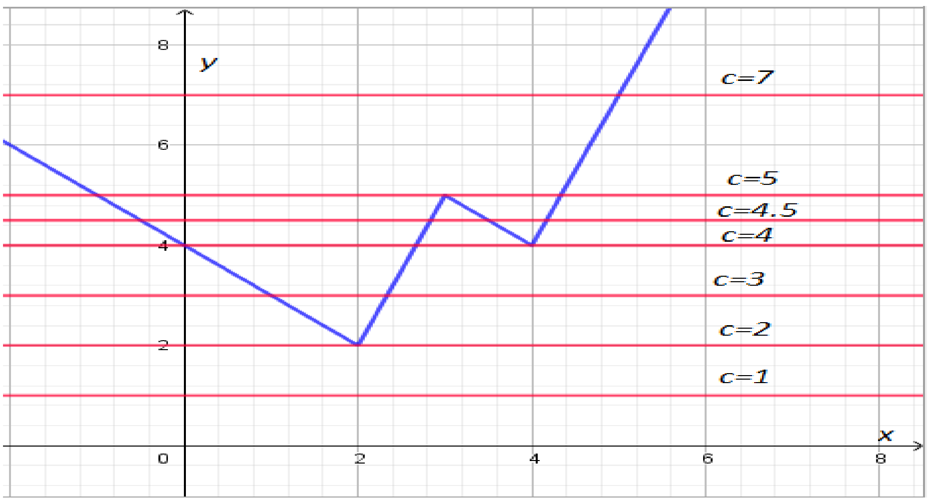

Рис. 3. Способ 1

Получим, что при $c < 2$: корней нет; $c = 2$: 1 корень; $2 < c < 4$: 2 корня; $c = 4$ – три корня; $4 < c < 5$ – 4 корня; $c = 5$ – 3 корня; $c > 5$ – 2 корня.

II способ (без переноса): Запишем уравнение в виде системы:

$$\begin{cases} y = \big||2x-6|-2\big|, \\ y = -x+c, \end{cases}. \qquad (3)$$

Построим графики функций (рис. 4). Графиком второй функции является семейство параллельных прямых.

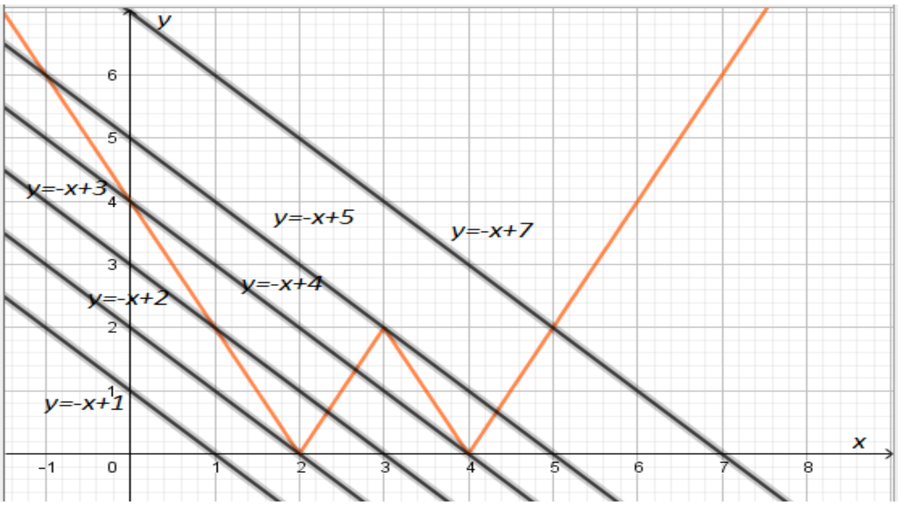

Рис. 4. Способ 2

Исследуем изменения графиков при различных значениях параметра, получим такой же ответ, как и в первом способе.

Ответ: при $c < 2$ – корней нет; $c = 2$ – 1 корень; $2 < c < 4$ – 2 корня; $c = 4$ – 3 корня; $4 < c < 5$ – 4 корня; $c = 5$ – 3 корня; $c > 5$ – 2 корня.

3. Найдите графически в зависимости от значений параметра c число корней уравнения $\big||2x-1|-|x-1|\big| = c$. При каких значениях параметра уравнение имеет 4 корня? Найдите их [16].

Решение: Зададим функцию $c(x) = \big||2x-1|-|x-1|\big|$ и построим ее график в системе координат xOc (рис. 5).

Рис. 5. Задание 3

Изменяя значение параметра, заметим, что при $c < 0$ – графики функций не пересекаются, а значит, уравнение не имеет решений. При $c = 0$ – 2 корня; $0 < c < 0{,}5$ – 4 корня; $c = 0{,}5$ – 3 корня; $c > 0{,}5$ – 2 корня. Ответим на второй вопрос задания: на промежутке $0 < c < 0{,}5$ уравнение имеет 4 корня.

Найдем эти корни.

Раскроем внешний модуль уравнения: $|2x - 1| - |x - 1| = c$, так как под знаками модуля стоят 2 различных выражения, то получим 4 случая их раскрытия.

1) $2x - 1 \geq 0$ и $x - 1 \geq 0$

$$2x_1 - 1 - x_1 + 1 = c$$

$$x_1 = c$$

2) $2x - 1 \geq 0$ и $x - 1 < 0$

$$2x_2 - 1 - \big(-(x_2 - 1)\big) = c$$

$$3x_2 - 2 = c$$

$$x_2 = \frac{c + 2}{3}$$

3) $2x - 1 < 0$ и $x - 1 \geq 0$

$$-(2x_3 - 1) - x_3 + 1 = c$$

$$-3x_3 + 2 = c$$

$$x_3 = \frac{-c+2}{3}$$

4) $2x - 1 < 0$ и $x - 1 < 0$

$$-(2x_4 - 1) - \left(-(x_4 - 1)\right) = c$$

$$-x_4 = c \leftrightarrow x_4 = -c$$

Ответ: при $c < 0$ – корней нет; $c = 0$ – 2 корня, $0 < c < 0{,}5$ – 4 корня; $c = 0{,}5$ – 3 корня; $c > 0{,}5$ – 2 корня. Уравнение имеет 4 корня при $c \epsilon (0; 0{,}5)$. $x_1 = c,\ x_2 = \frac{c+2}{3},\ x_3 = \frac{-c+2}{3}, x_4 = -c.$

4. Найти все значения a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение [24].

Решение: Преобразуем уравнение к следующему виду:

$$x^2 - 6x + 9 + a^2 - 4a + 4 = 1 \ \leftrightarrow\ (x-3)^2 + (a-2)^2 = 1.$$

Уравнение задает окружность с центром в точке $(3;\ 2)$ и радиусом, равным 1. Построим ее на координатной плоскости *xOa* (рис. 6).

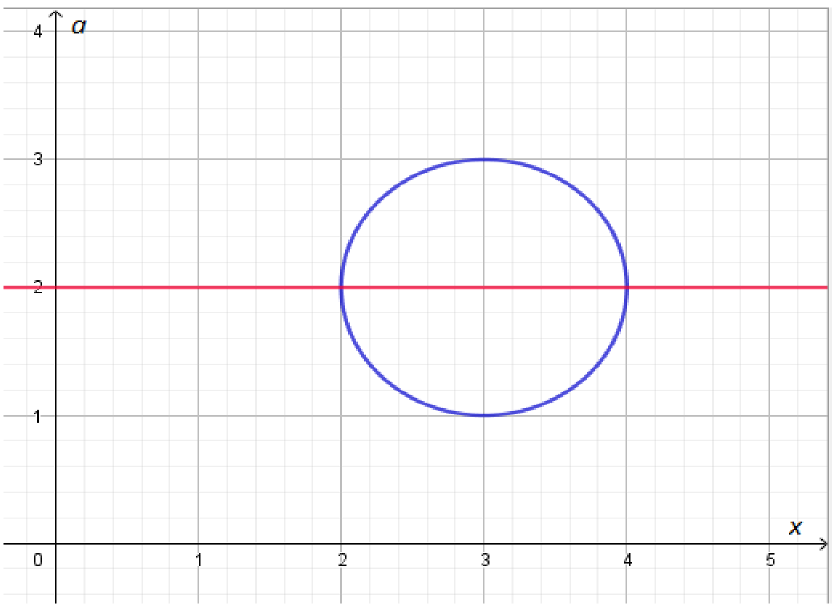

Рис. 6. Задание 4

По графику видно, что максимальная разность корней достигается при пересечении прямой, параллельной оси x и диаметра окружности, следовательно, при $a = 2$.

Ответ: $a = 2$.

5. Найдите значения параметра a, при которых уравнение

$\frac{|x|}{x}(x-1)^2 = a$ имеет один корень [24].

Решение: Для начала отметим ОДЗ: $x \neq 0$. Преобразуем уравнение, раскрывая знак модуля. Получим следующую систему

$$\begin{cases} (x-1)^2 = a, x > 0, \\ -(x-1)^2 = a, x < 0 \end{cases}. \qquad (4)$$

Построим графики функций (4) на координатной плоскости xOa (рис. 7).

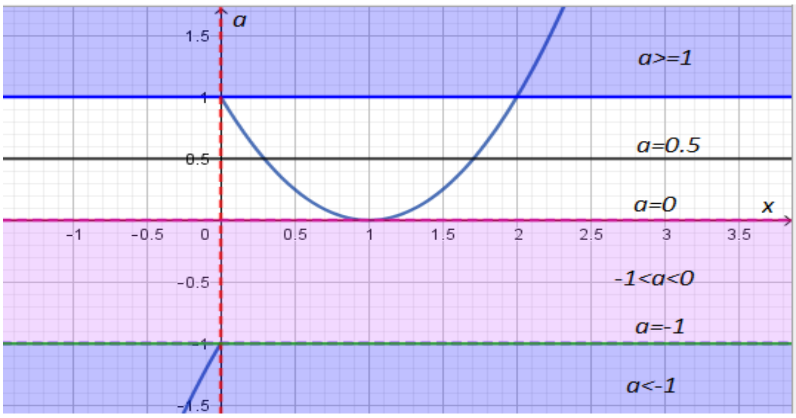

Рис. 7. Задание 5

Исследуем изменения графиков, придавая различные значения параметру: при $a < -1$ – 1 корень, $-1 \leq a < 0$ – корней нет, $a = 0$ – 1 корень, $0 < a < 1$ – 2 корня, $a \geq 1$ – 1 корень.

Ответ: $a \in (-\infty;\ -1) \cup \{0\} \cup [1;\ +\infty)$

6. При каких значениях параметра k уравнение $\frac{x^3+3x^2+16x+48}{x+3} = kx$ не имеет корней [27]?

Решение: Во-первых, запишем ОДЗ: $x + 3 \neq 0 \ \rightarrow x \neq -3$. Во-вторых, преобразуем уравнение:

$$\frac{x^2(x+3) + 16(x+3)}{x+3} = kx \ \leftrightarrow \ \frac{(x+3)(x^2+16)}{x+3} = kx \ \leftrightarrow \ x^2 + 16 = kx.$$

Представим получившееся уравнение в виде системы

$$\begin{cases} y = x^2 + 16, \\ \quad y = kx. \end{cases} \tag{5}$$

Графиком первой функции является парабола, смещенная на 16 вверх, второй – семейство прямых, проходящих через начало координат. Построим графики функций (5) (рис. 8).

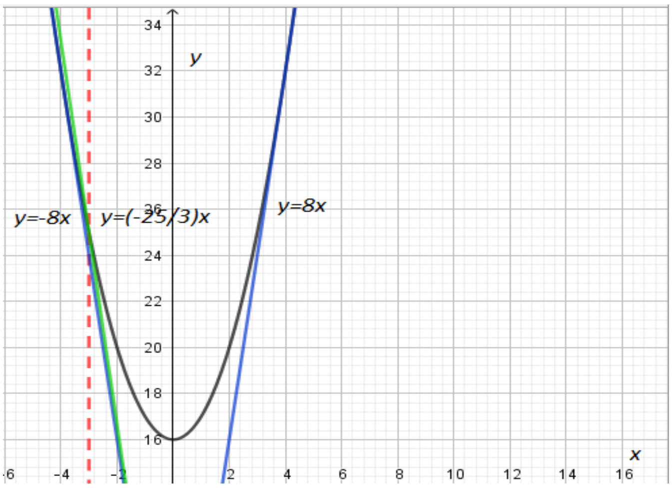

Рис. 8. Задание 6

Уравнение не будет иметь решений, если график функции $y = kx$ пройдет через точку с координатами $(-3;\, 25)$, подставив координаты в функцию, найдем $k = \frac{-25}{3}$. В точках касания функций уравнение будет иметь единственный корень, найдем эти значения k:

$$x^2 + 16 = kx \leftrightarrow \ x^2 - kx + 16 = 0, \ D = k^2 - 4 \cdot 16 = 0, k = \pm 8.$$

Тогда при $k \in (-8; 8)$ уравнение также не будет иметь решений.

Ответ: $k \in \{-\frac{25}{3}\} \cup (-8; 8)$.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2a + 3$ имеет единственный корень [24].

Решение:

Преобразуем уравнение к виду $\sqrt{-7 - 8x - x^2} = -ax + 2a + 3$ и запишем в виде системы

$$\begin{cases} y = \sqrt{-7 - 8x - x^2}, \\ y = -ax + 2a + 3 \end{cases}. \qquad (6)$$

Графиком второй функции является семейство прямых с угловым коэффициентом $(-a)$, проходящих через точку $A(2; 3)$. Построим графики функций (рис. 9).

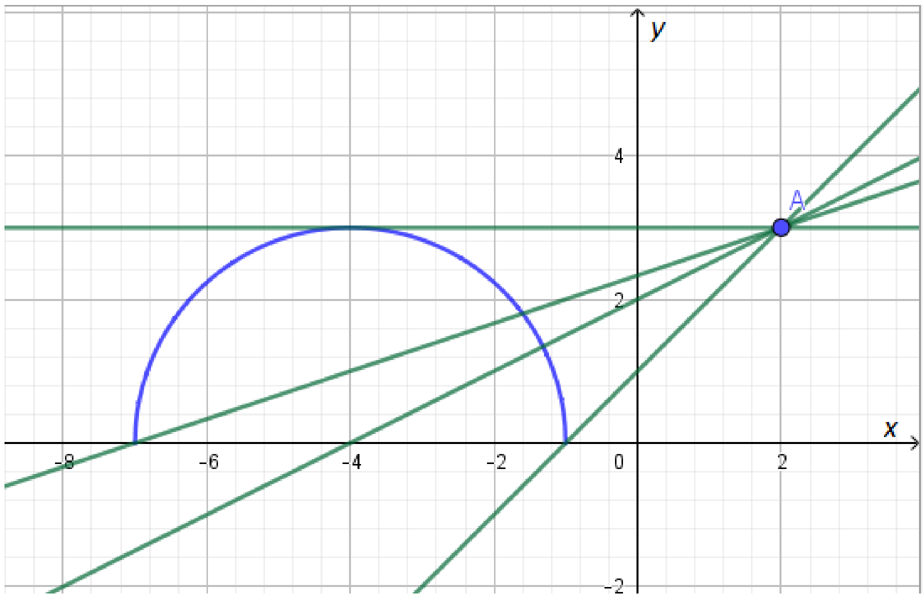

Рис. 9. Задание 7

Уравнение будет иметь единственное решение при $y = 3 \rightarrow a = 0$ и в точке с координатой $(-1; 0)$. Подставим значения координат во второе уравнение системы, найдем значение параметра: $0 = -a \cdot (-1) + 2a + 3 \rightarrow a = -1$. В точке с координатами $(-7; 0)$ уравнение имеет 2 решения, но во всех значениях правее точки одно. Найдем, чему равен параметр в этой точке, а затем исключим ее. Получим: $0 = (-a) \cdot (-7) + 2a + 3 \rightarrow a = -\frac{1}{3}$. Объединим получившиеся решения: $a \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \{0\}$.

Ответ: $a \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \{0\}$.

8. Указать число решений уравнения $p \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x + 1 = 0$ в зависимости от значения параметра p.

Решение: Данную задачу будем решать координатно-параметрическим методом, для этого перепишем уравнение в виде функции $p(x) = \frac{4 \cdot 2^x - 1}{4^x}$. Обратим внимание, что $\forall x, 4^x > 0$. Построим график функции на координатной плоскости xOp. Для того, чтобы найти число решений уравнения относительно параметра, будем придавать p различные значения. Получим (рис.10)

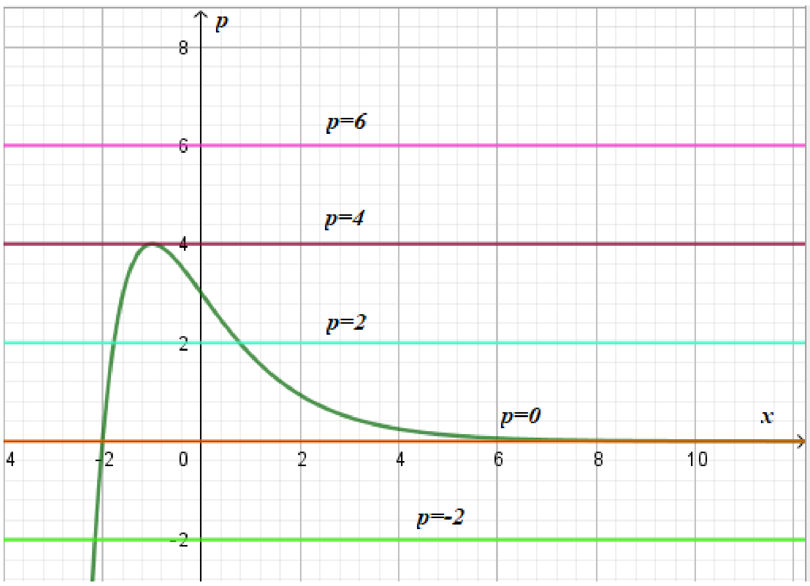

Рис. 10. Задание 8

Заметим, что при $p \leq 0$ уравнение будет иметь единственное решение; при $0 < p < 4$ – 2 решения; при $p = 4$ – одно решение и при $p > 4$ не имеет решений.

Ответ: при $p \leq 0$ и $p = 4$ – 1 решение, при $0 < p < 4$ – 2 решения, при $p > 4$ нет решений.

9. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $2\lg(x+3) = \lg(ax)$ имеет единственное решение.

Решение: Представим уравнение в виде системы

$$\begin{cases} y = 2\lg(x+3), \\ y = \lg(ax) \end{cases}. \qquad (7)$$

Построим графики функций при $a = 1$ (рис. 11).

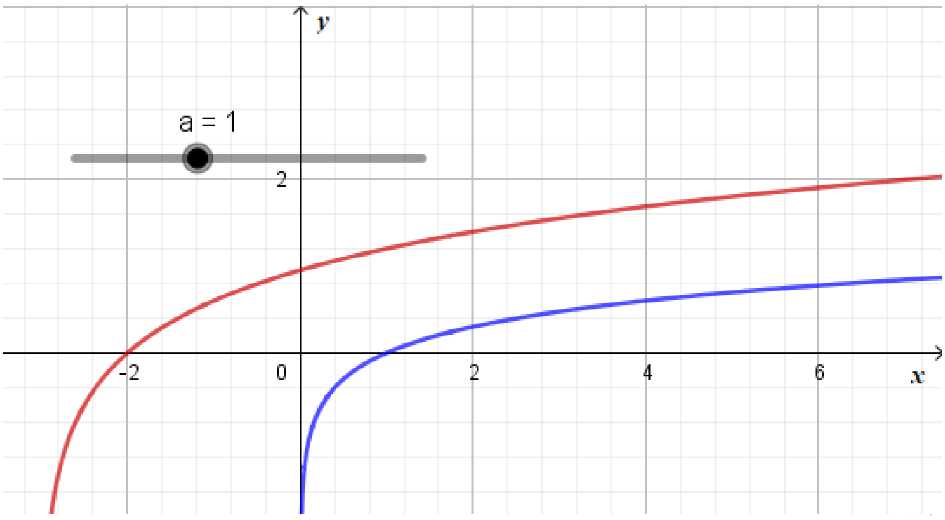

Рис. 11. Задание 9

По определению логарифма: $\begin{cases} x+3>0, \\ ax>0 \end{cases} \to \begin{cases} x>-3, \\ \left[\begin{array}{l} a>0 \text{ и } x>0, \\ a<0 \text{ и } x<0 \end{array}\right. \end{cases}.$

При $a<0$ график к (7) примет вид (рис. 12):

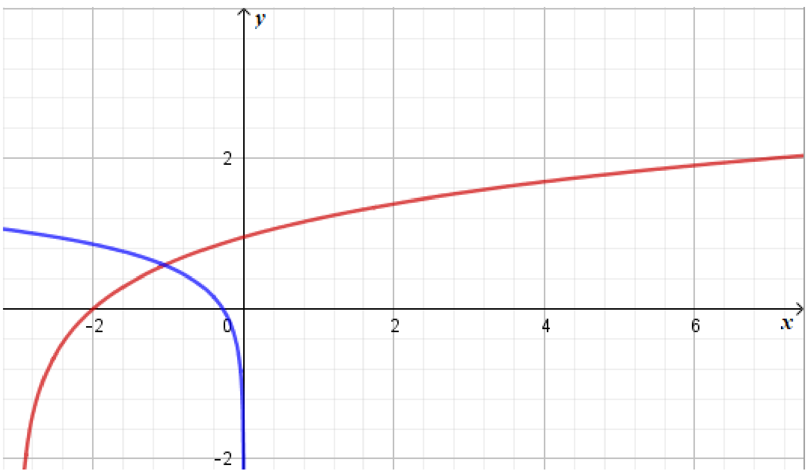

Рис. 12. График (7) при a<0

Очевидно, что при $a < 0$ уравнение имеет единственное решение. Для того, чтобы точно определить при каком положительном значении параметра уравнение будет иметь единственный корень, выполним преобразования:

$$l\,g(x+3)^2 = \lg(ax) \to \ (x+3)^2 = ax \ \to x^2 + (6-a)x + 9 = 0$$
$$D = (6-a)^2 - 36 = 0 \ \to a = 0 \text{ или } a = 12,$$

т.к. $a = 0$ не удовлетворяет определению логарифма.

Ответ: $a = 12$ и $a < 0$.

10. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $8\sin(x) = p + \cos{(2x)}$ не имеет корней.

Решение:

Представим уравнение в виде функции $p(x) = 8\sin(x) - \cos{(2x)}$, построим ее график на координатной плоскости xOp (рис. 13).

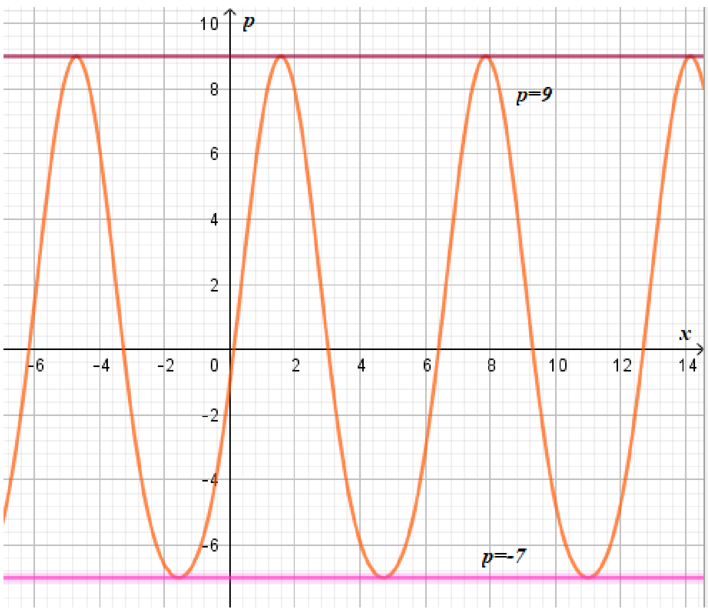

Рис. 13. Задание 10

Придавая параметру p значения из отрезка $[-7; 9]$ уравнение будет иметь бесконечно много решений, тогда при $p < -7$ и $p > 9$ уравнение не имеет решений.

Ответ: при $p < -7$ и $p > 9$.

Решение неравенств с параметрами функционально-графическим методом

1. Решить неравенство $|x-3| > a$ [16].

Решение: Запишем неравенство в виде системы

$$\begin{cases} y = |x-3|, \\ y = a \end{cases}. \tag{8}$$

Построим графики функций (рис.14).

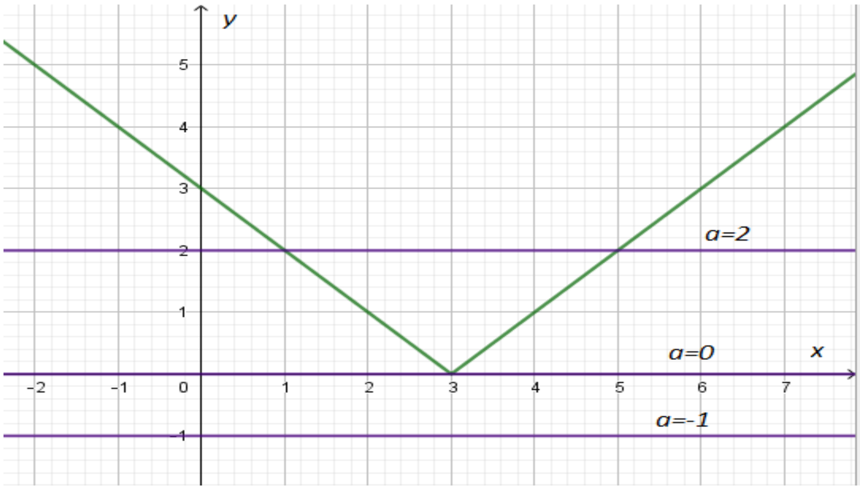

Рис. 14. Задание 1

Исследуем изменения графика, придавая параметру различные значения: при $a < 0$, то $x \in R$. При $a = 0$ неравенство будет верно для всех $x \neq 3$, для $a > 0$ решением будут все точки числовой прямой, удаленных от $x = 3$ на расстояние большее параметра a.

Ответ: $a < 0$, то $x \in R$; $a = 0, x \in R\backslash\{3\}$; $a > 0, x \in (-\infty; 3-a) \cup (3+a;\ +\infty)$.

2. Решить неравенство $|x| + |a| \leq 1$ [16].

Решение. Построим множество точек на координатной плоскости xOa, удовлетворяющих данному неравенству, получим внутреннюю область ромба (рис. 15).

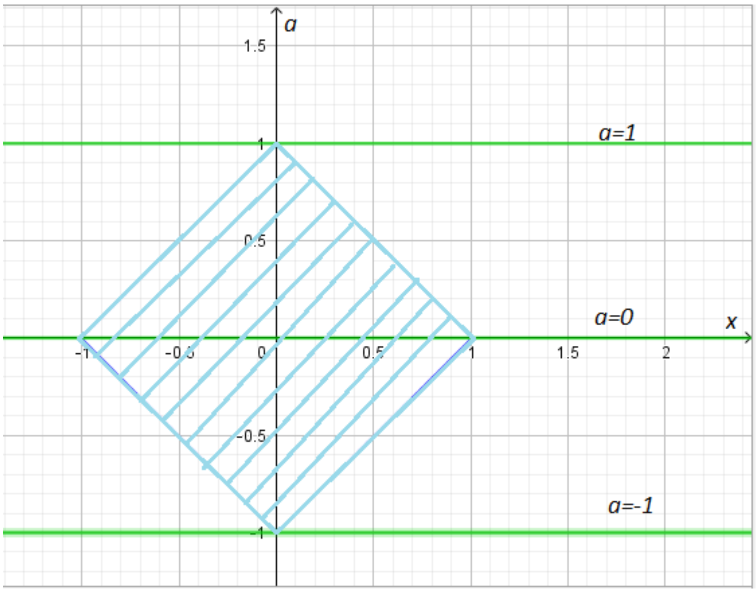

Рис. 15. Задание 2

При различных значениях параметра a получим: если $a < -1$, то решений нет; $a = -1, x = 0$ (1 решение); $-1 < a < 0, x \in (-a-1; a+1)$ – множество решений; $a = 0, x \in [-1; 1]$; $0 < a < 1, x \in (a-1; -a+1)$; $a = 1, x = 0$; $a > 1$ – решений нет.

Ответ: решений нет при $a < -1$ и $a > 1$;

одно решение $x = 0$ при $a = -1$ и $a = 1$;

множество решений: при $-1 < a < 0, x \in (-a-1; a+1)$;

при $a = 0, x \in [-1; 1]$; при $0 < a < 1, x \in (a-1; -a+1)$.

3. Решить неравенство $|3x - a| + |x + a| \leq 2$ [16].

Решение: Рассмотрим выражение, обращающееся в 0 под знаком модуля $3x - a = 0 \ \rightarrow x = \frac{a}{3}$ и $x + a = 0 \ \rightarrow x = -a$ (обозначены на графике красными пунктирными линиями). Далее раскроем модули в соответствии со знаками и получим неравенства образующие границу области.

- (++) $3x - a + x + a \leq 2 \ \rightarrow x \leq \frac{1}{2}$
- (+–) $3x - a - x - a \leq 2 \ \rightarrow x \leq 1 + a$
- (–+) $-3x + a + x + a \leq 2 \ \rightarrow x \geq a - 1$
- (– –) $-3x + a - x - a \leq 2 \ \rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

Отметим области решения, получившихся неравенств на плоскости aOx (рис.16).

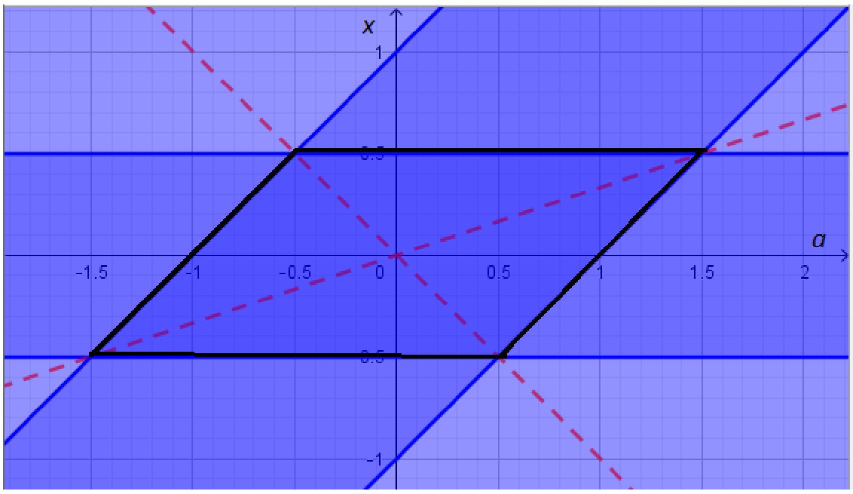

Рис. 16 Задание 3

Получили границу внутренней области параллелограмма. Проанализируем результаты при различных значениях параметра: если $a > 1{,}5$ и $a < -1{,}5$, то решений нет; при $a = \pm 1{,}5 - \ x = \pm 0{,}5$; при $0{,}5 \leq a < 1{,}5$ – $x \in [a-1; 0{,}5]$; при $|a| < 0{,}5$ – $x \in [-0{,}5; 0{,}5]$; при $-1{,}5 < a \leq -0{,}5$ – $x \in [-0{,}5; a+1]$.

Ответ: при $a > 1{,}5$ и $a < -1{,}5$ – решений нет;

при $a = \pm 1{,}5$ – $x = \pm 0{,}5$;

при $0{,}5 \leq a < 1{,}5$ – $x \in [a-1; 0{,}5]$;

при $|a| < 0{,}5$ – $x \in [-0{,}5; 0{,}5]$;

при $-1{,}5 < a \leq -0{,}5$ – $x \in [-0{,}5; a+1]$.

4. При каких значениях параметра a неравенство

$$x^2 + y^2 \leq 6x - 4y + a^2 - 13$$

имеет не менее пяти целочисленных решения [24]?

Решение: Преобразуем неравенство $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 \leq a^2$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 \leq a^2 \rightarrow \ (x-3)^2 + (y+2)^2 \leq a^2$$

получим внутреннюю область окружности с центром в точке $(3; -2)$ и радиусом, равным $|a|$ (рис. 17).

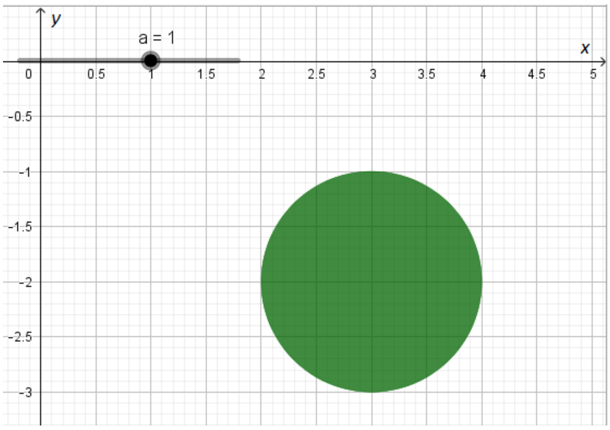

Рис. 17. Задание 4

Для того, чтобы выполнялось условие задачи (иметь не менее 5 целочисленных решения), радиус окружности должен быть не менее 1.

Ответ: $|a| \geq 1$.

5. Найти значение параметра a, при котором выполняется неравенство $\sqrt{x+a} \geq x+1$.

Решение: Разобьем неравенство в виде системы уравнений

$$\begin{cases} y = \sqrt{x+a}, \\ y = x+1 \end{cases}. \tag{9}$$

Графиком первой функции является «полупарабола», скользящая вдоль оси x. Для того, чтобы неравенство выполнялось «полупарабола» должна находиться выше относительно прямой $y = x + 1$ (рис. 18).

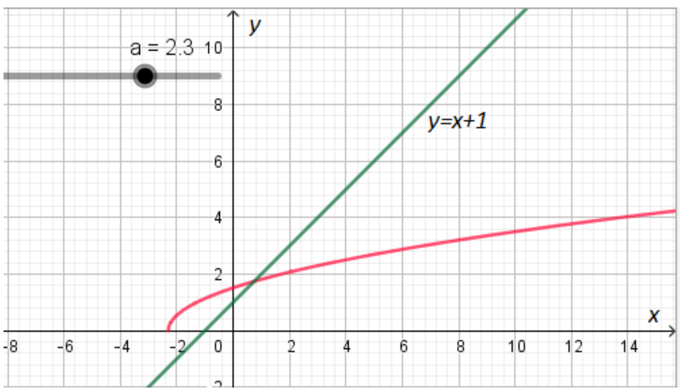

Рис. 18. Задание 5

Чтобы условие выполнялось, нужно найти точку касания этих функций. Для этого выполним следующие действия:

$$\sqrt{x+a} = x + 1$$

$$x + a = (x+1)^2$$

$$-x^2 - x + a - 1 = 0$$

$$D = -3 + 4a = 0$$

$$a = \frac{3}{4}$$

Так как «полупарабола» должна быть выше прямой, следовательно, это выполняется при $a \geq \frac{3}{4}$.

Ответ: $a \geq \frac{3}{4}$.

6. При каких значениях параметра a выполняется неравенство $x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 \geq 0$ [24].

Решение: Запишем неравенство в виде системы:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5, \\ y \geq 0 \end{cases}. \qquad (10)$$

Графиком функции является парабола, которая в зависимости от параметра может располагаться в системе координат тремя способами (рис. 19):

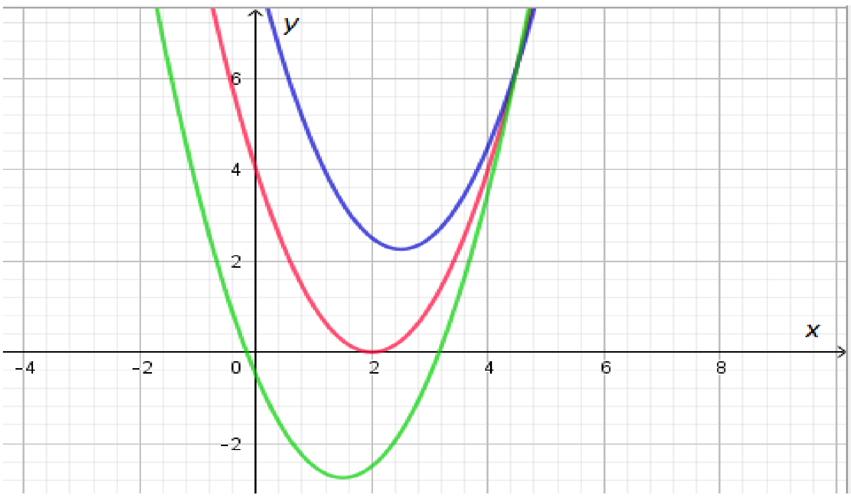

Рис. 19. Задание 6

Из условия задачи, нас удовлетворяют 2 способа расположения парабол: красная и синяя, то есть вершина должна касаться, либо быть выше оси x. Для этого найдем $x_в$ и $y_в$ параболы из уравнения.

$$x_в = \frac{-b}{2a} = \frac{2(a+1)}{2} = a + 1$$
$$y_в = (a+1)^2 - 2(a+1)^2 + 9a - 5 = -a^2 + 7a - 6,$$

по условию задачи $y_в \geq 0$, отсюда получим квадратичное неравенство $-a^2 + 7a - 6 \geq 0$. Решая уравнение, найдем корни $a_1 = 1, a_2 = 6$. Отметим их на координатной прямой a, укажем удовлетворяющее нас множество (рис. 20).

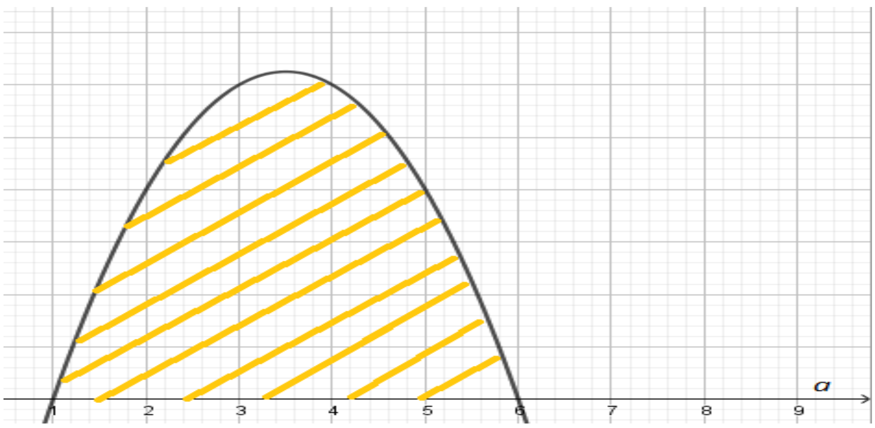

Рис. 20. Множество решений

Ответ: $a \in [1; 6]$.

7. При каких значениях параметра a неравенство

$$ax + |x^2 - 4x + 3| > 1$$

выполнится для всех x [24]?

Решение: Преобразуем неравенство к виду: $|x^2 - 4x + 3| > 1 - ax$. Представим его в виде системы

$$\begin{cases} y = |x^2 - 4x + 3|, \\ y = 1 - ax. \end{cases} \quad (11)$$

Графиком второй функции является семейство прямых, вращающихся вокруг точки с координатами $(0;\ 1)$. Неравенство будет верным для любого x, при условии, что график функции $y = |x^2 - 4x + 3|$ находится строго правее прямой (не имеет общих точек). Построим графики функций на координатной плоскости *xOy* (рис. 21).

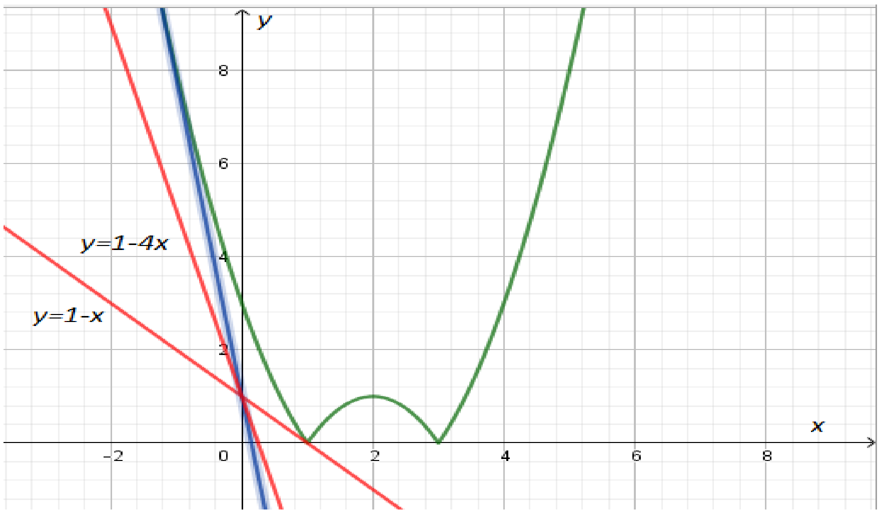

Рис. 21. Задание 7

Очевидно, что точка пересечения графиков имеет координаты $(1;\ 0)$, отсюда следует, что $a = 1$. При увеличении значения параметра, прямая приближается к первой функции справа, значит, нужно найти точку их касания. Чтобы найти касательную к графику функции $y = |x^2 - 4x + 3|$ в точке x_0, выполним действия: $y(x_0) = {x_0}^2 - 4x_0 + 3$, $y'^{(x_0)} = 2x_0 - 4$, тогда уравнение касательной примет вид: $f(x) = (2x_0 - 4)x - {x_0}^2 + 3 \rightarrow -{x_0}^2 + 3 = 1 \rightarrow x_0 = \pm\sqrt{2}$, так как $x_0 < 0$, то $x_0 = -\sqrt{2}$. Производная для функции $y = 1 - ax$ равна $(-a)$. Приравняем их: $-a = 2x_0 - 4$, подставим значение x_0: $-a = -2\sqrt{2} - 4$, $a = 2\sqrt{2} + 4$.

Значит, неравенство $ax + |x^2 - 4x + 3| > 1$ выполняется для любых x при $1 < a < 2\sqrt{2} + 4$.

Ответ: $a \in (1;\ 2\sqrt{2} + 4)$.

8. Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество решений неравенства $(p-x^2)(p+x-2) \leq 0$ не содержит ни одной точки из отрезка $x \in [-1; 1]$ [24].

Решение: Преобразуем неравенство $(p-x^2)(p+x-2) \leq 0 \rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} p \geq x^2, \\ p \leq 2-x \end{cases} \\ \begin{cases} p \leq x^2, \\ p \geq 2-x \end{cases} \end{array}\right. . \quad (12)$$

Построим множество точек, удовлетворяющих неравенствам (12) на координатной плоскости xOp (рис. 22).

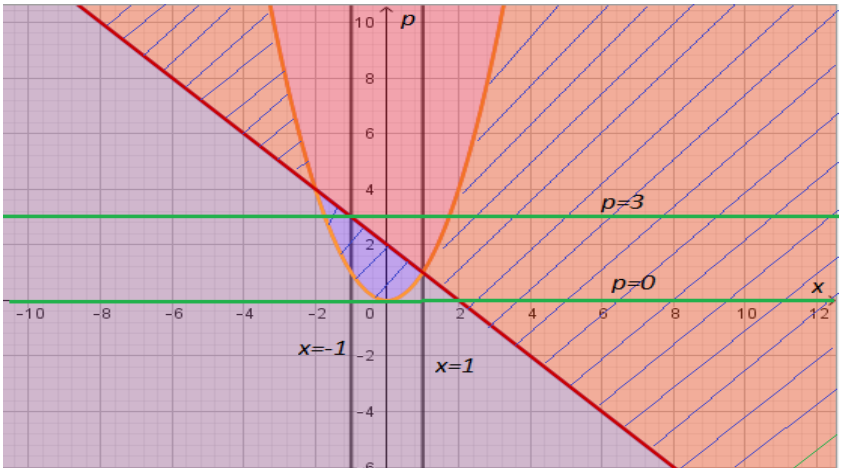

Рис. 22. Задание 8

Множеством решения совокупности систем неравенств является заштрихованная область. Отметим линии $x=-1$, $x=1$ (границы отрезка из условия задачи). Они пересекают параболу в точках $(-1;1), (1;1)$, а прямую $p=2-x$ в точках $(-1;3)$и $(1;1)$. Отсюда следует, что решением задачи будет множество, заключенное между $x=-1$ и $x=1$, но не пересекает заштрихованную область. Значит, решением будет множество, находящееся ниже $p=0$ и выше $p=3$.

Ответ: $p \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

9. Найти все значения параметра a, для которых при каждом $x \in (1; 2]$ выполняется неравенство $\frac{x-2a-1}{x-a} < 0$ [16].

Решение: Рассмотрим 2 случая:

$$\begin{cases} a > x/2 - 1/2 \\ a < x \end{cases} (13) \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < x/2 - 1/2 \\ a > x \end{cases}, (14)$$

так как дробь может быть отрицательной, когда либо числитель, либо знаменатель отрицательный. Отметим область решения системы неравенств (13) на координатной плоскости xOa, а также промежуток $x \in (1; 2]$, в котором неравенство должно выполняться (рис. 23).

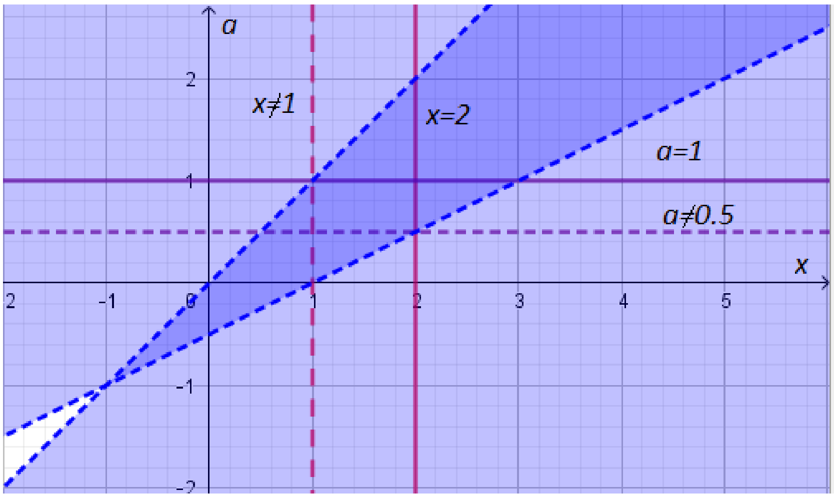

Рис. 23. Область решения

По графику видно, что неравенство выполняется для всех $x \in (1; 2]$ в прямоугольнике при $a \in (0{,}5; 1]$. Построим область решения системы неравенств (14) на координатной прямой, соблюдая условия задачи (рис. 24).

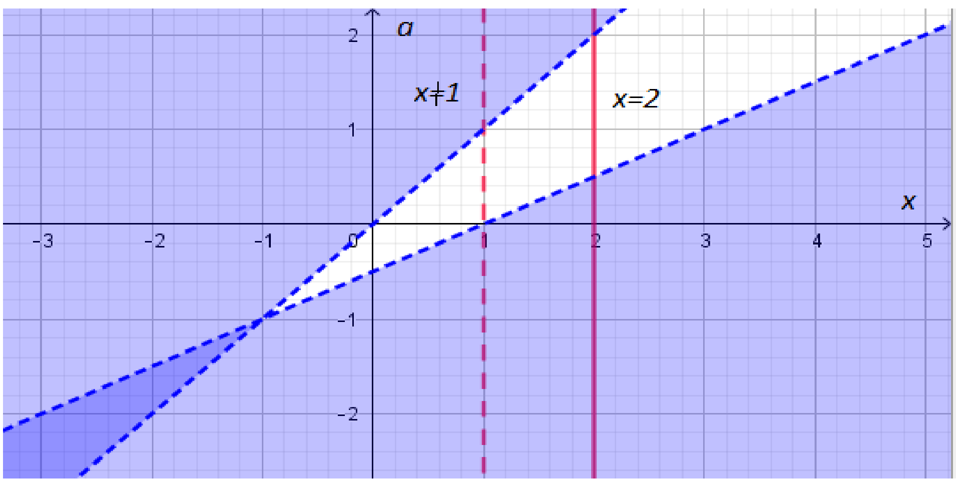

Рис. 24. Область решения

Заметим, что неравенство не выполняется для всех $x \in (1; 2]$.

Ответ: $a \in (0{,}5; 1]$.

10. При каких значения параметра a неравенство $4^x > 2 \cdot 2^x - a$ имеет решение при любых значениях x?

Решение: Преобразуем неравенство:

$$-a < 4^x - 2 \cdot 2^x \ \rightarrow a > -4^x + 2 \cdot 2^x.$$

Построим на координатной плоскости xOa график функции $a(x) = 2 \cdot 2^x - 4^x$ и отметим область решения неравенства (рис. 25).

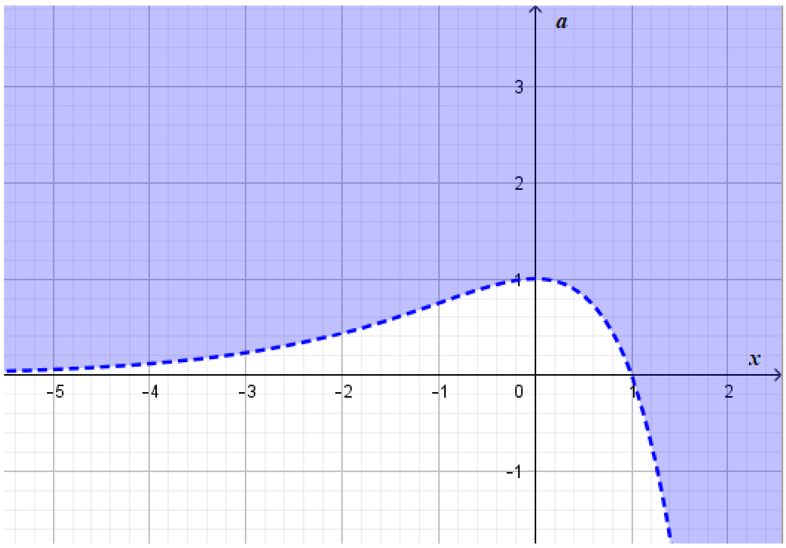

Рис. 25. Задание 10

Из графика видим, что неравенство будет иметь решение при всех значениях x, если параметр $a > 1$.

Ответ: $a > 1$.

Решение систем уравнений с параметрами функционально-графическим методом

1. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \tag{15}$$

имеет единственное решение [24]?

Решение: Рассмотрим уравнения системы. Первое задает окружность с центром в точке $(3;\ 0)$ и радиусом $|a|$, второе также окружность с центром в начале координат и радиусом 2. Построим их (рис. 26), придавая различные значения параметру a.

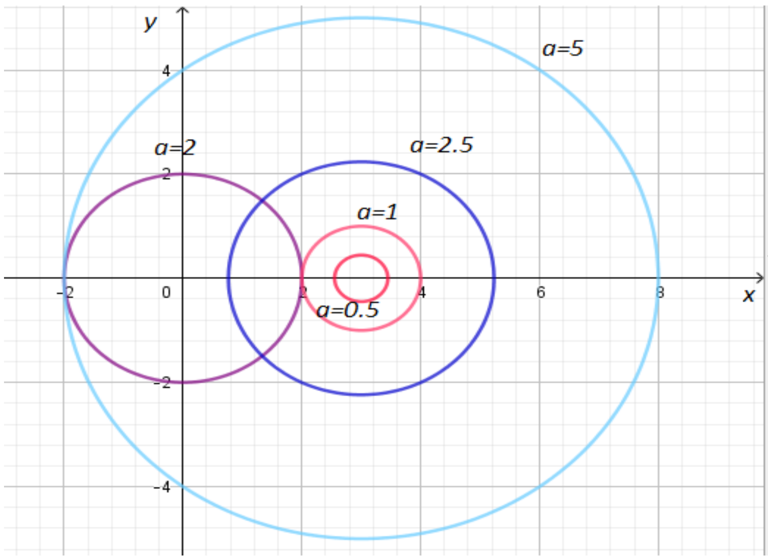

Рис. 26. Задание 1

Заметим, что возможны 2 случая единственного решения системы (в точках касания окружностей). Задавая различные значения параметру, заметим, что если $|a| < 1$ система не имеет решений. При $|a| = 1$ окружности касаются, значит, система имеет единственное решение, при $5 < |a| < 1$ система имеет 2 точки пересечения. При $|a| = 5$ окружности имеют единственное решение.

Ответ: $|a| = 1$, $|a| = 5$.

2. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ |x + y| = 2 \end{cases}$ имеет ровно 2 решения [16]?

Решение: Рассмотрим уравнения системы. Первое задает окружность с центром в начале координат и радиусом $|a|$. Второе две прямые $y = 2 - x$ и $y = -2 - x$. Построим графики линейных функций и окружность, придавая a различные значения (рис. 27).

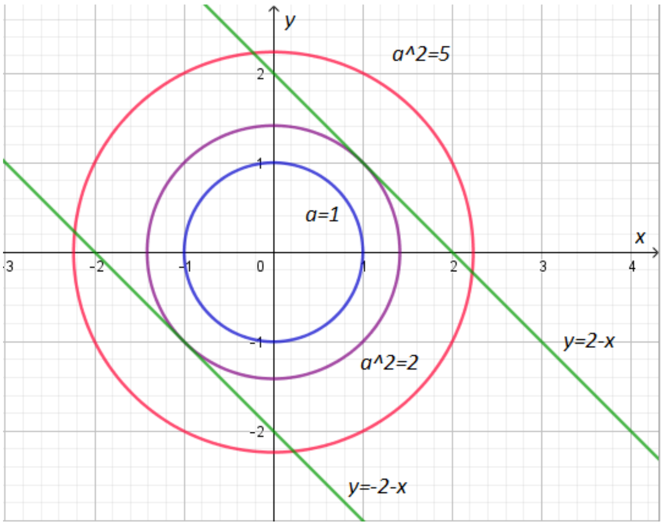

Рис. 27. Задание 2

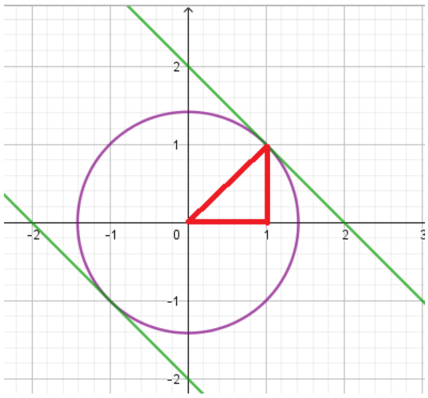

Рис. 28. Прямоугольный треугольник

Заметим из рисунка 27, что система уравнений имеет 2 решения, если окружность находится между двумя прямыми и касается их в двух точках. Найдем точку касания по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника (рис. 28) со сторонами равными 1. Найдем гипотенузу $a^2 = 1^2 + 1^2 \rightarrow a^2 = 2 \rightarrow |a| = \sqrt{2}$. В остальных случаях система либо не имеет решений, либо имеет 4 решения.

Ответ: $|a| = \sqrt{2}$.

3. В зависимости от значений параметра a определить количество решений системы уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases} [27]. \qquad (16)$$

Решение: Первое уравнение системы задает ромб, второе окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{a}$. Построим их в одной системе координат, придавая параметру различные значения (рис. 29).

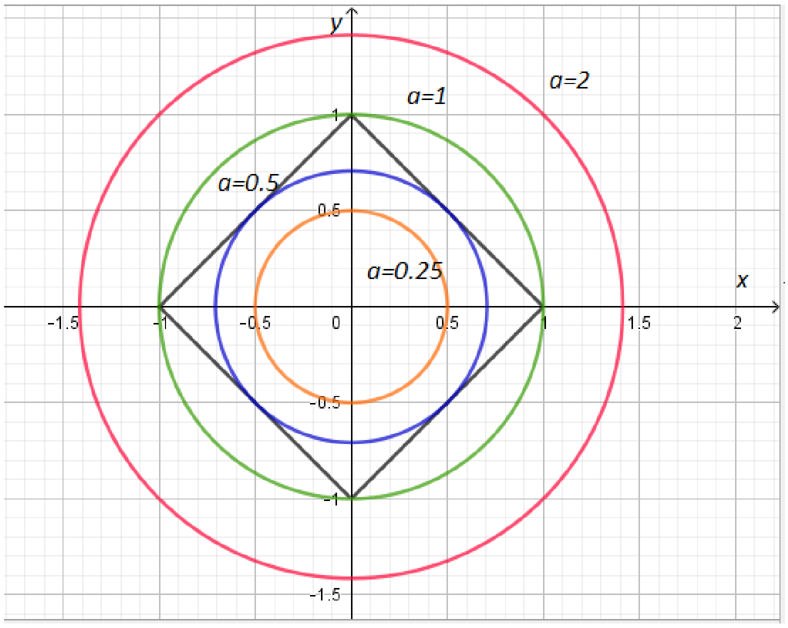

Рис. 29. Задание 3

Рассмотрим получившийся рисунок, при $a > 1$ система уравнений не имеет решений, $a = 1$ – система имеет 4 решения в вершинах ромба. Заметим, что система также имеет 4 решения, если окружность вписана в ромб, отсюда найдем радиус окружности, а затем и значение параметра. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из начала координат, равна радиусу окружности $\sqrt{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \to a = \frac{1}{2}$. На промежутке $a \in (0{,}5; 1)$ система уравнений будет иметь 8 решений (т.к. окружность и ромб будут пересекаться в 8 точках), а при $a < 0{,}5$ снова не имеет решений.

Ответ: система уравнений не имеет решений: $a \in (-\infty; 1) \cup (0{,}5; 0)$; 4 решения: $a = 0.5$ и $a = 1$; 8 решений при $a \in (0{,}5; 1)$.

4. Найти все значения параметра $a > 0$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x| - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4, \\ x^2 + (y - 3)^2 = a^2 \end{cases} \tag{17}$$

имеет ровно 4 решения. Найти значения x и y, в которых система уравнений имеет 2 решения.

Решение: Рассмотрим уравнения системы. Первое задает две симметричные относительно оси ординат окружности с центами в точках $(-3;\ 3)$ и $(3;\ 3)$ радиусом, равным 2. Второе уравнение задает окружность с центром в точке $(0;\ 3)$ и радиусом $|a|$. Построим их графики, придавая параметру различные значения (рис. 30).

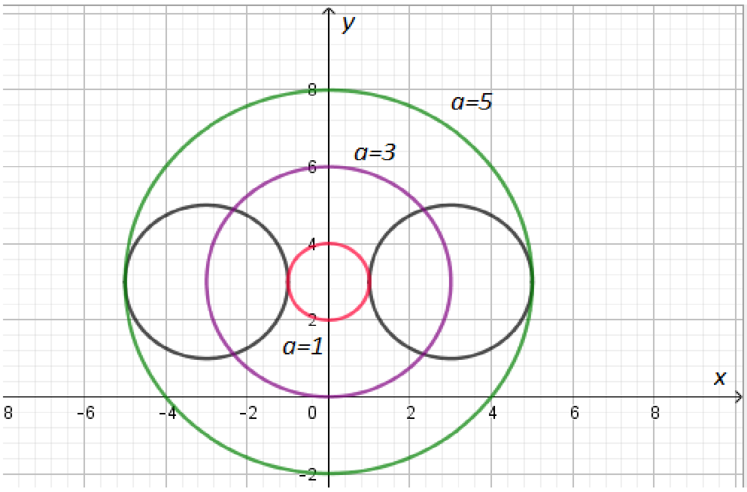

Рис. 30. Задание 4

Окружности будут иметь 2 пересечения в случаях их касания, для этого можем посчитать расстояние, между симметричными окружностями и разделить на 2. В первом случае расстояние равно 2, значит радиус окружности $|a| = 1$. Тогда решениями системы будут координаты точек пересечения: $(-1;\ 3)$ и $(1;\ 3)$. Рассмотрим второй случай, расстояние между крайними точками симметричных окружностей равно 10, следовательно, $|a| = 5$, а решениями будут $(-5;\ 3)$ и $(5;\ 3)$. Очевидно, что система будет иметь ровно 4 решения при $1 < |a| < 5$.

Ответ: система уравнений имеет 4 решения при $1 < |a| < 5$; 2 решения при $|a| = 1$ в точках $(-1;\ 3)$, $(1;\ 3)$ и при $|a| = 5$ в точках $(-5;\ 3)$, $(5;\ 3)$.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \frac{xy^2-2xy-4y+8}{\sqrt{x+4}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$ имеет ровно 2 различных решения [27].

Решение: Отметим ОДЗ первого уравнения: $x + 4 > 0 \rightarrow x > -4$. Тогда перепишем систему, учитывая ОДЗ:

$$\begin{cases} x > -4, \\ xy^2 - 2xy - 4y + 8 = 0,. \\ y = ax \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение $xy^2 - 2xy - 4y + 8 = 0$, сгруппируем его

$$xy(y-2) - 4(y-2) = 0, (y-2)(xy-4) = 0 \rightarrow y - 2 = 0 \text{ или } xy - 4 = 0.$$

Получим следующую систему

$$\begin{cases} x > -4, \\ y = 2, \\ y = \frac{4}{x}, x \neq 0, \\ y = ax. \end{cases} \tag{18}$$

Построим графики функций и отметим область решения неравенства (рис.31).

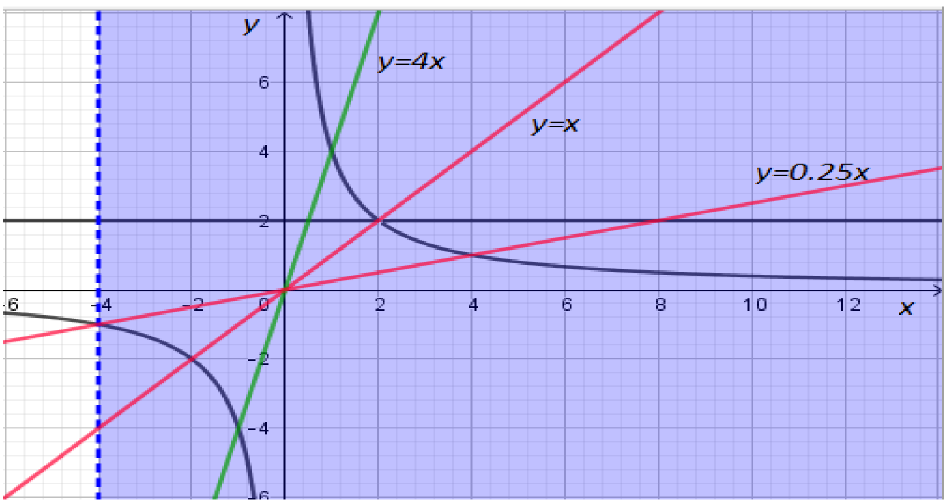

Рис. 31. Задание 5

Исследуем изменения графика, придавая различные значения параметра: при $a = 1$ система уравнений будет иметь 2 решения в точках $(-2;\ -2)$ и $(2;\ 2)$. Учитывая ОДЗ $x > -4$, заметим, что при $x < -4$ и $y \neq 0$ система также будет иметь 2 решения. Найдем значение параметра в точке $(-4;\ -1)$: $-1 = (-4)a \to a = \frac{1}{4}$. Значит, при $a \in (0; 0{,}25)$ система уравнений будет иметь ровно два решения.

Ответ: $a \in (0; 0{,}25) \cup \{1\}$.

Решение систем неравенств с параметрами функционально-графическим методом

1. Определить, при каких значениях a система неравенств

$$\begin{cases} ax - 1 \leq 0, \\ x - 4a \geq 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение [16]?

Решение: Первому неравенству соответствует график гиперболы $a = \frac{1}{x}$, второму график прямой $a = \frac{x}{4}$. Построим графики функций в одной системе координат xOa, отметим множество решений неравенств и найдем пересечение решений их системы (рис. 32).

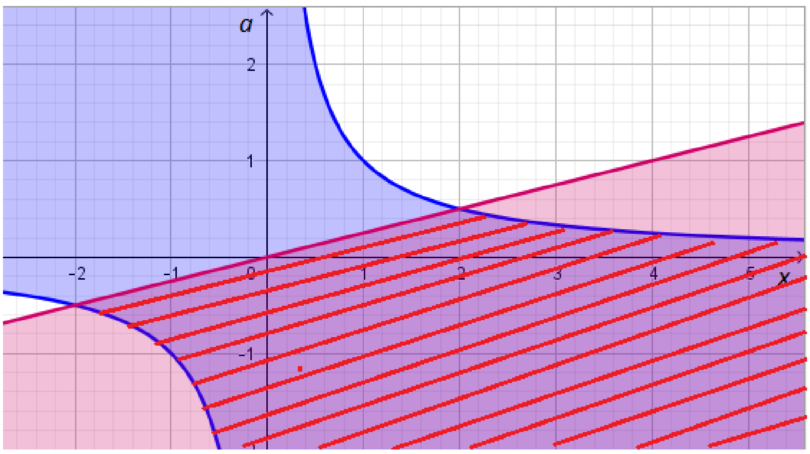

Рис. 32. Множество решений системы неравенств

Решением системы неравенств является множество, совпадающее с «заштрихованной» областью. Для его нахождения будем проводить прямые $a = const$. Очевидно, что при $a > 0{,}5$ система не имеет решений, следовательно, при $a \leq 0{,}5$ данная система неравенств выполняется.

Ответ: $a \leq 0{,}5$.

2. Решить систему неравенств $\begin{cases} x^2 + 2x + a \leq 0, \\ x^2 - 4x - 6a \leq 0 \end{cases}$ [16]

Решение: Преобразуем систему неравенств к виду

$$\begin{cases} a \leq -x^2 - 2x, \\ a \geq \frac{x^2 - 4x}{6} \end{cases}. \qquad (19)$$

Построим графики парабол в системе координат xOa, отметим область решения неравенств (рис. 33).

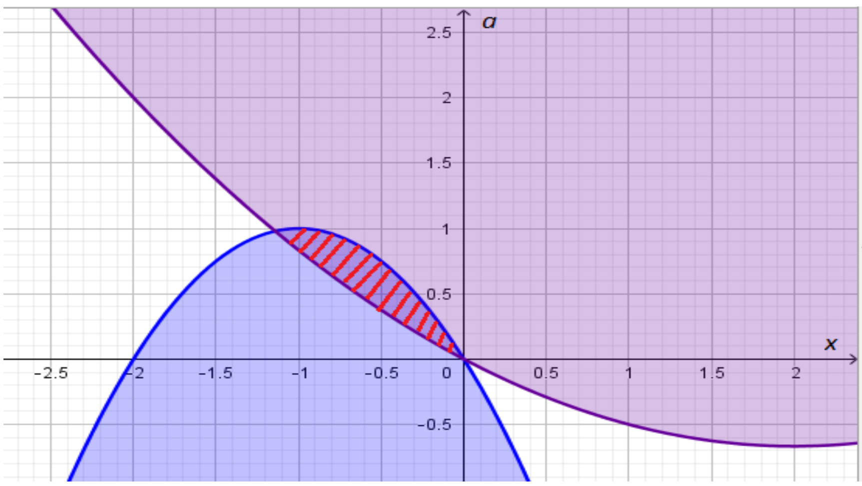

Рис. 33. Задание 2

На графике «штриховкой» показано множество решений системы неравенств. Найдем точки пересечения парабол, для этого приравняем правые части неравенств: $-x^2 - 2x = \frac{x^2 - 4x}{6}$, отсюда получаем $x = 0, x = -\frac{8}{7}$. Также найдем соответствующие значения параметра a: $a = 0, a = \frac{48}{49}$. Системе неравенств удовлетворяют точки, лежащие под первой параболой и над второй. Исследуем получившийся график, придавая параметру различные значения (т.е. мысленно будем проводить прямые $a = const$). При $a < 0$ система не имеет решений, при $a = 0 \to x = 0$. Для промежутка $a \in (0; \frac{48}{49}]$ решением является отрезок, лежащий между меньшим корнем уравнения $x^2 - 4x - 6a = 0$ и большим корнем $x^2 + 2x + a = 0$. Найдем эти корни: $x^2 - 4x - 6a = 0, D = 16 + 24a, \sqrt{D} = 2\sqrt{4 + 6a}$, тогда $x_1 = 2 + \sqrt{4 + 6a}, x_2 = 2 - \sqrt{4 + 6a}$. Меньшим корнем является $x_2 = 2 - \sqrt{4 + 6a}$. $x^2 + 2x + a = 0, D = 4 - 4a, \sqrt{D} = 2\sqrt{1 - a}$, тогда $x_1 = -1 + \sqrt{1 - a}, x_2 = -1 - \sqrt{1 - a}$. Большим корнем уравнения будет $x_1 = -1 + \sqrt{1 - a}$. Значит для $a \in (0; \frac{48}{49}]$ $x \in [2 - \sqrt{4 + 6a};\ -1 + \sqrt{1 - a}]$. Если $a \in (\frac{48}{49}; 1)$, то решением получится отрезок, лежащий между меньшим и большим корнями уравнения $x^2 + 2x + a = 0$: $x \in (-1 - \sqrt{1 - a};\ -1 + \sqrt{1 - a})$. При $a = 1$ точка $x = -1$, $a > 1$ система не имеет решений.

Ответ: система не имеет решений при $a < 0$ и $a > 1$;

одно решение при $a = 0$ $x = 0$ и $a = 1$ $x = -1$;

множество решений $a \in (0; \frac{48}{49}]$ $x \in [2 - \sqrt{4 + 6a};\ -1 + \sqrt{1 - a}]$ и $a \in (\frac{48}{49}; 1)$ $x \in (-1 - \sqrt{1 - a};\ -1 + \sqrt{1 - a})$.

3. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 2y \le a^2 - 5, \\ x^2 + y^2 - 8x - 14y \ge 4a^2 + 12a - 56 \end{cases}$$

имеет единственное решение [24]?

Решение: Преобразуем неравенства системы.

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y \le a^2 - 5 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5 \le a^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 \le a^2 \Leftrightarrow$$

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 \le a^2$$

Второе неравенство примет вид:

$$x^2 + y^2 - 8x - 14y \ge 4a^2 + 12a - 56 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 14y + 49 \geq 4a^2 + 12a + 9 \Leftrightarrow$$
$$(x-4)^2 + (y-7)^2 \geq (2a+3)^2.$$

После всех преобразований получим систему:

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 \leq a^2, \\ (x-4)^2 + (y-7)^2 \geq (2a+3)^2. \end{cases}$$

Первое неравенство задает внутреннюю область окружности с центром в точке $(-2; -1)$ и радиусом $|a|$, второе внешнюю область окружности с центром в точке $(4; 7)$ и радиусом $|2a+3|$. Заметим, что при $a = 0$ система примет вид: $\begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 \leq 0, \\ (x-4)^2 + (y-7)^2 \geq 9, \end{cases}$ получим точку с координатами $(-2; -1)$ и окружность с центром $(4; 7)$ и радиусом, равным 3. Так как область второго неравенства равна внешней части окружности, а точка с координатами $(-2; -1)$ лежит в этой области, следовательно, система неравенств будет иметь единственное решение. Построим график полученного случая (рис. 34).

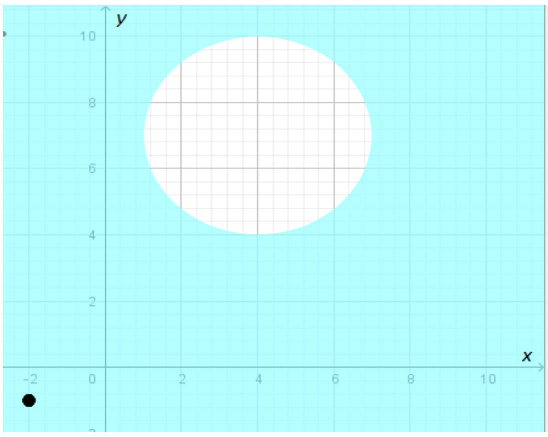

Рис. 34. Множество решений системы неравенств при a=0

При $a \neq 0$ система имеет единственное решение в случае касания этих окружностей. Найдем точки пересечения: $|a| + 10 = |2a+3|$. Решим уравнение, раскрывая знак модуля: 1) $a + 10 = 2a + 3 \rightarrow a = 7$;

2) $-a + 10 = -2a - 3 \rightarrow a = -13$.

Построим графики при $a = 7$ и $a = -13$ (рис. 35, 36).

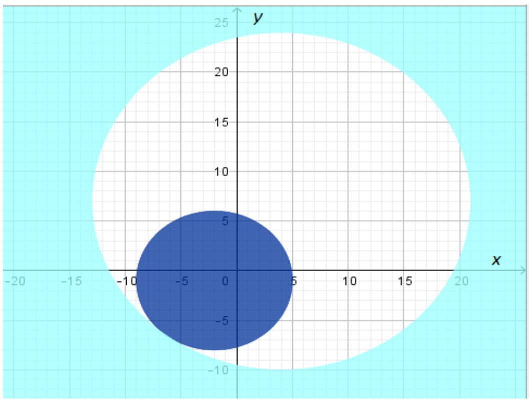

Рис. 35. Решение системы неравенств при $\boldsymbol{a = 7}$

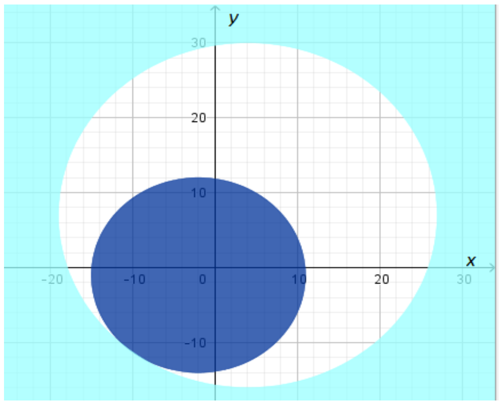

Рис. 36. Решение системы неравенств при $\boldsymbol{a = -13}$

Ответ: $a = -13$, $a = 0$, $a = 7$.

4. Решить систему неравенств $\begin{cases} \log_{2-|x|}(1-a) < 0, \\ \sqrt{2x-2} > \sqrt{a+2} \end{cases}$ [24].

Решение: Запишем область определения системы неравенств:

$$\begin{cases} 2-|x| > 0, \\ 2-|x| \neq 1, \\ 1-a > 0, \\ 2x-2 \geq 0, \\ a+2 \geq 0 \end{cases} \to \begin{cases} 1 < x < 2, \\ -2 \leq a < 1 \end{cases}.$$

На области определения верно, что

$$0 < 2-|x| < 1\colon \log_{2-|x|}(1-a) < 0 \ \to 1-a > 1 \ \to a < 0.$$

Для второго неравенства $\sqrt{2x-2} > \sqrt{a+2} \to x > \frac{a}{2} + 2$. Тогда на области определения получим:

$$\begin{cases} 1 < x < 2, \\ x > \frac{a}{2} + 2, \\ -2 \leq a < 0 \end{cases}. \tag{20}$$

Построим области решения неравенств на координатной плоскости aOx (рис. 37).

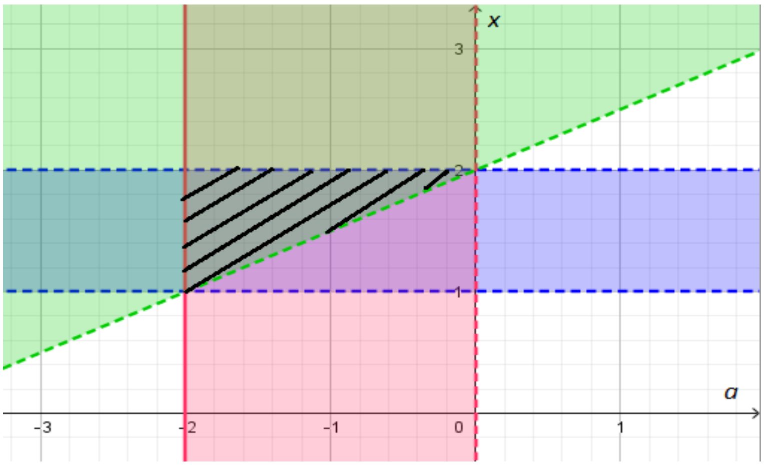

Рис. 37. Множество решений системы неравенств (20)

Из графика, заметим, что $-2 \le a < 0 \rightarrow 1 \le \frac{a}{2} + 2 < 2$, верно и $\frac{a}{2} + 2 < x < 2$. При $a < -2$ система не имеет решений, при $-2 \le a < 0$, $\frac{a}{2} + 2 < x < 2$. При $a \ge 0$ система также не имеет решений.

Ответ: система не имеет решений при $a < -2$ и $a \ge 0$,

при $-2 \le a < 0$ система имеет множество решений $\frac{a}{2} + 2 < x < 2$.

5. Решить систему неравенств $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(2x + a - 2) > \log_{\frac{1}{3}}(a + 1), \\ \sqrt{a - 2x - 3} < \sqrt{3 - 2x} \end{cases}$ [27].

Решение: Для начала упростим неравенства системы.

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x + a - 2) > \log_{\frac{1}{3}}(a + 1)$$

Так как основание логарифма меньше 1, то при потенцировании знак неравенства меняется, следовательно, неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 2x + a - 2 < a + 1, \\ 2x + a - 2 > 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим второе неравенство системы $\sqrt{a - 2x - 3} < \sqrt{3 - 2x}$. Возведем обе части в квадрат, учитывая область определения. Тогда неравенство будет равносильно системе неравенств: $\begin{cases} a - 2x - 3 < 3 - 2x, \\ a - 2x - 3 \ge 0 \end{cases}$.

Приведем подобные слагаемые в обеих системах и объединим в одну:

$$\begin{cases} x < 1{,}5, \\ a > 2 - 2x, \\ a < 6, \\ a \geq 3 + 2x \end{cases}. \tag{21}$$

Построим области решения неравенств на xOa (рис. 38).

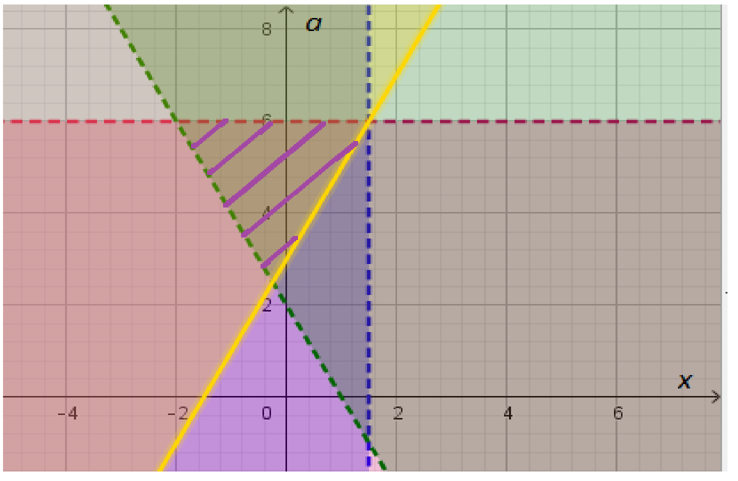

Рис. 38 Множество решений системы неравенств (21)

Заметим, что решением системы неравенств является «заштрихованный» треугольник. Для исследования необходимо уточнить координаты точек пересечения, для этого решим следующие системы:

$$\begin{cases} a = 2x + 3, \\ a = -2x + 2 \end{cases} \to a = 2{,}5\,; x = -0{,}25.$$

$$\begin{cases} a = 2x + 3, \\ a = 6 \end{cases} \to x = 1{,}5.$$

$$\begin{cases} a = 6, \\ a = -2x + 2 \end{cases} \to x = -2.$$

Отсюда, треугольник имеет координаты $(-0{,}25;\ 2{,}5)$, $(1{,}5;\ 6)$, $(-2;\ 6)$. Проведем исследование: при $a \leq 2{,}5$ и $a \geq 6$ система не имеет решений, при $2{,}5 < a < 6$ система имеет множество решений $x \in (1 - \frac{a}{2};\ \frac{a-3}{2})$.

Ответ: система не имеет решений при $a \leq 2{,}5$ и $a \geq 6$;

при $2{,}5 < a < 6$ множество $x \in (1 - \frac{a}{2};\ \frac{a-3}{2})$.

2.2. Пояснительная записка к курсу «Применение функционально-графического метода при решении задач с параметрами в итоговой аттестации»

Курс «Применение функционально-графичексого метода при решении задач с параметрами в итоговой аттестации» предназначен для подготовки учащихся 11-х классов. Цель курса: обобщить, систематизировать знания, умения и навыки учащихся по построению и преобразованию графиков функций, изучить функционально-графический метод для решения задач с параметрами.

Задачи с параметрами относятся к существенной и важной части содержания современного математического образования. Умение решать данные задания считается признаком высокого уровня знаний математики. Недостаточно простого применения «зазубренных» формул, необходимо понимание учениками закономерностей, наличие у них навыка анализа конкретного случая на основе общих свойств объекта, системности и последовательности. Преподавание краткосрочного курса строится на углубленном изучении вопросов, предусмотренных программой основного курса. Оно реализуется в процессе обучения при использовании приемов решения математических задач, требующих применение высокой логической культуры и алгоритмического мышления.

Курс рассчитан на 6 часов: включает в себя теоретический и практический материал, тестовые задания. Направлен на решение задач:

1) пробуждение и развитие интереса к математике, повышение математические культуры учащихся;

2) повторение изученного материала в основной школе по теме «Функция»;

3) изучение функционально-графического метода при решении нестандартных задач;

4) расширение и углубление знаний учащихся по программному материалу.

В процессе преподавания краткосрочного курса используются технологии, направленные на получение учащимися практических навыков, позволяющие овладеть общеучебными умениями для усвоения программы.

В результате изучения курса учащиеся приобретут следующие умения и навыки:

1) использовать функционально-графический метод при решении задач с параметрами;

2) логически мыслить, рассуждать, делать выводы и обосновывать полученные результаты.

Результат обучения выражается в повышении математической культуры и применении полученных знаний для решения практических задач.

Таблица 3

Учебно-тематический план

№	Тема	Занятие	Часы	Форма проведения занятия
1	Понятие «функция»	Понятие функции и ее свойства	1	Беседа, входное тестирование
2	Графики в заданиях ОГЭ	Построение графиков функций в заданиях ОГЭ	1	Групповая работа, беседа
3	Функционально-графический метод	Алгоритм решения задач с параметрами, решение уравнений с параметрами	4	Лекция, практическая работа
		Решение систем уравнений с параметрами		

№	Тема	Занятие	Часы	Форма проведения занятия
		Решение неравенств с параметрами		
		Решение систем неравенств с параметрами		

Разработка занятий представлена в Приложении 1.

2.3. О результатах проведенных занятий по теме «Функционально-графический метод» в 11-м классе Гимназии № 1 г.Перми

В качестве апробации результатов исследования было составлено и проведено элективное занятие с последующим анкетированием для учащихся 11-го класса Гимназии № 1 г. Перми.

Тема занятия «Применение функционально-графического метода при решении задач с параметрами в ЕГЭ». Состоит из трех этапов: теоретический, практический и рефлексия (анкетирование). На первом этапе актуализируются знания учащихся по известным понятиям, функционально-графическому методу решения уравнений. На основе известного алгоритма с помощью методов сравнения, анализа и обобщения составляются алгоритмы решения задач с параметрами функционально-графическим методом на координатных плоскостях xOy, xOa. Для второго этапа занятия были отобраны задания из Главы II настоящей выпускной квалификационной работы. Практические задачи распределены по принципу от простых к сложным. Для осуществления этапа рефлексии составлена анкета, в которой содержатся вопросы закрытого и открытого типов. В качестве вспомогательного элемента использовалась презентация.

Ход занятия

I этап

– Здравствуйте, меня зовут Вероника Александровна, и сегодня я проведу для вас элективное занятие на тему «применение функционально-графического метода при решении задач с параметрами».

– Для начала вспомним, что такое параметр? Что значит решить задачу с параметром, а также суть функционально-графического метода?

- *Параметр* – независимая переменная, значение которой в данной задаче считается фиксированным или произвольным действительным числом, или числом, принадлежащим заранее оговоренному множеству.
- *Решить задачу с параметром* – значит, предъявить обоснованный ответ либо для любого значения параметра, либо для значения параметра, принадлежащего заранее оговоренному множеству. Если требуется найти значение параметра, при которых множество решений задачи удовлетворяет объявленному условию, то решение состоит в поиске указанных значений параметра.
- *Функционально-графический метод* – это метод, основанный на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств.

– Поднимите руки те, кто приступал к решению задачи с параметром при подготовке к ЕГЭ и с легкостью может ее решить?

– Кто ни разу не приступал к данным задачам, и вообще не имеет понятия как ее решать?

– Кто может назвать определение понятия «Задача с параметром»?

- *Задача с параметром* – условие задачи, представленное в виде уравнений, неравенств или систем, совокупностей.

- Какие типы задач с параметрами вы знаете?

- нахождение решения для любых значений параметра или значений из указанного множества;
- определение всех значений параметра, при указанном количестве решений;

- нахождение количества решений в зависимости от значений параметра;
- определение всех значений параметра, при которых множество решений удовлетворяет заданным условиям.

– Давайте вспомним алгоритм функционально-графического метода при решении уравнений и выясним в чем будет отличие для задач с параметром.

- Функционально-графический метод при решении уравнения вида $g(x) = f(x)$.

1. Записать левую и правую часть уравнения в виде функций: $y = g(x), y = f(x)$.
2. Построить графики получившихся функций в одной системе координат.
3. Учесть свойства функций.
4. Найти точки пересечения и их абсциссы.
5. Записать ответ.

– Попробуем проанализировать и понять в чем же отличие алгоритма метода для уравнений с параметром и попытаемся обобщить для всех задач. Выдвигайте свои предположения.

Алгоритм решения задач с параметрами функционально-графическим методом в координатной плоскости xOy

1. Найти область определения функций, входящих в условие задачи.
2. Построить графики функций в координатной плоскости xOy.
3. Проанализировать преобразования графиков функций в зависимости от параметра.
4. Сформулировать ответ, удовлетворяющий условию задачи.

Алгоритм решения задач с параметрами функционально-графическим методом в координатной плоскости xOa, aOx

1. Привести уравнение или неравенство к виду $x \vee f(a)$ или $a \vee f(x)$, где $\vee$ – знак сравнения.

2. Найти область допустимых значений переменной и параметра.

3. Построить графики функций на координатной плоскости xOa или aOx.

4. Отметить линии из области допустимых значений.

5. Проанализировать изменения графиков функций в зависимости от параметра.

6. Сформулировать ответ, удовлетворяющий условию задачи.

II этап (практика)

1. При каких значениях параметра a уравнение $|x-1|-1=a$ не имеет решений?

2. Для каждого значения параметра c найдите число корней уравнения $\big||2x-6|-2\big|=-x+c$.

3. При каких значениях параметра a неравенство $x^2+y^2\le 6x-4y+a^2-13$ имеет не менее пяти целочисленных решения?

4. Решить неравенство $|\mathrm{x}|+|\mathrm{a}|\le 1$.

5. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ |x+y|=2 \end{cases}$ имеет ровно 2 решения?

6. Решить систему неравенств $\begin{cases} x^2+2x+a\le 0, \\ x^2-4x-6a\le 0 \end{cases}$.

III этап (рефлексия в виде анкетирования)

Анкета

1. *Каким на Ваш взгляд является задание с параметром в ЕГЭ?*
- Сложным
- Средней сложности
- Легким

2. *Как Вы считаете, в чем заключается причина низкого процента выполняемости учащимися задания с параметрами на ЕГЭ?*

____

3. *Как Вы считаете, нужен ли данный тип заданий на ЕГЭ? Обоснуйте свой ответ.*

____

4. *Решали ли Вы раньше при самостоятельной подготовке к экзамену данный тип заданий (если да, укажите метод, который чаще всего использовали)?*

- Да, ____
- Нет

5. *Узнали ли Вы что-то новое для себя на занятии?*

- Да
- Нет

6. *Изменилось ли Ваше представление о задачах с параметрами после проведенного занятия на тему «Применение функционально-графического метода при решении задач с параметрами в ЕГЭ» (укажите причину)?*

- Да, ____
- Нет, ____

7. *Будете ли Вы приступать к решению заданий с параметрами при самостоятельной подготовке и на экзамене?*

- Да
- Нет
- Зависит от задания

8. *Будете ли Вы использовать функционально-графический метод при решении задач с параметрами, почему?*

- Да, ____
- Нет, ____

9. *Перечислите преимущества функционально-графического метода при решении задач с параметрами.*

____

10. *Перечислите недостатки функционально-графического метода при решении задач с параметрами.*

____

Анализ результатов анкетирования

В анкетировании принимало участие 20 учащихся как профильного, так и повышенного уровня обучения. В ходе анализа по вопросам анкеты получены результаты:

1. *Каким на Ваш взгляд является задание с параметром в ЕГЭ?*

- Сложным – 13 учащихся (65%)
- Средней сложности – 3 учащихся (15%)
- Легким – 4 учащихся (20%)

Рис. 39. Диаграмма

2. *Как Вы считаете, в чем заключается причина низкого процента выполняемости учащимися задания с параметрами на ЕГЭ?*

Причины, выделенные учащимися:

- нехватка времени;

- тема не преподается в полной мере;

- непонимание сути задания;

- нет в курсе школьной программы;

- отсутствие потребности в высоком балле;

- нежелание разбирать данный тип задания;

- для решения нужно иметь хороший багаж знаний.

3. *Как Вы считаете, нужен ли данный тип заданий на ЕГЭ? Обоснуйте свой ответ.*

Мнения учащихся разделилось на 3 типа (да – 8, нет – 10, не знаю – 1).

Причины «за» данное задание:

- проверка знаний в определенной области математики;

- показывает уровень математических знаний, умение анализировать и решать сложные задачи.

Причины «против» задания:

- простое для проверки знаний профильного уровня;

- узкоспециализированное задание;

- процент решаемости минимален;

- нехватка времени.

4. Решали ли Вы раньше при самостоятельной подготовке к экзамену данный тип заданий (если да, укажите метод, который чаще всего использовали)?

- Да – 7 учащихся (35%)
- Нет – 13 учащихся (65%)

Учащиеся отметили два метода: графический и функционально-графический.

5. Узнали ли Вы что-то новое для себя на занятии?

Все учащиеся дали положительный ответ.

6. Изменилось ли Ваше представление о задачах с параметрами после проведенного занятия на тему «Применение функционально-графического метода при решении задач с параметрами в ЕГЭ» (укажите причину)?

16 учащихся отметили, что их мнение изменилось, и привели следующие причины:

- понимание, в том, что задание вполне реально решить;
- прошла боязнь сложных непонятных переменных;
- в школьной программе не изучался данный метод;
- удобный метод.

7. Будете ли Вы приступать к решению заданий с параметрами при самостоятельной подготовке и на экзамене?

- Да – 12 учащихся (60%)
- Нет – 1 учащийся (5%)
- Зависит от задания – 7 учащихся (35%)

Рис. 40. Диаграмма

8. *Будете ли Вы использовать функционально-графический метод при решении задач с параметрами, почему?*

- Да – 17 учащихся (85%)
- Нет – 3 учащихся (15%)

Большинство учащихся отметило, что данный метод понятный, простой, легкий и наглядный.

9. *Перечислите преимущества функционально-графического метода при решении задач с параметрами.*

Учащиеся выделили следующие преимущества метода:

1) визуальное представление;
2) наглядность;
3) удобный, приятный и комфортный;
4) простота анализа;
5) быстрота решения.

10. *Перечислите недостатки функционально-графического метода при решении задач с параметрами.*

1) возможность ошибки в построении графиков;
2) не всегда удобно применять;
3) неточность в некоторых ситуациях;
4) слишком просто, неинтересно.

Выводы

1. Изучение функционально-графического метода при решении задач с параметрами в школьном курсе математики.

2. На начальном этапе изучения метода использование математических программ для наглядности и организации исследовательской деятельности учащихся.

3. Для эффективной подготовки учащихся к решению задач с параметрами функционально-графическим методом использовать серию элективных занятий или краткосрочные курсы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выпускная квалификационная работа посвящена функционально-графическому методу при решении задач с параметрами в итоговой аттестации учащихся.

В ходе исследования были решены все поставленные задачи и получены следующие результаты:

1) изучены учебно-методическая, математическая и историческая литература по теме исследования;

2) подобраны задачи с параметрами из контрольно-измерительных материалов Единого государственного экзамена и приведены их решения;

3) разработан курс «Применение функционально-графического метода при решении задач с параметрами в итоговой аттестации»;

4) разработано и апробировано занятие элективного курса по теме «Применение функционально-графического метода при решении задач с параметрами в ЕГЭ»;

5) проведено анкетирование учащихся 11-го класса Гимназии № 1;

6) составлены тексты задач с параметрами: три для программы Wolfram Mathematica 10 и пять – для GeoGebra.

На основе приведенных результатов сформулированы выводы.

1. Знакомство с параметрическими задачами методически правильно начинать с 7-го классов параллельно с соответствующими разделами школьной программы;

2. На начальном этапе изучения функционально-графического метода необходимо применять образовательные математические программы (например, GeoGebra) для самостоятельного исследования учащимися.

К самостоятельно полученным результатам следует отнести:

1) разработка курса «Применение функционально-графического метода при решении задач с параметрами в итоговой аттестации»;

2) разработка и проведение занятия элективного курса «Применение функционально-графического метода при решении задач с параметрами в ЕГЭ» (16 апреля 2018 г.) для учащихся 11-го класса Гимназии № 1;

3) составление собственных задач с параметрами;

4) публикация тезисов сообщений (2017, 2018 гг.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *StudFiles* Методические особенности изучения функциональной линии [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://studfiles.net/preview/6064540/page:22/ (дата обращения 12 марта 2018 г.).
2. *UniEducation* Графический метод в задачах с параметром. Продолжение решения задач [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://dp-adilet.kz/graficheskij-metod-v-zadachax-s-parametrom-prodolzhenie-resheniya-zadach/ (дата обращения 13 февраля 2018 г.).
3. *UniEducation* Функционально-графический метод [Электронный ресурс] – Режим доступа: dp-adilet.kz/funkcionalno-graficheskij-metod/ (дата обращения 1 марта 2018 г.).
4. *Болгарский Б.В.* Очерки по истории математики / Б.В. Болгарский. – 2-е изд., испр. и доп. – Мн.: Выш. школа, 1979. – 368 с.
5. *Большой* Энциклопедический Словарь [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vedu.ru/bigencdic/46232/. (дата обращения 13 марта 2018 г.).
6. *Высоцкий В.С.* Задачи с параметрами при подготовке к ЕГЭ / В.С. Высоцкий. – М.: Научный мир, 2011. – 316 с.
7. *Глейзер Г.И.* История математики в школе: IX-X кл. Пособие для учителей / Г.И. Глейзер – М.: Просвещение, 1983. – 351 с
8. *Глейзер Г.И.* История математики в школе: VII-VIII кл. Пособие для учителей / Г.И. Глейзер – М.: Просвещение, 1982 – 340 с.
9. *Горнштейн П.И.* Задачи с параметрами / П.И. Горнштейн, М.С. Якир, В.Б.Полонский. – 3-е изд. – М.: Илекса, 2005. – 328 с.
10. *Журнал «Директор школы»* Аттестация учащихся: цели, функции, методы [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://irbey1.narod.ru/met2.htm (дата обращения 7 февраля 2018 г.).

11. *Захаров В.С.* Неравенства и системы неравенств. Задание С3 / В.С. Захаров. – Электронное пособие, 2013. – 75 с.

12. *ИНФОУРОК* Подборка исторического материала по алгебре и геометрии [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://infourok.ru/podborka-istoricheskogo-materiala-za-kurs-klassa-po-algebre-i-geometrii-620014.html. (дата обращения 12 февраля 2018 г.).

13. *Козко А.И., Чирский В.Г.* Задачи с параметром и другие сложные задачи / А.И. Козко, В.Г. Чирский. – М.: МЦНМО, 2007. – 296 с.

14. *КонсультантПлюс* Постановление Правительства РФ от 15.07.2013 №594 (ред. От 04.11.2017) «Об утверждении Положения о Федеральной службе по надзору в сфере образования и науки» [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.consultant.ru/cons/cgi/online.cgi?req=doc&base=LAW&n=282313&fld=134&dst=100010,0&rnd=0.89088165636356#0. (дата обращения 7 февраля 2018 г.).

15. *КонсультантПлюс* Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012 №273-ФЗ (последняя редакция) [Электронный ресурс] – Режим доступа: www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_140174/. (дата обращения 7 февраля 2018 г.).

16. *Концепт* Научно-методический электронный журнал [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://e-koncept.ru (дата обращения 7 февраля 2018 г.).

17. *Корянов А.Г., Прокофьев А.А.* / Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников: лекции 1–4. / А.Г. Корянов, А.А. Прокофьев – М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2012. – 104 с.

18. *Крамор В.С.* Задачи с параметрами и методы их решения / В.С. Крамор. – М.: Оникс, 2007. – 416 с.

19. *Мир знаний* Методика обучения решению задач с параметрами на уроках основной школы [Электронный ресурс] – Режим доступа:

http://mirznanii.com/a/178537/metodika-obucheniya-resheniyu-zadach-s-parametrami-na-urokakh-algebry-osnovnoy-shkoly (дата обращения 12 марта 2018 г.).

20. *Мордкович А.Г.* Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2014. – 311 с.

21. *Натяганов В.Л.* Методы решения задач с параметрами. Часть 4 / В.Л. Натяганов, Л.М. Лужина. – М.: Дрофа, 1994. – 32 с.

22. *Первое сентября* О задачах с параметром [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://mat.1september.ru/view_article.php?ID=200202302. (дата обращения 27 января 2018 г.).

23. *Покровский В.П.* Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия: учеб.-метод. пособие / В.П. Покровский; Владим. гос. ун-т им. А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир: ВлГУ, 2014. – 143 с.

24. *Прокофьев А.А.* Задачи с параметрами / А.А. Прокофьев. – М.: МИЭТ, 2004. – 258 с.

25. *Прокофьев А.А.* Рекомендации по подготовке к выполнению задания № 18 (задачи с параметром) ЕГЭ профильного уровня [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://docplayer.ru/72937196-Rekomendacii-po-podgotovke-k-vypolneniyu-zadaniya-18-zadachi-s-parametrom-ege-profilnogo-urovnya.html. (дата обращения 31 января 2018 г.).

26. *Прокофьев А.А.* Технология подготовки учащихся к овладению функционально-графическими методами решения задач с параметрами [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://docplayer.ru/32751313-Zanyatie-2-tehnologiya-podgotovki-uchashchihsya-k-ovladeniyu-funkcionalnymi-metodami-resheniya-zadach-s-parametrami-prokofev-aleksandr-aleksandrovich.html. (дата обращения 31 января 2018 г.).

27. *Решу ЕГЭ* Образовательный портал для подготовки к экзаменам: Математика профильный уровень [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://math-ege.sdamgia.ru/ (дата обращения 28 марта 2018 г.).

28. *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк. – 5-е изд., испр. – М.: Наука, 1990. – 256 с.

29. *Тиняков И.Г.* Задачи с параметрами / И.Г. Тиняков. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 1996. – 96 с.

30. *Тиняков И.Г.* Задачи с параметрами / И.Г. Тиняков. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2001. – 98 с.

31. *Толковый* словарь Ушакова [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://gufo.me/dict/ushakov/параметр (дата обращения 13 марта 2018 года).

32. *Федеральный* Государственный Образовательный Стандарт основного общего образования от 17.12.2010 г. №1897 [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://window.edu.ru/resource/768/72768/files/FGOS_OO.pdf (дата обращения 7 февраля 2018 г.).

33. *ЯКласс* Функционально-графический метод [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.yaklass.ru/p/algebra/11-klass/uravneniia-i-neravenstva-9121/obshchie-metody-resheniia-uravnenii-9119/re-e3a7a2fe-576c-4579-91c7-6c396ed187d3?allowOld=true (дата обращения 12 марта 2018 г.).

34. *Ястребинецкий Г.А.* Задачи с параметрами / Г.А. Ястребинецкий – М.: Просвещение, 1986. – 127 с.