

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра высшей математики

Выпускная квалификационная работа

**ИСТОРИЯ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ
В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ**

Работу выполнила:
студентка 151 группы
направления подготовки 44.03.05
«Педагогическое образование»
(с двумя профилями подготовки),
профили «Математика и
Информатика»,
Вилесова Александра Юрьевна

«Допущена к защите в ГЭК»
Зав. кафедрой

подпись

«_____» _____ 2018 г.

подпись

Руководитель:
канд. физ.-мат. наук, доцент
кафедры высшей математики
Ананьева Миляуша Сабитовна

подпись

ПЕРМЬ
2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.....	7
1.1. Зарождение теории определителей.....	7
1.2. Накопление элементарных сведений об определителях	9
1.3. Построение теории определителей, разработка приложений.....	13
1.4. Расширение понятия определителя	15
ГЛАВА 2. ИСТОРИЯ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ...	18
2.1. Обучение решению системы с помощью определителей на этапе зарождения теории.....	18
2.2. Обучение решению систем уравнений помощью определителей на этапе накопления элементарных сведений	21
2.3. Построение теории определителей.....	25
2.3.1. Алгебраический анализ О. Коши.....	25
2.3.2. Алгебра Н.И Лобачевского	31
2.3.3. Распространение теории К.Г.Я Якоби	38
2.4. Учебные пособия на этапе расширения понятия определителя	41
2.4.1. Деятельность В. Споттисвуда	41
2.4.2. Учебные пособия Ф. Бриоски, Р.Бальцер	49
2.4.3. Лекции по теории определителей Дж. Сальмона	50
2.4.3. Теория определителей и теория форм М.Е. Ващенко-Захарченко .	51
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	54
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	55

ВВЕДЕНИЕ

В курсе алгебры значительное место отводится изучению теории определителей. Умение обращаться с этими алгебраическими структурами, обладающими определенными свойствами, позволяет решать огромное количество задач из разных областей математики посредством схематических вычислений. Теория определителей, возникла в связи с поиском рациональных приемов решения систем линейных алгебраических уравнений. В процесс развития определители были оторваны от уравнений, данная заслуга принадлежит известному математику О. Коши, что привело к формированию самостоятельной учебной дисциплины. Сейчас же, учение и применение определителей широко рассматривается в вузах, а также в школе на профильных занятиях.

Анализ источников в области любой математической теории, в том числе ее истории, необходимо выполнять периодически, ввиду постоянного обновления исторической информации, появления новых источников, статей и книг, изменения точек зрения на некоторые исторические и методические аспекты. Исходя из гуманитарного идеала научности, присущего современной науке, в последнее время многих ученых интересуют не только исторические факты о формировании теории, но и процесс распространения знаний и преподавания теории.

Объектом выпускной работы является исторический процесс развития теории определителей.

Предметом исследования выступает история преподавания теории определителей.

Целью работы является – представление процесса формирования теории определителей как учебной дисциплины.

Для достижения поставленной цели выделен ряд задач:

- 1) выполнить анализ литературы по теории определителей;

2) представить основные этапы истории и особенности развития исследуемого объекта;

3) дать обзор историко-математической литературы по истории определителей;

4) проанализировать первые учебные пособия по теории определителей в рамках этапов их истории;

5) сравнить области преподавания и применения теории с момента возникновения.

Методы исследования: анализ литературы по истории математики, систематизация историко-математических фактов, синтез фрагментов истории математики в целостное описание по выбранному плану.

Теоретическая ценность работы заключается в анализе первоисточников, относящихся к преподаванию теории определителей. «Математика в девяти книгах», «Курс математики» Э. Безу, «Алгебраический анализ» О. Коши, «Алгебра и вычисления конечных» Н.И. Лобачевского, работы К.Г. Якоби «De formation et proprietatibus determinantium», «Elementary theorems relating to determinants» В. Споттисвуда, «La teoria dei determinanti e le sue applicazioni» Ф. Бриоски, «Die Theorie und Anwendung der Determinanten» Р. Бальцера, «Теория определителей и теория форм» М.Е. Ващенко-Захарченко.

Новизна работы заключается в представлении библиографических сведений о Вильяме Споттисвуде, его пребывании в г. Перми.

Выпускная квалификационная работа насчитывает 58 страниц и состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литературы, насчитывающего 37 наименований, 3 таблиц, 9 иллюстраций.

Во введении обоснована актуальность выбранной темы, сформулированы цель и задачи, необходимые для ее достижения, указаны используемые методы, теоретическая и практическая ценность, а также новизна, объект и предмет исследования. Представлена краткая структура работы.

В первой главе дан исторический обзор теории, представлены основные этапы становления теории определителей.

Вторая глава посвящена обзору первых учебных пособий по теории определителей.

В заключении приводятся полученные результаты и подводятся итоги выполненного историко-математического исследования.

По материалам выпускной работы состоялись выступления на научно-практических конференциях студентов математических факультетов:

1. История теории определителей (Актуальные вопросы математики, ее истории и методики преподавания // Пермь, ПГГПУ, 17 ноября 2015 г.).

2. Английский математик В. Споттисвуд и Пермский край (Актуальные вопросы математики, ее истории и методики преподавания // Пермь, ПГГПУ, 5 апреля 2016 г.).

3. История Пермского края глазами математика (совместно с М.С. Ананьевой) (Актуальные вопросы математики, ее истории и методики преподавания // Пермь, ПГГПУ, 4 апреля 2017 г.).

4. Р. Бальцер и «Теория детерминантов» (Актуальные вопросы математики, ее истории и методики преподавания // Пермь, ПГГПУ, 3 апреля 2018 г.).

Опубликованы статьи и тезисы сообщений:

1. Уильям Споттисвуд (1825 – 1883) // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. межрегион. науч.- практ. конф. студентов матем. фак-тов / ред. кол.: Ю.В. Корзнякова, И.В. Косолапова; под общ. ред. Ю.В. Корзняковой; Перм. гос. гуманитар.-пед. ун-т. – Пермь, 2016. – Вып. 9 – С. 14.

2. По Пермским следам английского математика Уильяма Споттисвуда (1825 – 1883) // Актуальные проблемы внедрения ФГОС при обучении математике в начальной и основной школе: материалы регион. науч.-практ. конф. (11–12 ноября 2016 г., г. Пермь) / И.Н. Власова

(отв. за вып.); Перм. гос. гуманитар.-пед. ун-т. – Пермь, 2016.– С. 7–14.
(совместно с М.С. Ананьевой)

3. Виды определителей: исторический экскурс // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. всероссийской. науч.- практ. конф. студентов матем. фак-тов / ред. кол.: И.В. Косолапова; А.Ю. Скорнякова, под общ. ред. А.Ю. Скорняковой; Перм. гос. гуманитар.-пед. ун-т. – Пермь, 2017. – Вып. 10. – С. 11.

4. Первые учебные пособия по теории определителей // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. всерос. науч.-практ. конф. студентов матем. фак-тов / ред. кол.: И.В. Косолапова; А.Ю. Скорнякова, под общ. ред. А.Ю. Скорняковой; Перм. гос. гуманитар.-пед. ун-т. – Пермь, 2018. – Вып. 11. – С. 10.

Принято участие и получен диплом I степени в I международном конкурсе научно-исследовательских работ «Человек и мир» за работу «Путешествие английского ученого В. Споттисуда по Пермскому краю».

Составлены задачи о В. Споттисуде в сборник задач по материалам творческих работ школьников, студентов, магистрантов и преподавателей математического факультета ПГГПУ «По Пермскому краю с царицей наук», Вып. 4 / под ред. М. С. Ананьевой.

ГЛАВА 1. КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

В целом, процесс развития теории определителей можно разделить на четыре этапа [4]:

1. Зарождение теории определителей (II в. до н.э. до середины XVIII в.).
2. Накопление элементарных сведений об определителях (вторая половина XVIII в. до начала XIX в.).
3. Построение теории определителей. Разработка приложений (1812 – 1840 гг.).
4. Расширение понятия определителя. Распространение теории – введение в учебный процесс вузов (с 1841 г.).

1.1. Зарождение теории определителей

Основоположниками теории определителей, принято считать:

- японский ученый Секи Шенсуке Кова (1683);
- немецкий ученый Готфрид Вильгельм Лейбниц (1693);
- швейцарский ученый Габриэль Крамер (1750).

Открытия были сделаны независимо друг от друга [4, 1].

Предпосылки возникновения определителей принадлежат древнекитайским математикам [7]. Их метод решения систем линейных уравнений описан в сочинении «Математика в девяти книгах», которая была написана во II в. до н.э.

В главе VII «Избыток-недостаток» рассматривается решение систем из двух линейных уравнений с помощью «правила ложного положения».

А в VIII главе – решение систем произвольного числа линейных уравнений, метод «фан-чэн» [7, 21].

В своем дальнейшем развитии на Востоке метод «фан-чэн» был преобразован в своеобразное учение об определителях в работах Секи Шенсуке Ковы (1642 – 1708) [21].

Десять лет спустя определители впервые появились в Европе. Эта заслуга принадлежит немецкому математику Готфриду Вильгельму Лейбницу. Он изложил в письме к французскому математику Лопиталю (28 апреля 1693 г) [14], способ записи системы линейных алгебраических уравнений с помощью двойной числовой индексации для коэффициентов уравнений (10, 11, 12,... означает a_{10} , a_{11} и т. д). Используя ее Лейбниц составил правило формирования членов определителя третьего порядка, учитывая их знаки. Параллельно математик дал и особое правило для определения знаков членов этого выражения, которое впоследствии получило название «детерминант». С их помощью возможно было немедленно написать результат исключения n неизвестных из $n+1$ линейных алгебраических уравнений [14, 21].

Открытие Лейбница не вызвало интереса и не получило развития ни у него самого, ни в исследованиях его современников [14].

Спустя полвека, независимо от исследований Лебница, формулы для корней совместной системы линейных алгебраических уравнений были предложены женеvским математиком Габриэлем Крамером (1704 – 1752). В 1750 г. появился его труд в одной из своих известных трудов «Introduction l'analyse des lignes courbes algbraique» (Введение в анализ алгебраических кривых) [27], в которой он подробно изложил свое правило, названное позже его именем [10].

Для системы (1) Крамер составлял дроби для нахождения неизвестных. Знаменатель этих дробей равен сумме произведений вида $\pm ZYXV...$ с индексами, представляющими собой всевозможные $n!$ перестановок. Говоря на современном языке – главный определитель (2) системы (1).

Числители образуются путем замены коэффициентов каждого неизвестного на свободный член с этими же индексами [27,12].

$$\begin{array}{l} A^1 = Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + \dots \\ A^2 = Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + \dots \\ A^3 = Z^3 z + Y^3 y + X^3 x + \dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \quad (1), \quad \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} Z^1 & Y^1 & X^1 & \dots \\ Z^2 & Y^2 & X^2 & \dots \\ Z^3 & Y^3 & X^3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right| \quad (2)$$

Доказательств правила Крамер не привел, поскольку это невозможно без исследования свойств определителей. При этом Крамер употреблял термины – «строки» и «столбцы» [12].

Правило Крамера вскоре стало общепринятым, спустя некоторое время его стали изучать в школах как простую и краткую теорию решения систем линейных уравнений, а математики использовали идеи, заложенные в работе Крамера, для дальнейшего развития новой теории. Благодаря этому открытию начались исследования понятия определителя, его свойств и приложений [19].

1.2. Накопление элементарных сведений об определителях

Второй этап приходится на период со второй половину XVIII в. до начала XIX в. Среди ученых, внесших вклад в развитие теории: Э. Безу, А.Т. Вандермонд, П.С Лаплас, Ж.Л. Лагранж, К. Гаусс [4].

Правило Крамера получило широкое распространение благодаря его последователю французскому математику Этьену Безу (1739 – 1783). В своем мемуаре «Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations» (Исследования уравнений, и о том, что следует использовать для того чтобы решить эти уравнения) от 1764 г. ученый отметил идею

использовать при решении системы линейных уравнений «освобожденные» от неизвестных коэффициенты системы и указал, что пользуется при исключении неизвестных [10].

Э. Безу рассмотрел вопрос об отыскании условий, при которых система n линейных уравнений с n неизвестными имеет решение. Он исследовал однородные системы уравнений:

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ a'x + b'y = 0 \end{cases} \quad (3), \quad \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \\ a''x + b''y + c''z = 0 \end{cases} \quad (4)$$

и установил, что условие существования ненулевого решения системы (3) выражается равенством $ab' - a'b = 0$, а (4): $ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'' = 0$.

Решая задачу исключения неизвестных, математик впервые ввел в рассмотрение перестановки ab и ba , выражение $ab - ba$. Также Безу изучал свойства определителей [1,10,12].

В 1772 г. два ученых – Лаплас и Вандермонд, одновременно занялись определителями. В их трудах рассматривались простейшие свойства определителей, теорема о разложении определителя на сумму произведений элементов ряда соответствующим им определители наименьшего прядка, названных позднее алгебраическим дополнением [1, 12].

В работе «Rescherches sur le calcul intégral et sur le systéme de monde» (Исследования по интегральному исчислению и о системе мира) Пьер Симон де Лаплас (1749 – 1827) рассмотрел некоторые свойства определителей, связанные с перестановкой или совпадением соответствующих элементов:

1) при перестановке двух параллельных рядов (строк или столбцов) определитель лишь меняет знак;

2) определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами равен нулю.

Для системы уравнений (5) Лаплас записывал определитель (6) [31]:

$$\begin{array}{cccc}
 p^1 = {}^1a\mu + {}^1b\mu' + {}^1c\mu'' + \dots & {}^1a, & {}^1b, & {}^1c, \dots \\
 p^2 = {}^2a\mu + {}^2b\mu' + {}^2c\mu'' + \dots & {}^2a, & {}^2b, & {}^2c, \dots \\
 p^3 = {}^3a\mu + {}^3b\mu' + {}^3c\mu'' + \dots & {}^3a, & {}^3b, & {}^3c, \dots \\
 \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array} \quad (5), \quad (6).$$

Александр Теофил Вандермонд в «Sur l'élimination» (Мемуаре об исключении) ввел, подобно Лейбницу, двойную индексацию коэффициентов $\binom{\alpha}{a}$ – по номеру уравнения и месту неизвестного в уравнении. Определитель второго порядка Вандермонд изображал так:

$$\frac{\alpha}{a} \Big| \frac{\beta}{b} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Определители более высоких порядков вводились при помощи рекуррентных соотношений. Например, определитель третьего порядка имеет следующее разложение:

$$\frac{\alpha}{a} \Big| \frac{\beta}{b} \Big| \frac{\gamma}{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ a \end{pmatrix} \cdot \frac{\beta}{b} \Big| \frac{\gamma}{c} + \begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix} \cdot \frac{\beta}{c} \Big| \frac{\gamma}{a} + \begin{pmatrix} \alpha \\ c \end{pmatrix} \cdot \frac{\beta}{a} \Big| \frac{\gamma}{b}$$

Свойства, выделенные в работе Вандермонда, позднее доказаны Коши [10]. Приведем образец запись системы двух уравнений с двумя неизвестными (6) с решением (7) [21]:

$$\begin{array}{l} \begin{array}{l} \frac{1}{1}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 + \frac{1}{3} = 0 \\ \frac{2}{1}\xi_1 + \frac{2}{2}\xi_2 + \frac{2}{3} = 0 \end{array} \end{array} \quad (6), \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2} \bigg| \frac{2}{3} \\ \frac{1}{1} \bigg| \frac{2}{2} \end{array}; \quad \begin{array}{l} \frac{1}{3} \bigg| \frac{2}{1} \\ \frac{1}{1} \bigg| \frac{2}{2} \end{array} \quad (7)$$

В одной из задач Вандермонд ввел определитель, который называют теперь его именем (8): в первой строке – единицы, во второй – различные числа, в третьей – квадраты.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} \quad (8)$$

Общий случай доказал Коши (1815). Определитель Вандермонда имеет некоторое теоретическое значение, так как возникает в различных ситуациях. При $n = 2$ значение равно $a_2 - a_1$, а при $n = 3 - (a_3 - a_1)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)$ [10].

В то же время появлялись работы известного французского математика и механика Жозефа Луи Лагранжа (1736 – 1813). В 1773 г. «Solution analytique de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires» (Аналитического решения некоторых проблем для треугольной пирамиды) для решения геометрической задачи (вычисляя объем тетраэдра) использовал определитель третьего порядка. Ниже приведем запись системы уравнений (9) и определителя системы (10):

$$\begin{array}{l} x\xi + y\gamma + z\zeta = \beta \\ x'\xi + y'\gamma + z'\zeta = \beta' \\ x''\xi + y''\gamma + z''\zeta = \beta'' \end{array} \quad (9),$$

$$\Delta = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x \quad (10),$$

где x, y, z – координаты точек [31].

К известным свойствам он добавил теорему-замечание: сумма произведений столбца (строки) на алгебраическое дополнение соответствующих элементов другого столбца (строки), равна нулю. Он также ввел в рассмотрение определитель (11), элементами которого являются алгебраические дополнения элементов исходного определителя [12]:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \quad (11)$$

Исследования Лагранжа были продолжены Карлом Фридрихом Гауссом (1777 – 1855). Он первый ввел термин «детерминант» (в переводе «определитель») в «Rescherches arithmétique» (Арифметических исследованиях) (1801). Он, решая задачу из теории чисел, рассматривал квадратичные формы с двумя, тремя неизвестными. Ученый писал: «Число $D = b^2 - ac = -\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$, свойства которого зависят от (a, b, c) , будем называть *детерминантом* формы $ax^2 + 2bxy + cy^2$ » [11. С. 907].

1.3. Построение теории определителей, разработка приложений

До этого этапа определители рассматривались в задачах алгебры, геометрии и теории чисел. Необходимость введения теории связано с развитием аппарата линейной алгебры и систематизирования уже накопленных знаний. Новыми успехами теория определителей была обязана О. Коши, Жан Жак Бине, К.Г. Якоби [4].

Первые полные изложения теории принадлежат французским ученым Жану Филиппу Мари Бине (1786 – 1856) и Огюстену Луи Коши (1789 – 1857). Они одновременно занялись теорией определителей

и получили некоторые общие результаты. Коши посвятил теории определителей 14 работ. Считается [4, 21], что именно он превратил теорию в самостоятельную дисциплину, независимую от теории уравнений. Благодаря Коши были доказаны основные свойства определителя, активно использовалась запись определителя (12), отличающегося от современного лишь отсутствием вертикальных черт [29].

$$\begin{array}{c} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{array} \quad (12)$$

Одним из важнейших достижений Бине является доказательство теоремы умножения детерминантов, названных им термином «результантами». Он рассматривал определители как алгебраические суммы всевозможных произведений и образовывал их так, как мы составляли бы из элементов, расположенных в виде таблицы [10].

Следующий этап составили 30 работ немецкого ученого Карла Густава Якоба Якоби (1804 – 1851). Он уделял определителям огромное внимание, отмечая их значение для развития математики. Все необходимые для теоретического изучения сведения относительно определителей опубликованы в трех статьях: «О построении и свойствах детерминантов», «О функциональных детерминантах», «О знакопеременных функциях и их разложении на произведение из разностей своих элементов» (1841). К заслугам Якоби следует отнести:

- введение в употребление термина Гаусса «детерминант»;
- описание существовавших правил определения знака членов детерминанта;
- выдвижение идеи окаймления детерминанта;
- расширение теоремы о разложении детерминантов (Лапласа);

- обобщение теоремы их умножения;
- изложение теоретических основ якобианов (функциональных определителей);
- попытка сделать определители универсальным вычислительным средством [1, 4].

Главная заслуга – распространению теории и обучение ей. Его статьи активно использовались как учебное пособие [2].

1.4. Расширение понятия определителя

Определители оказались схематическим и удобным вычислительным средством. Ко второй половине XIX в. не было такого раздела математики, куда бы они не проникли, они быстро вошли во множество математических приложений и механики.

В это время формировывались приемы вычисления определителей: метод приписыванием столбцов и метод треугольников для определителей третьего порядка. Данная заслуга принадлежит страсбургскому профессору Пьеру Фредерику Саррюсу (1798 – 1861) в 1846 г. Еще один способ основывался на свойстве, замеченном Якоби (1841) – метод окаймления, применимый к определителю любого порядка [10, 29].

Расширение теории связано с созданием различных видов определителей. Значительный вклад в этом направлении внесли английские ученые А. Кэли и Дж. Сильвестр в работах [35, 36]. С 1844 г. Артур Кэли (1821 – 1895) ввел понятие косых и кососимметрических определителей и исследовал их свойства в ряде работ, помещенных в журнале Крелля. Заметим, что применяемая теперь квадратная схема с вертикальными чертами впервые была введена им. В 1851 г. Джеймс Джозеф Сильвестр (1814 – 1897) – близкий друг Кэли – обобщил теорему умножения определителей и продолжил исследования Якоби [2].

Успехи в теории определителей послужили основой для развития линейной алгебры, матричного исчисления, алгебраической теории форм и их инвариантов. Дальнейшее развитие теории определителей связано не только с их приложениями, но и изучением, различных видов бесконечномерных определителей.

К середине XIX в. был накоплен достаточный материал по теории определителей, но излагали его в основном в статьях или монографиях. Объем и значительность накопленного материала настоятельно требовали систематизации и последовательного изложения, т. е. создания учебника по теории определителей. Труд Ф. Бриоски является первым учебник по теории определителей «La teoria dei determinanti le sue applicazioni» в 1854 г. Однако, мало известно, что попытка стать автором первого пособия предпринята В. Споттисвудом в 1851 г [19, 24, 34].

Таким образом, первая глава посвящена краткому поэтапному обзору развития теории определителей. В параграфах были выделены основные открытия ученых.

Таблица 1

Нововведений в области определителей

Этап	Ученые	Открытие
I. Зарождение теории определителей	Секи Кова (1683)	– понятие определителя; – своеобразное учение об определителях.
	Г.В. Лейбниц (1693)	– употребление двойной индексации; – понятие определителя; – правило образования членов, включая правило выбора их знака.
	Г. Крамер (1750)	– понятие определителя; – правило Крамера; – понятие «беспорядка» в перестановке индексов (инверсия).
II. Накопление элементарных сведений по теории определителей	Э. Безу (1764)	– определение определителя; – рекуррентный способ образования определителя; – условие существования ненулевого решения системы однородных линейных уравнений;

		– правило составления результата системы уравнений.
	А.Т. Вандермонд (1772)	– двойная индексация; – рекуррентный способ образования; – исследование свойств перестановок индексов; – представление определителя в виде произведения миноров.
	П.С. Лаплас (1772)	– теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца) (теорема Лапласа); – исследование свойств перестановок индексов; – правило составления результата системы уравнений.
	Ж.Л. Лагранж (1773)	– теорема исключения; – вычисление объема тетраэдра с помощью определителя; – исследование свойств определителя, составленного из алгебраических дополнений элементов; – расположение в виде квадратной таблицы коэффициентов системы уравнений, элементов определителя.
	К.Ф. Гаусс (1801)	– термин «детерминант» как дискриминант квадратичной формы; – теорема умножения: частный случай.
III. Построение теории определителей	О. Коши (1812)	– первое полное изложение теории; – доказаны основные свойства предшественников; – запись в виде квадратной таблицы; – понятие алгебраического дополнения элемента.
	К.Г.Я. Якоби (1841)	– введение в употребление термина Гаусса «детерминант»; – описание существовавших правил определения знака членов определителя; – выдвижение идеи окаймления определителя; – расширение теоремы Лапласа; – обобщение теоремы их умножения; – изложение теоретических основ якобианов (функциональных определителей).
IV. Расширение понятия определитель	А. Кели (1854)	– современное обозначение детерминанта; – составление видов определителей;
	П.Ф. Саррюс (1846)	– два способа вычисления (приписыванием столбцов и метод треугольников) для определителей третьего порядка.
	Д. Сильвестр (1851)	– обобщение теоремы умножения определителей; – составление большого количества видов определителей, при рассмотрении прикладных задач.

ГЛАВА 2. ИСТОРИЯ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Определители не были «открыты» как явление природы, но «изобретены» как важное орудие математики [18]. С момента зарождения теории встречались различные работы, относящиеся к преподаванию, в которых рассматривались определители. Представим последовательность появления учебных пособий по этапам их развития.

2.1. Обучение решению системы с помощью определителей на этапе зарождения теории

Предполагается, что зарождение теории определителей принадлежит древнекитайским методам решения систем линейных уравнений посредством схематических приемов, представлены в самом раннем сочинении «Математика в девяти книгах», предназначенного для подготовки государственных служащих и ученых.

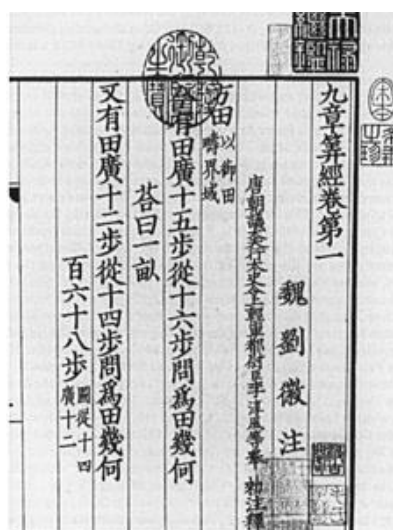


Рис. 1. Титульная страница «Математики в девяти книгах» [7]

Наиболее значимые, для данной темы, являются седьмая и восьмая главы. [7].

Распространенным методом решения линейных уравнений является метод одного ложного положения. Обратимся к задаче:

«Объем пяти больших посудин и одной малой посудины равен 3 ху. Объем одной большой посудины и пяти малых посудин равен 2 ху. Спрашивается, каков объем большой посудины и малой в отдельности?»
Правило: предположим, что объем большой посудины равен 5 доу (1 ху =10 доу=100 шэнам), тогда малой посудины также равен 5 доу; превышение будет в 10 доу. Пусть теперь объем большой посудины равен 5 доу и 5 шэнам, тогда объем малой посудины 2 доу и 5 шэнам, не хватает 2 доу». В задаче требуется решить систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными [7, С. 178]:

$$\begin{cases} 5x + y = 3 \\ x + 5y = 2 \end{cases}$$

Полагая, что в первом уравнении $x_1=5$ доу, получаем $y_1=5$ доу. Если же в первом уравнении положить $x_2 = 5\frac{1}{2}$ доу, то $y_2 = 2\frac{1}{2}$ доу. Подставляя эти значения во второе уравнение, получаем в первом случае избыток, а во втором – недостаток. Обозначим избыток $C_1=10$ доу, а недостаток $C_2=-2$ доу, тогда искомые величины по правилу ложных положений выражаются следующим образом:

$$x = \frac{x_2 C_1 - x_1 C_2}{C_1 - C_2}; y = \frac{y_2 C_1 - y_1 C_2}{C_1 - C_2}$$

Подставляя значения в полученные выражения, получим: объем большой посуды $\frac{13}{24}xy$, объем малой посуды $\frac{7}{24}xy$.

Решение таких систем линейных уравнений с двумя неизвестными сводятся к вычислению дробей с одинаковыми знаменателями, как получили бы уже по известному правилу Крамера [7].

Общим методом решения системы линейных уравнений является «фан-чэн». Это – алгоритм решения системы n линейных уравнений с n неизвестными. «Фан-чэн» назван так по счетной доске, на которой выкладывались палочками в виде таблицы коэффициенты при неизвестных в уравнениях и свободные члены.

I	II	III
II	III	II
III	I	I
$= \perp$	$\equiv $	$\equiv \underline{\underline{\perp}}$

Рис. 2. Таблица фан-чэн [7]

Суть этого метода выясним при рассмотрении следующей задачи: «Из трех снопов хорошего урожая, двух снопов среднего урожая и одного снопа плохого урожая получили 39 доу зерна. Из двух снопов хорошего урожая, трех снопов среднего урожая и одного снопа плохого урожая получили 34 доу зерна. Из одного снопа хорошего урожая, двух снопов среднего урожая и трех снопов плохого урожая получили 26 доу зерна. Спрашивается, сколько зерна получили из каждого снопа хорошего, среднего и плохого урожая. [7, С. 179]».

Таким образом, из условия представлена система:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39, \\ 2x + 3y + z = 34, \\ x + 2y + 3z = 26. \end{cases}$$

Для нее оставлялась таблица (рис. 2), представляющая собой расширенную матрицу. Рядом последовательных преобразований, математики получали матрицу, в которой выше главной диагонали стояли нули (13):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Из преобразованной матрицы легко найти значения неизвестных.

Ответ: из одного снопа хорошего урожая $9\frac{1}{4}$ доу, из одного снопа среднего урожая $4\frac{1}{4}$ доу, из одного снопа плохого урожая $2\frac{3}{4}$ доу» [7].

Достижение китайских алгебраистов в теории определителей очень велико, они дали начало развития учения об определителях.

2.2. Обучение решению систем уравнений помощью определителей на этапе накопления элементарных сведений

Определители как инструмент (способ) решения систем линейных уравнений был введен в учебные курсы еще задолго до появления самой теории. Благодаря Э. Безу правило Крамера получило широкое распространение.

Ему принадлежит шеститомный «Курс математики» (1764 – 1769), предназначенный для училища гардемарин, который во Франции неоднократно переиздавался. Там он впервые описал способ решения системы линейных уравнений с помощью определителей. На русский язык этот учебник был переведен В. Загорским (1801) для обучения студентов Московского университета [2, 5].

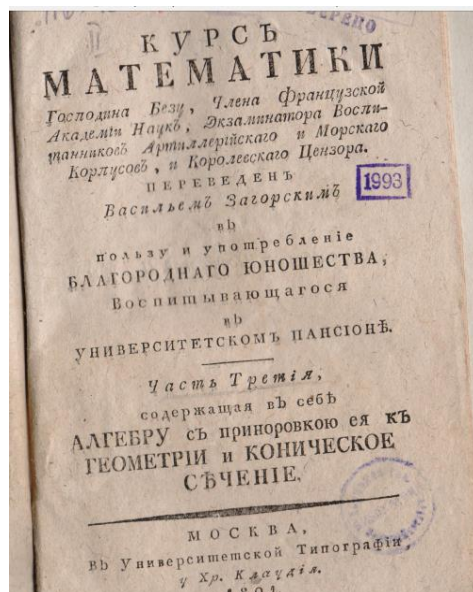


Рис. 3. Титульная страница учебного пособия «Курс математики» Безу [5]

Учебное пособие носило длинное название: «Курс математики Господина Безу, Члена Французской Академии Наук, Экзаменатора воспитанников Артиллерийскаго и морскаго Корпусов, и Королевскаго цензора. Ч.3, содержащая в себе алгебру с приноровкой ее к геометрии и коническое сечение (для университетского пансиона)». Оно состоит из двух «отделений», объемом в 405 страниц. В первом «преподаются правила исчисления алгебраических количеств, рассматриваемых вообще». Вторая часть книги посвящена приложению алгебры к геометрии и к теории конических сечений.

Рассмотрим ту часть учебника, которая относится к теории уравнений, так как именно она имеет отношение к теории определителей. Интересен тот

факт, что исследован вопрос существования решения систем уравнений. После глав предлагается «приноровка предыдущих правил для решения некоторых простых вопросов», то есть практическое использование теоретического материала. Естественно, что на данном этапе еще не было современной символики и терминологии.

Решение двух линейных уравнений с двумя неизвестными нужно находить следующим образом: «из каждого уравнения нужно выразить одно и того же неизвестное, приняв все остальные за известные. Приравняем эти неизвестные и получаем новое равенство, в котором останется только одно второе неизвестное. Его можно найти по правилам решения уравнения с одним неизвестным (они описывались ранее). Найдя это неизвестное, подставим его значение в какое-нибудь уравнение первого действия и получим другое неизвестное» [5, С.67].

Затем автор приводит несколько задач с решениями, которые соответствуют выведенному правилу, также имеется пример системы буквенных уравнений. Здесь он сделал попытку обобщения решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Рассмотрим пример № 69 «Курса математики...» [5, С.69]. Найти неизвестные x и y в системе двух буквенных уравнений:

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + fy = e \end{cases},$$

где a, b, c, d, e, f – это известные положительные или отрицательные коэффициенты системы.

Решение:

Выразим x из данных уравнений: $x = \frac{c-by}{a}$ и $x = \frac{e-fy}{d}$. Приравниваем:

$\frac{c-by}{a} = \frac{e-fy}{d}$. Решая это уравнение, получим $afy - bdy = ae - cd$ или

$$y = \frac{ae - cd}{af - bd}.$$

Теперь найдем неизвестное x :

$$x = \frac{c-by}{a} = \frac{c-b\frac{ae-cd}{af-bd}}{a} = \frac{afc - bcd - abe + bcd}{aaf - abd} = \frac{fc - be}{af - bd},$$

$$\text{т.е. } x = \frac{fc - be}{af - bd}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{fc - be}{af - bd}, y = \frac{ae - cd}{af - bd}.$$

В знаменателе стоит выражение, которое представляет собой определитель системы уравнений, а в числителях – определители, полученные заменой числовых коэффициентов при неизвестных системы свободными членами. Исключение неизвестных привело к формулам Крамера.

В следующем параграфе рассматривалась система трех линейных уравнений с тремя и более неизвестными. Автор обобщил правило уравнивания неизвестных для решения систем уравнений с произвольным числом неизвестных: «Выведи в каждом уравнении величину одного и того же неизвестного; сравни какую-нибудь из этих величин со всеми остальными, через что уничтожишь одно равенство и одно неизвестное. Поступая с остальными уравнениями так же, как и прежде, получишь еще уравнения с неизвестными на единицу меньше. Продолжай поступать так до тех пор, пока, наконец, дойдешь до одного неизвестного» [5, С.72-73].

Безу представил и другой способ решения систем – алгебраическое сложение, который заключается в том, что поочередно уничтожаются коэффициенты при неизвестных, начиная с первых. Этот процесс приводит к меньшему числу уравнений с меньшим числом неизвестных. Данный способ соответствует правилу Гаусса.

Благодаря продвижению «Курса математики» в России стал известен способ исключения неизвестных из системы линейных уравнений по правилу Крамера.

2.3. Построение теории определителей

На данном этапе построения теории появляются учебные пособия, как «Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique» французского ученого О. Коши (1821). С 1841 г. в качестве учебной литературы стали использовать работы К.Г. Якоби, среди которых были «Ueber die Bildung und Eigenschaften die Determinanten», «Ueber die fiinctionalen Determinanten». Они стали основой для подготовки университетских курсов для математиков и механиков.

2.3.1. Алгебраический анализ О. Коши

В обширной работе, представленной Коши в 1812 г. «Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment» (О функциях, которые могут принимать только два противоположно равных вещественных значения в результате перестроек, произведенных между переменными, которую они хранят), дается обстоятельное изложение теории определителей на основании подробного исследования знакопеременных

функций. Коши дал индуктивное определение: из любой симметрической функции можно составить симметрическую знакопеременную, выбрав знаки ее членов по правилу. В общем виде симметрическая знакопеременная функция образовывалась из произведения

$$P = (a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1) \times (a_3 - a_2) \dots (a_2 - a_1) \times (a_n - a_{n-1})$$

заменой значения показателя степени индексом. Полученную знакопеременную функцию, автор называл *детерминантом*. Для наглядности был предложен способ записи [2, 26]:

$$S(\pm a_{1,1} a_{2,2} a_{n,n}) = \begin{cases} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{cases}.$$

Замечательное обстоятельство, что это основное сочинение в своё время осталось почти не замеченным, могло быть объяснено тем, что Коши, как это была его манера, часто возвращаясь к этому вопросу, менял как изложение, так и обозначение. В дальнейших работах Коши называет определитель то «functions alternees» (чередующаяся функция), то «resultants». Все эти названия отражают свойства определителей [13].

В 1821 г. увидел свет «Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique», разработанный Коши в качестве учебного пособия и переведённый позже на другие языки, и намного позже спустя сорок три года – русский, под названием «Алгебраический анализ».

Math. 837.

COURS D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,
Ingenieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique,
Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.^{re} PARTIE. ANALYSE ALGÈBRE.



DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DESBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi,
rue Serpente, n.º 7.
1821.

Рис. 4. Титульная страница «Алгебраического анализа» Коши [25]

Книга Коши является в большей мере введением в анализ, чем курсом высшей алгебры. Автор дал именно то обоснование анализа, которое сейчас является общепринятым в современных учебниках.

Третья глава «Алгебраического анализа» Коши занимала 13 страниц (с 66 по 79) и имела название «Симметрические и знакопеременные функции. Употребление этих функций для решения уравнений первой степени с произвольным числом неизвестных. Однородные функции». Она состояла из трех параграфов.

Первый параграф посвящался «симметрическим» функциям. Здесь автор вводил понятие рассматриваемой функции: «Симметрическая функция нескольких переменных количеств есть такая, которая сохраняет и значение, и знак при всяком перемещении количеств, входящих в состав функции». [25. С.66] Под *количеством* понимались независимые переменные функции. Примерами симметрических функций являются функции $f(x,y,z)=xyz$ или $f(x,y)=x+y$.

Второй параграф был посвящен «знакопеременным функциям». Знакопеременной функцией нескольких переменных называется такая, которая при перестановке местами двух переменных изменяет знак, но сохраняет свое значение[25. С.69]. Примерами функций являются $f(x,y)=x-y$, $f(x,y)=y^2-x^2$, $f(x,y)=\sin x-\sin y$, $f(x,y,z)=(x-y)(x-z)(y-z)$ и т.д.

Здесь приводились свойства знакопеременных функций:

Свойство 1. Всякая целая знакопеременная функция нескольких переменных $x, y, z, \dots u, v$ состоит из членов попеременно положительных и отрицательных, из которых в каждом различные переменные входят с различными показателями.

Свойство 2. Такая функция делится нацело на произведение разностей

$$\begin{aligned} & \pm(y-x), \pm(z-x), \dots, \pm(u-x), \pm(v-x) \\ & \pm(z-y), \dots, \pm(u-y), \pm(v-y) \\ & \text{и т. д.} \dots \pm(u-z), \pm(v-z) \\ & \text{и т. д.} \dots \pm(v-u). \end{aligned}$$

Теперь покажем, каким образом посредством разложения знакопеременных функций можно прийти к решению общих уравнений первой степени со многими неизвестными.

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

[illegible]

Пусть $P=(b-a)(c-a)(c-b)...(h-a)(h-b)(h-c)...(h-g)$. Произведение P будет самой простой знакопеременной функции переменных $a, b, c, ..., q, h$.

После этого заменим в каждом члене показатели переменных на соответствующие индексы, например, напомним $a_0, b_1, c_2, \dots, g_{n-2}, h_{n-1}$ вместо члена $a^0, b^1, c^2, \dots, g^{n-2}, h^{n-1}$, и обозначим через D значение разложения многочлена P , которое получится после замены. D , как и P , имеет свойство менять знак в том случае, когда поменяем местами две переменные. D будет равно нулю, если во всех членах, например, a заменить на b , но сама переменная b не будет заменена на a . Можно обозначить в многочлене D через $A_0 a_0$ сумму членов, имеющих общий множитель a_0 , через $A_1 a_1$ сумму членов, имеющих общий множитель a_1 и т.д., $A_{n-1} a_{n-1}$ сумму членов, имеющих общий множитель a_{n-1} . Тогда $D = A_0 a_0 + A_1 a_1 + \dots + A_{n-1} a_{n-1}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = A_0 b_0 + A_1 b_1 + \dots + A_{n-1} b_{n-1}, \\ 0 = A_0 c_0 + A_1 c_1 + \dots + A_{n-1} c_{n-1}, \\ \dots\dots\dots \\ 0 = A_0 g_0 + A_1 g_1 + \dots + A_{n-1} g_{n-1}, \\ 0 = A_0 h_0 + A_1 h_1 + \dots + A_{n-1} h_{n-1} \end{array} \right.$$

Откуда

ИЛИ

$$x = \frac{(b-k)(c-k) \times (c-b) \times \dots \times (h-k)(h-b)(h-c) \dots (h-g)}{(b-a)(c-a) \times (c-b) \times \dots \times (h-a)(h-b)(h-c) \dots (h-g)}$$

Этим же способом можно получить также и значения других неизвестных из системы [25].

Для примера рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_0x + b_0y + c_0z = k_0, \\ a_1x + b_1y + c_1z = k_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \end{cases}$$

«Символическое значение» x находим по формуле

$$x = \frac{(b-k)(c-k)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} = \frac{k^0b^1c^2 - k^0b^2c^1 + k^1b^2c^0 - k^1b^0c^2 + k^2b^0c^1 - k^2b^1c^0}{a^0b^1c^2 - a^0b^2c^1 + a^1b^2c^0 - a^1b^0c^2 + a^2b^0c^1 - a^2b^1c^0}$$

Следовательно, «истинное значение» той же переменной будет

$$x = \frac{k_0b_1c_2 - k_0b_2c_1 + k_1b_2c_0 - k_1b_0c_2 + k_2b_0c_1 - k_2b_1c_0}{a_0b_1c_2 - a_0b_2c_1 + a_1b_2c_0 - a_1b_0c_2 + a_2b_0c_1 - a_2b_1c_0}$$

Выведем для остальных переменных системы, (в учебнике Коши они не были приведены). Получаем

$$y = \frac{(a-k)(c-k)(c-a)}{(b-a)(c-a)(c-b)} = \frac{k^0a^1c^2 - k^0a^2c^1 + k^1a^2c^0 - k^1a^0c^2 + k^2a^0c^1 - k^2a^1c^0}{a^0b^1c^2 - a^0b^2c^1 + a^1b^2c^0 - a^1b^0c^2 + a^2b^0c^1 - a^2b^1c^0}$$

$$z = \frac{(a-k)(b-k)(b-a)}{(b-a)(c-a)(c-b)} = \frac{k^0 a^1 b^2 - k^0 a^2 b^1 + k^1 a^2 b^0 - k^1 a^0 b^2 + k^2 a^0 b^1 - k^2 a^1 b^0}{a^0 b^1 c^2 - a^0 b^2 c^1 + a^1 b^2 c^0 - a^1 b^0 c^2 + a^2 b^0 c^1 - a^2 b^1 c^0}$$

Или

$$y = \frac{k_0 a_1 c_2 - k_0 a_2 c_1 + k_1 a_2 c_0 - k_1 a_0 c_2 + k_2 a_0 c_1 - k_2 a_1 c_0}{a_0 b_1 c_2 - a_0 b_2 c_1 + a_1 b_2 c_0 - a_1 b_0 c_2 + a_2 b_0 c_1 - a_2 b_1 c_0}$$

$$z = \frac{k_0 a_1 b_2 - k_0 a_2 b_1 + k_1 a_2 b_0 - k_1 a_0 b_2 + k_2 a_0 b_1 - k_2 a_1 b_0}{a_0 b_1 c_2 - a_0 b_2 c_1 + a_1 b_2 c_0 - a_1 b_0 c_2 + a_2 b_0 c_1 - a_2 b_1 c_0}$$

Сочинение Коши о знакопеременных симметрических функциях являлось обобщением результатов, полученных его предшественниками. Здесь представлена новая теория определителей, построенная на основе понятия функции нескольких переменных [29].

2.3.2. Алгебра Н.И Лобачевского

Первое изложение теории определителей в России принадлежит Николаю Ивановичу Лобачевскому (1792 – 1856) в его «Алгебре и вычислении конечных» (1834). «Алгебра» Лобачевского представляет собой общий университетский курс, начинавшийся с разбора основных арифметических операций и завершившийся теорией уравнений высших степеней [15, 19].

Изложенная теория находится в IX главе учебного пособия. Первая часть содержит систематическую сводку правил для их элементарного решения (т.е. без помощи определителей). Вторая часть (статья 108–113) содержит теорию определителей в очень интересной форме, которая уже не используется. Как указал в предисловии

сам Лобачевский, он привел два различных приема решения линейных систем, а следовательно, и два метода составления определителя.

Детально рассмотрим IX главу «Алгебры» Лобачевского. Символические выражения автор называет «представительными»; слова «определитель» (или «детерминант») он нигде не употреблял, основы теории полностью изложены в рамках теории уравнений.

В статье 108 главы IX Лобачевский предложил вариант приема определителя по Коши. Систему уравнений он записывал с иной индексацией, начинающейся с 1:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + \dots = k_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \dots = k_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z + \dots = k_3, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

и ввел в качестве определителя системы «представительное выражение»

$$П\{abcd\dots \times (b-a)(c-b)(c-a)(d-c)(d-b)(d-a)\dots\},$$

в котором «представитель» $П$ означает, что после перемножений показатели степеней должны быть переведены в нижестоящие индексы. «Берем несколько букв k, a, b, c, d и т.д., откинувши k , составляем произведения всех прочих на произведение всех разностей; вместо k принявши a , составляем подобное выражение» [15. С.130]. Тогда значение переменной x в обозначенной выше системе следует находить по следующей формуле:

$$x = \frac{П\{kbcd \times (b-k)(c-b)(c-k)(d-c)(d-b)(d-k)\dots\}}{П\{abcd \times (b-a)(c-b)(c-a)(d-c)(d-b)(d-a)\dots\}}.$$

Например, для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными x, y, z получаем:

$$x = \frac{\prod\{kbc(b-k)(c-b)(c-k)\}}{\prod\{abc(b-a)(c-b)(c-a)\}} = \frac{\prod\{k^3(bc^2 - b^2c) + k^2(b^3c - bc^3) + k(b^2c^3 - b^3c^2)\}}{\prod\{a^3(bc^2 - b^2c) + a^2(b^3c - bc^3) + a(b^2c^3 - b^3c^2)\}} =$$

$$= \frac{k_1(b_2c_3 - b_3c_2) + k_2(b_3c_1 - b_1c_3) + k_3(b_1c_2 - b_2c_1)}{a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)};$$

$$y = \frac{\prod\{akc(a-k)(c-a)(c-k)\}}{\prod\{abc(b-a)(c-b)(c-a)\}} = \frac{\prod\{k^3(ac^2 - a^2c) + k^2(a^3c - ac^3) + k(a^2c^3 - a^3c^2)\}}{\prod\{a^3(bc^2 - b^2c) + a^2(b^3c - bc^3) + a(b^2c^3 - b^3c^2)\}} =$$

$$= \frac{k_1(a_3c_2 - a_2c_3) + k_2(a_1c_3 - a_3c_1) + k_3(a_2c_1 - a_1c_2)}{a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)};$$

$$z = \frac{\prod\{abk(a-k)(b-k)(b-a)\}}{\prod\{abc(b-a)(c-b)(c-a)\}} = \frac{\prod\{k^3(ab^2 - a^2b) + k^2(a^3b - ab^3) + k(a^2b^3 - a^3b^2)\}}{\prod\{a^3(bc^2 - b^2c) + a^2(b^3c - bc^3) + a(b^2c^3 - b^3c^2)\}} =$$

$$= \frac{k_1(a_2b_3 - a_3b_2) + k_2(a_3b_1 - a_1b_3) + k_3(a_1b_2 - a_2b_1)}{a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)}.$$

Чтобы доказать верность представительного выражения, предположим, что число уравнений системы n и число неизвестных n . В таком случае произведение:

$$abcd... \times (b-a)(c-b)(c-a)(d-c)(d-b)(d-a)...$$

заключает в себе произведение

$$bcd... \times (c-b)(d-c)(d-b)... = L,$$

свободное от a ; еще другое из n производителей

$$a(b-a)(c-a)(d-a)\dots,$$

где каждый заключает в себе a , которое может быть представлено так:

$$a(b-a)\{p_1 + ap_2 + a^2 p_3 + \dots + a^{n-2} p_{n-1}\} \text{ или } a(q_1 + aq_2 + a^2 q_3 + \dots + a^{n-2} q_n)$$

где производители при степенях a не содержат более a . Далее

$$q_1 = bp_1, \quad q_2 = bp_2 - p_1, \quad q_3 = bp_3 - p_2 \text{ и т.д. до } q_{n-1} = bp_{n-1} - p_{n-2}, \quad q_n = -p_{n-1}.$$

Представительное выражение для x может быть записано:

$$x = \frac{\Pi\{Lk(q_1 + kq_2 + k^2 q_3 + \dots + k^{n-1} q_n)\}}{\Pi\{La(q_1 + aq_2 + a^2 q_3 + \dots + a^{n-1} q_n)\}}.$$

Умножаем теперь уравнения системы по порядку на представительные выражения

$$A_1 = \Pi(Lq_1), \quad A_2 = \Pi(Lq_2), \dots, A_n = \Pi(Lq_n)$$

и складываем. Множитель при u будет $\Pi(LQ)$, где

$$Q = b_1 q_1 + b_2 q_2 + \dots + b_n q_n.$$

Вставляя значения и т.д., получим:

$$Q = (bb_1 - b_2)p_1 + (bb_2 - b_3)p_2 + \dots + (bb_{n-1} - b_n)p_{n-1}.$$

Находим тот произведение в L , который заключает b :

$$M = b(c-b)(d-b)\dots = bp_1 + b^2p_2 + b^3p_3 + \dots + b^{n-1}p_{n-1}.$$

Так, что произведение QM будет состоять из членов

$$p_r^2 b^r (bb_r - b_{r+1}), \quad p_r p_t \{b_r (bb_t - b_{t+1}) + b_t (bb_r - b_{r+n})\},$$

где r и t числа от 1 до $n-1$. Все эти члены обращаются в нуль, когда после умножения показатели степеней перенесутся вниз, как требует того представитель Π , под которым буквы, различные от b , не могут переменять показателей у b . Подобным образом можно доказать, что производители при z , u и т.д. уничтожаются.

Напротив, множитель при x будет

$$\Pi\{L(a_1q_1 + a_2q_2 + a_3q_3 + \dots + a_nq_n)\}.$$

Здесь a не входит ни в L , ни в q_1 , q_2 и т.д., следовательно, можно написать

$$\Pi\{L(aq_1 + a^2q_2 + a^3q_3 + \dots + a^nq_n)\}.$$

В таком случае

$$L(aq_1 + a^2q_2 + a^3q_3 + \dots + a^nq_n) = a(b-a)(c-b)(c-a)(d-c)(d-b)(d-a)\dots$$

предположении k для вместо a . Если в последнем представительном выражении подставим снова k вместо a , то получим сумму от вторых частей в системе уравнений и, наконец, значение представительного выражения для x .

Итак, доказав тождества вида

$$A_1b_1 + A_2b_2 + \dots + A_nb_n = 0,$$

получаем выражение для неизвестной x :

$$x = \frac{\Pi\{kbcd\dots \times (b-k)(c-b)(c-k)(d-c)(d-b)(d-k)\dots\}}{\Pi\{abcd\dots \times (b-a)(c-b)(c-a)(d-c)(d-b)(d-a)\dots\}}$$

остальные аналогично [15, 22].

Далее, в статьях 110–113 излагается иной метод составления определителей. Идея этого способа была намечена, но не проведена полностью у некоторых математиков XVIII в. Более подробно разработал ее О. Коши. Лобачевский, очевидно, не был знаком с мало известным тогда мемуаром О. Коши, опубликованным в X томе «Журнала Политехнической школы», и развил свой новый метод самостоятельно; к тому же в изложении, терминологии и символике обоих авторов имеются существенные отличия. Метод определения определителя, предлагаемый Лобачевским, сейчас является общеупотребительным.

Автор берет некоторое начальное произведение вида $a_1b_2c_3d_4$ со знаком плюс и составляет сумму произведений, возникающих при перестановках индексов, устанавливая знаки слагаемых известным образом, в соответствии с характером производимых перестановок, т.е рассматривает вопрос о «вычислении перемещений». и для случая, когда число букв n : $n(n-1)(n-2)\dots 1$. И только сделав все необходимые выводы о «числе всех возможных соединений» и о знаке получающихся произведений, автор переходит к обозначению сомножителей в виде букв с индексами $a_1b_2c_3d_4\dots$ и вводит суммы C , $C_m(a)$ и rC_m (значение определителя – C ; сумму произведений, распространенных на все буквы, кроме a , и все

индексы, кроме m (минор, соответствующий элементу a_m); значение суммы C , в котором индекс m заменяется на r (т.е. определитель с двумя совпадающими рядами)).

Завершая 111-ю статью, Лобачевский доказывает, что ${}^r C_m = 0$, и в 112-й статье получает результат, который с современной точки зрения может быть назван разложением определителя по элементам строки.

Наконец, в 113-й статье Лобачевский применяет свои «суммы» к решению квадратной системы линейных уравнений. При этом он сопоставляет числители и знаменатели дробей, полученных ранее (другим методом) и определяющих значения неизвестных, с этими «суммами» и на основании такого сопоставления предлагает правило нахождения неизвестных с использованием построенных им «сумм» (т. е. определителей). Для доказательства справедливости своего правила, являющегося, в сущности, правилом Крамера, Лобачевский показывает, что полученные им значения неизвестных удовлетворяют исходной системе [15, 19].

$$\begin{aligned} xC &= k_1 C_1(a) - k_2 C_2(a) + k_3 C_3(a) - \dots, \\ yC &= -k_1 C_1(b) + k_2 C_2(b) - k_3 C_3(b) + \dots, \\ zC &= k_1 C_1(c) - k_2 C_2(c) + k_3 C_3(c) - \dots \text{ и т.д.,} \end{aligned}$$

Сравнение же результатов Н.И. Лобачевского с наиболее значимыми результатами других авторов того времени показало, что его подход оригинален, практически не имеет аналогий с последовательностью изложения материала, терминологией и символикой авторов [19].

Таким образом, Лобачевский первый опубликовал в России курс высшей алгебры; книга очень интересна и в свое время, несомненно являлась выдающимся событием в математической литературе.

2.3.3. Распространение теории Якоби

Карл Густав Якоб Якоби (1804 – 1851) с 1826 г. употреблял новые методы и понятия. Вслед за Коши Якоби стал употреблять термин «детерминант», что сыграло немаловажную роль в дальнейшей судьбе этого понятия. Он уделял определителям огромное внимание, отмечая их значение для развития математики. Все необходимые для теоретического изучения сведения относительно определителей как известные ему по опубликованным материалам предшественников, так и полученные им самостоятельно были изложены в трех статьях: «О построении и свойствах детерминантов», «О функциональных детерминантах», «О знакопеременных функциях и их разложении на произведение из разностей своих элементов» (1841). Для их появления имелись основания:

- необходимость решать задачи, содержащие системы с большим числом уравнений и неизвестных;
- невостребованность теории другими математиками;
- идея автора о создании единого вычислительного аппарата;
- подготовка теоретической базы для исследования функциональных определителей.

В качестве основы послужила статья О. Коши о симметрических функциях. Он внимательно следил за публикациями ученых. Поставленная перед собой цель – подготовить учебные пособия по теории [1,2,3].

Как исследователь он обогатил науку практическими результатами. Эти статьи также публиковались на страницах журнала Крелля и посвящались задачам аналитической геометрии, преобразованиям кратных интегралов путем замены переменных, методу Пфаффа интегрирования систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с двумя и тремя неизвестными, линейным преобразованиям переменных, разложению алгебраических дробей на элементарные, решению систем линейных уравнений.

Важное значение придавал Якоби функциональным определителям, позже названным Дж. Сильвестром и А. Кэли, «якобианами» в честь его научных заслуг. Более того, исследование многих задач аналитической и дифференциальной геометрий, математического анализа, механики стало возможным благодаря расширению понятия определителя. Теория определителей стала математическим аппаратом смежных естественнонаучных дисциплин[6].

ОГЛАВЛЕНИЕ СТАТЬИ ЯКОБИ «ОБ ОБРАЗОВАНИИ И СВОЙСТВАХ ДЕТЕРМИНАНТОВ»

1. Введение
2. Произведение разностей элементов. Перестановки индексов. Свойства, связанные с перестановками индексов
3. Классификация перестановок. Правило выбора знака члена детерминанта
4. Понятие детерминанта $(n+1)$ -го порядка. Определение общего члена детерминанта
5. Элементарные вычислительные свойства
6. Разложение детерминанта по элементам ряда. Алгебраическое дополнение элемента
7. Решение систем линейных уравнений
8. Разложение детерминанта по минорам
9. Минор Π -го порядка. Алгебраическое дополнение минора Π -го порядка
10. Основные тождества, включающие алгебраические дополнения миноров Π -го порядка
11. Связь между алгебраическим дополнением элемента детерминанта и алгебраическими дополнениями миноров Π -го порядка
12. Решение систем линейных уравнений относительно вариации детерминанта системы
13. Теорема умножения детерминантов
14. Следствия теоремы умножения
15. Применение детерминантов к методу наименьших квадратов

В своей работе «Об образовании и свойствах детерминантов» Якоби определил понятие детерминанта, составленного из элементов $a_i^{(k)} \dots (i, k = \overline{0, n})$. Произведения $aa'_1a''_2 \dots a_n^{(n)}$ образовывались перестановками верхних или нижних индексов всеми возможными способами с выбранным по одному из правил знаком. Общее выражение всех $(n+1)!$ таких членов автор обозначил

$$R = \sum \pm a a'_1 a''_2 \dots a_n^{(n)}.$$

Он писал: «По примеру Гаусса и других я буду называть такое выражение R *детерминантом*, а величины $a_i^{(k)}$ – его элементами». Автор не ставил перед собой цели полностью изложить теорию, он обратился к обоснованию тех свойств и теорем, которые были необходимы для приложений.

От рассмотрения свойств разложения определителя по элементам ряда, включающих понятие алгебраического дополнения элемента, Якоби перешел к решению систем линейных уравнений по правилу Крамера. Он рассмотрел транспонирование определителя, доказывая, однако, каждый раз по столбцам, и строкам. С третьего по пятый параграфы работы были посвящены определению, а также свойствам минора и алгебраического дополнения второго порядка. Необходимость их изучения возникла из рассмотрения задач анализа.

В последнем параграфе Якоби показал возможность использования теории определителей в математическом аппарате астрономии, а именно, для решения систем линейных уравнений, составленных при применении метода наименьших квадратов в теории комбинации астрономических наблюдений[3, 10, 16].

Таким образом, в этой работе Якоби рассмотрел элементарные теоремы об определителях на базе общего определения детерминанта, введенного в математику его предшественником Коши.

2.4. Учебные пособия на этапе расширения понятия определителя

Для самостоятельной научной дисциплины теории определителей с разработанными приложениями первым пособием стал труд итальянского математика Франческо Бриоши «*La teoria dei determinanti e le sue applicazioni*», который был опубликована в 1854 г. Но мало кто знает, что попытки занять место автора первого учебного пособия по теории принадлежит известному английскому ученому Вильяму Споттисвуду. Его работа «*Elementary theorems relating to determinants*» (1851) сначала была опубликована в журнале А. Крелля. Вслед за ними вышло в свет пособие Г.Р. Бальтцера «*Theorie und Anwendung der Determinanten, mit Beziehung auf die Originalquellen*» (1857), который дополнял курс Бриоши включением большего числа свойств и приложений.

2.4.1. Деятельность В. Споттисвуда

Вильям Споттисвуд (1825 – 1883) – математик, физик, астроном, лингвист, член многих Лондонских обществ, президент Лондонского Королевского Общества, а также заядлый путешественник.

Путешествие по Пермскому краю

Мало кому из наших современников известно о пребывании известного английского ученого на Урале, в том числе и в Перми. В итоге появился опубликованный в 1857 г. отчет «*A Tarantasse Journey Through Eastern Russia*» («Путешествие на тарантасе по Восточной России осенью 1856 года» [9]). Всего в книге 11 глав, а также несколько зарисовок мест пребывания, сделанных автором. Есть даже карта путешествия, фрагмент которой представлен ниже [33].

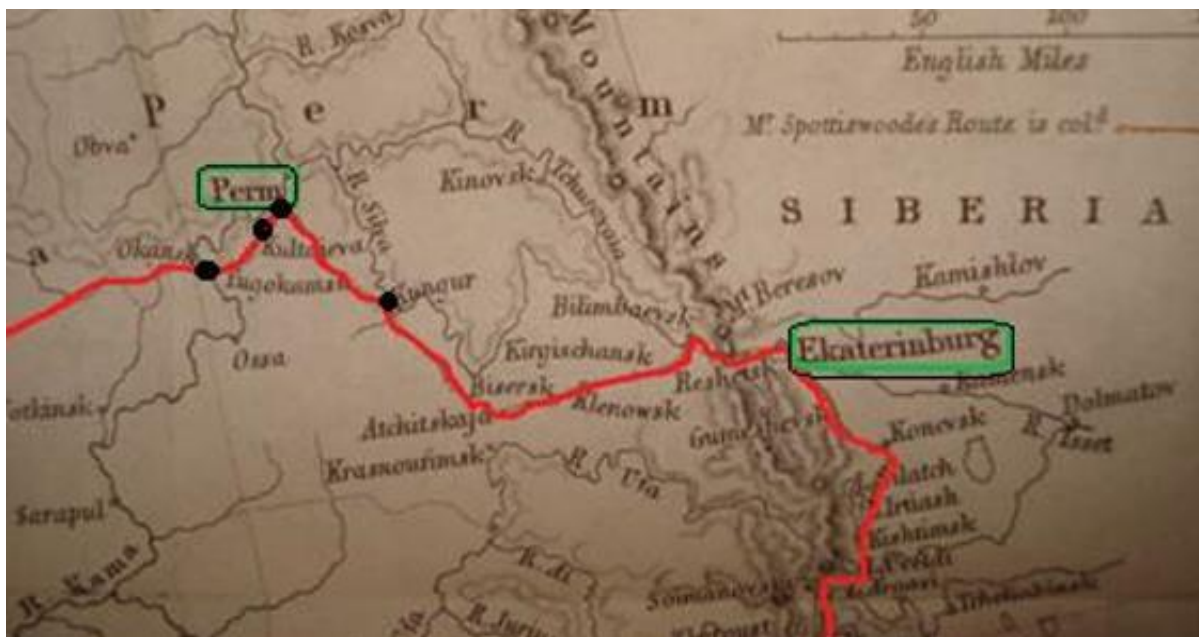


Рис. 5. Карта путешествия ученого[33]

Это был дневник ученого, в котором он увлекательно описывал особенности жителей встречавшихся на пути поселений, их историю и достопримечательности. Свой отчет о путешествии Споттисвуд начал записывать в дневнике от Москвы, куда прибыл поездом из Санкт-Петербурга. По пути к Уралу и оттуда он побывал во многих крупных городах: Владимире, Нижнем Новгороде, Чебоксарах, Казани, Перми, Екатеринбурге, Златоусте, Уфе, Стерлитамаке, Оренбурге, Самаре, Саратове, Астрахани, Тамбове. В городах он обычно останавливался на два-три дня для пополнения запасов.

Путешественник достиг Перми в конце октября проездом из Казани в Екатеринбург. В Перми остановились на три дня, чтобы восстановить силы и пополнить запасы провианта. Подъезжая к городу, Споттисвуд начал с описания природы: «С какой-то возвышенности, до последней станции, Култаево, есть прекрасный вид на долину реки Камы, во многих местах расчищенной для выращивания (сельскохозяйственных культур – прим.). Появлялись деревни, в окружении крепкого деревянного частокола, закрытого воротами, чтобы защитить и людей и скот от волков

и медведей» [33, С. 40]. Город на ученого не произвел особого впечатления, можно предположить, что время года было не очень удачным: осень, дождь, сырая холодная погода. Ученый писал: «Улицы, как это повсеместно происходит в российских городах, широкие, разбиты под прямым углом друг к другу и имеют целый ряд великолепных зданий; но после, проезжая несколько таких зданий, путешественник вдруг с удивлением обнаруживает себя в конце города, ни с чем между ним и лесом» [33, С. 40–41]. Для путешественника Пермь явился лишь очередным типичным промышленным городом.

Споттисвуд остановился в гостинице, построенной, по его словам, англичанином, преемником Говардов [33, С. 41–42]. Из окон была видна река Кама. Приведем описание гостиницы из дневника Споттисвуда: «Размещение прошло хорошо – у нас не было никаких задержек. Отель рядом с почтовым домом, на самом деле комфортабельный, удобно расположен и стоит фасадом к реке, а другой стороной к небольшому укромному саду, который выглядел на солнце почти теплым и южным. Респектабельный отель, стоит перед Камой; небольшая тропинка ведет вниз к крутому травянистому берегу; наверху – телеги, груженные сибирскими товарами; внизу несколько небольших лодок и пароход на якорю...».



Рис. 6. Гостиница, в которой останавливался В. Споттисвуд в Перми

Под описание Споттисвуда подходит старинное здание, сохранившееся до наших времен. Его называют домом Василия Евграфовича Вердеревского

или Бориса Александровича Протопопова по именам владельцев. Находится он по адресу ул. Монастырская, д. 17 (на пересечении улиц Сибирская и Монастырская). Со временем в нем многое изменилось. В настоящее время в нем располагается Транскапиталбанк.

Пособие по теории определителей

В 1851 г. вышла в свет первая опубликованная элементарная работа по теории определителей Споттисвуда – «Elementary theorems relating to determinants» («Элементарные теоремы относительно детерминантов») [34].

Стоит отметить, что это не единственная работа Споттисвуда по данному вопросу. Второе уже дополненное издание было опубликовано в 1856 г. в популярном тогда научном периодическом издании «Journal A. Crelle für die reine und angewandte Mathematik» («Журнал А. Крелля по чистой и прикладной математике»). К тому времени еще не было доступных книг, учебных пособий по данному вопросу, к которым мог бы прибегнуть студент или же любой другой, интересующийся в этой теме математик. В своей публикации он обобщил накопленные результаты по теории. Ученый хотел, детерминанты активно использовались [30].

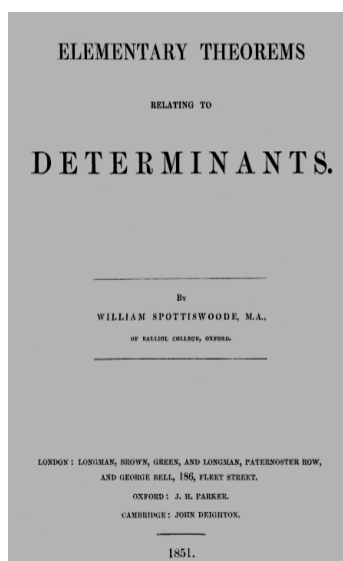


Рис. 7. Титульная страница учебного пособия Споттисвуда [30]

Публикация состоит из предисловия и 10 коротких глав. Объем всего пособия составляет около 70 страниц.

В предисловии пособия Споттисвуд повествует об истории развития теории детерминантов, начиная с метода решения систем линейных уравнений Г. Крамера и заканчивая гипердетерминантами.

Во «Введении» автор писал, что прежде чем приступить к изучению общей теории определителей, желательно изучить несколько хорошо известных формул, которые на самом деле и есть сами детерминанты, и которые являются частными случаями более общих теорем по данной теории. Споттисвуд ввел детерминанты второго и третьего порядков на примере решений геометрических задач, о взаимном расположении прямых и плоскостей.

Он предложил свою форму записи детерминанта n -го порядка

$$\nabla = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & \dots & (2,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n,1) & (n,2) & \dots & (n,n) \end{vmatrix}$$

Величины $(1,1)$, $(1,2), \dots$, который Коши называл «условиями» и «элементами», а Якоби – «составными частями», Споттисвуд называл их «символами, образующими составные части детерминанта». Способ записи, как он считал, более простой, так как элементы записываются только индексами $(1,1)$, без буквенной части. Определитель обозначался символом ∇ «набла».

Им рассматривался вопрос о вычисление определителя по теореме Лаплас за счет разложения по элементам первой строки:

$$\begin{aligned} \nabla &= \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots & (2,n) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots & (3,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n,1) & (n,2) & (n,3) & \dots & (n,n) \end{vmatrix} = (1,1) \begin{vmatrix} (2,2) & (2,3) & \dots & (2,n) \\ (3,2) & (3,3) & \dots & (3,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n,2) & (n,3) & \dots & (n,n) \end{vmatrix} \pm \\ &\pm (1,2) \begin{vmatrix} (2,3) & (2,4) & \dots & (2,1) \\ (3,3) & (3,4) & \dots & (3,1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n,3) & (n,4) & \dots & (n,1) \end{vmatrix} \pm \dots \pm (1,n) \begin{vmatrix} (2,1) & (2,2) & \dots & (2,n-1) \\ (3,1) & (3,2) & \dots & (3,n-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n,1) & (n,2) & \dots & (n,n-1) \end{vmatrix}. \\ \nabla &= \sum \pm (1,1)(2,2)\dots(n,n) \end{aligned}$$

Определитель равен сумме произведений элементов первой строки на их минор, причем столбцы в миноре записывались справа от вычеркнутого столбца. Знаки членов определяются по закону. Если число строк (столбцов) нечетное число, то члены все положительные, если же четное, то знак слагаемых попеременно положительный и отрицательный.

Представим пример вычисления:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot |7| - 1 \cdot 4 \cdot |6| + \\ &+ 2 \cdot 4 \cdot |5| - 2 \cdot (-2) \cdot |7| + 3 \cdot (-2) \cdot |6| - 3 \cdot 3 \cdot |5| = \\ &= 21 - 24 + 40 + 28 - 36 - 45 = -16 \end{aligned}$$

В пособии автором выделено 7 свойств определителя, из которых 5 совпадают с теми, что рассматриваются в современных учебниках.

Приведем пример одного из них:

Если в детерминанте n -го порядка, где $\alpha, \beta, \dots, k$ целые числа, такие, что, $\alpha + \beta + \dots + k = n$, то детерминант может быть выражен как сумма произведений детерминантов, образованных из всех групп α вертикальных

рядов в первой α горизонтальных рядов, из всех групп β вертикальных рядов в следующих β горизонтальных рядов, и так далее, но ни один вертикальный ряд не должен использоваться два раза [34].

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) \\ (2,1) & (2,2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (3,3) & (3,4) \\ (4,3) & (4,4) \end{vmatrix} + \\
 + \begin{vmatrix} (1,3) & (1,4) \\ (2,3) & (2,4) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (3,1) & (3,2) \\ (4,1) & (4,2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (1,1) & (1,4) \\ (2,1) & (2,4) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (3,2) & (3,3) \\ (4,2) & (4,3) \end{vmatrix} - \\
 - \begin{vmatrix} (1,2) & (1,3) \\ (2,2) & (2,3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (3,4) & (3,1) \\ (4,4) & (4,1) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} (1,1) & (1,3) \\ (2,1) & (2,3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (3,2) & (3,4) \\ (4,2) & (4,4) \end{vmatrix} - \\
 - \begin{vmatrix} (1,2) & (1,4) \\ (2,2) & (2,4) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (3,1) & (3,3) \\ (4,1) & (4,3) \end{vmatrix}$$

Следующие главы посвящены действиям над определителям и применение к линейным уравнениям т.д. В последних двух главах рассматриваются виды: косые, косые симметричные и функциональные.

Таким образом, в работе Споттисвуда представлены такие нововведения как:

- собственное обозначение;
- своеобразное правило вычисления;
- основные свойства определителей;
- применение к решению систем линейных уравнений;
- дифференцирование детерминантов;
- решение «избыточной» системы линейных уравнений вида $m \times n$;
- виды детерминантов (косые, косые симметрические, функциональные);

Усовершенствованное учебное пособие 1856 г. считалось одним в XIX в. Автором добавлены элементарные операции над детерминантами, миноры, рассмотрены классы детерминантов, свойства некоторых видов детерминантов.

Наиболее известна его теорема, касающаяся умножения детерминантов, находится в четвертом разделе второго пособия. Его доказательство зависит от связи между детерминантами и систем линейных уравнений [30].

Таблица 2

Сравнительная таблица по теории определителей, представленной у В. Споттисвуда и Куруша [20, 34]

Основания для сравнения	Пособие В. Споттисвуда «Elementary theorems relating to determinants, 1851 г.» [31]	Современное учебное пособие Куруша [17]
Обозначение	$\nabla = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & \dots & (2,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n,1) & (n,2) & \dots & (n,n) \end{vmatrix}$	$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$
Вычисление	Детерминант n -го равен сумме произведений элементов первой строчки на их минор, причем у четного слагаемого в миноре меняются местами 2 столбца. Знак слагаемых определяется законом: если число строк (столбцов) нечетное число, то слагаемые все положительные, если же число четное, то знак слагаемых попеременно положительный и отрицательный.	Определителем n -го порядка называется сумма $n!$ слагаемых, каждое из которых является произведением n чисел взятых по одному и только одному из каждой строчки и столбца. Знак слагаемого определяется подстановкой составленных из индексов множителей.
Свойства	В пособии представлены 7 свойств детерминантов, совпадают с современной теорией первые 5.	Существует 10 свойств определителей.
Вид детерминантов	Косые детерминанты: если $a_{ik} = -a_{ki}$, причем $k \neq i$ и элементы главной диагонали не все равны нулю, то детерминант называется косым.	Косые детерминанты: если $a_{ik} = -a_{ki}$, причем $k \neq i$ и элементы главной диагонали равны единице, то детерминант называется косым.

2.4.2. Учебные пособия Ф. Бриоски, Р.Бальцер

В 1854 г. в Павии был опубликован курс «La teoria dei determinanti e le sue applicazioni» Франческо Бриоски (1824 – 1897), который для своего времени, стал наиболее полным и теоретически обоснованным учебным пособием по теории определителей, излагавшим практически все известные в то время факты этой теории. А три года спустя, появился первый немецкий учебник по данной теории: «Die Theorie und Anwendung der Determinanten» Рихарда Бальцера (1818 – 1887).

I N D I C E		Theorie der Determinanten.	
§. 1.° Definizioni e Notazioni	Pag. 1.	§. 1. Einteilung der Permutationen gegebener Elemente in zwei Classen	4
„ 2.° Legge di formazione dei determinanti	„ 2.	§. 2. Determinante eines Systems von n^2 Elementen	4
„ 3.° Proprietà generali ai determinanti	„ 4.	§. 3. Ordnung der Glieder einer Determinante nach den in einer Reihe stehenden Elementen	9
„ 4.° Della risoluzione delle equazioni algebriche lineari	„ 12.	§. 4. Zerlegung einer Determinante in eine Summe von Producten aus partiellen Determinanten	13
„ 5.° Moltiplicazione ed elevazione a potenza dei determinanti	„ 21.	§. 5. Anordnung einer Determinante nach Producten der Elemente von zwei sich schneidenden Reihen	19
„ 6.° Determinanti ad elementi reciproci, o determinanti di determinanti	„ 34.	§. 6. Producte von Determinanten	20
„ 7.° Delle proprietà dei determinanti minori	„ 44.	§. 7. Determinanten von adjungirten Systemen	25
„ 8.° Dei determinanti gobbi e dei determinanti simmetrici	„ 55.	§. 8. Determinante eines Systems von Elementen, unter denen die correspondirenden (a_{ik} und a_{ki}) entgegengesetzt gleich sind	29
„ 9.° Dei determinanti delle radici delle equazioni algebriche, e dei determinanti degli integrali particolari delle equazioni a derivate lineari	„ 73.		
„ 10.° Dei determinanti delle funzioni	„ 84.	Anwendungen der Determinanten.	
„ 11.° Del determinante di Hesse	„ 106.	§. 9. Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen	35
		§. 10. Lehrsätze über die linearen Differentialgleichungen	38
		§. 11. Resultante von zwei algebraischen Gleichungen	42
		§. 12. Product aller Differenzen gegebener Grössen	50
		§. 13. Die Functionaldeterminanten	64
		§. 14. Lehrsätze von den homogenen Functionen	72
		§. 15. Die linearen, insbesondere die orthogonalen Substitutionen	80
		§. 16. Die Dreiecksfläche und das Tetraedervolumen	97
		§. 17. Producte von Dreiecksflächen und Tetraedervolumen	101
		§. 18. Polygonometrische und polyedrometrische Relationen	116

Рис. 8. Оглавления учебных пособий Бриоски и Бальцера [23,24]

Проведя сравнительный анализ двух пособий можно заявить, что книга Бальцера дополняла курс Бриоски. По объему пособия были небольшие: первое содержит 116 страниц, а второе 129. Авторы исходили от общего определения детерминанта по Коши, то есть как знакопеременной полилинейной функцию. В начале учебных пособий подробно рассматривались определения и свойства, относящиеся к перестановкам. Бриоски выделял 5 свойств:

1. Если в определителе переставить местами любые две строки или два столбца, то определитель изменяет свой знак на противоположный.

2. Если строки и столбцы определителя становятся столбцами и строками, то значение определителя не изменится.

3. Если две строки (столбца) определителя равны между собой, то определитель равен нулю.

4. Вынесение общего множителя за знак определителя.

5. Если все элементы k -ой строки (столбца) определителя представлены в виде сумм $a_{kj} + b_{kj}$, то определитель можно представить в виде суммы соответствующих определителей:

Однако, курс Бальцера выигрывает в количестве приведенных свойств, за счет вычисления частных случаев определителей: например, вычисление определителя треугольного вида. Также пособие Бальцера насыщено большим количеством приложений. Он рассматривал не только применение, касающиеся линейной алгебры и математического анализа, но и аналитической геометрии (площадь треугольника, объем тетраэдра) [23, 24].

2.4.3. Лекции по теории определителя Сальмона

Результаты А. Кэли и Дж. Сильвестра были представлены в популярных лекциях Джорджа Сальмона (1819 – 1904) в 1877 г. – преподавателя богословия, а с 1888 г. – ректора Тринити-колледжа.

Дж. Сальмоном были подготовлены учебные пособия по высшей алгебре и коническим сечениям. В первых главах изложена теория определителей как вычислительного аппарата. Анализ работ Кэли, Сильвестра и Сальмона позволяет утверждать, что терминология и обозначения в работах Сальмона взяты у А. Кэли и Дж. Сильвестра. Кроме того, их результаты представлены в удобном для преподавания и изучения виде, например, в «Упражнениях по исчислению гипердетерминантов» описывался способ составления инвариантов и ковариантов (1862). Термин «гипердетерминант» употреблялся Сальмоном так же, как у Кэли,

для характеристики кривых высшего порядка. Нами отмечено, что в пособии Сальмона встречался термин «якобиан» уже в смысле, предложенном Сильвестром [33].

Начиная с 1863 г., руководства выдержали несколько изданий на разных языках, в частности, немецком в переводе В. Фидлера. Это способствовало распространению результатов исследований английских ученых, а также новых терминов и обозначений, введенных ими. По совершенно простой причине – ввиду трудности перевода – была сохранена английская терминология.

2.4.3. Теория определителей и теория форм М.Е. Ващенко-Захарченко

Первая работа по теории определителей в России появилась в 1877 г. благодаря известному математику, историку науки профессору Киевского университета М.Е. Ващенко-Захарченко (1825 – 1912). В его книге «Теория определителей и теория форм» были использованы сведения мемуара О. Коши (1815) и учебника Ф. Бриоски (1854). Книга Ващенко-Захарченко содержит 14 глав, из которых 4 главы посвящены общей теории определителей и одна глава – решению систем линейных уравнений [8, 9].

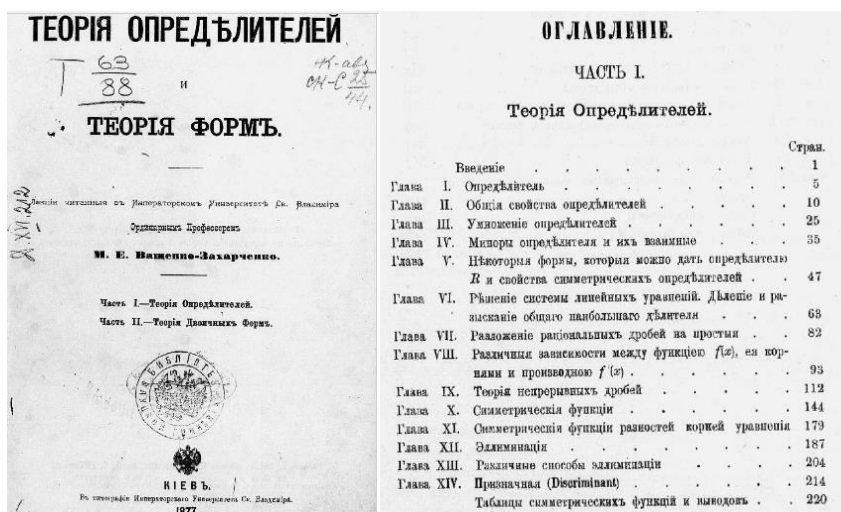


Рис.9. «Теория определителей и теория форм» [9]

В первой главе Ващенко-Захарченко вводил определители ставшим уже традиционным способом, берущим свое начало от Коши.

Во второй главе рассматривались общие свойства определителей. Изложение Ващенко-Захарченко отличается большим числом примеров, иллюстрирующих почти каждое свойство. В дополнение к свойствам, Ващенко-Захарченко завершил главу 2 параграфом, в котором рассматривал дифференцирование определителя, причем последовательность материала, изложенного в этом параграфе, и приведенные в нем формулы соответствуют материалу учебника Бриоски.

В главе 3 Ващенко-Захарченко как одну из «важнейших теорем в теории определителей» формулировал теорему об умножении определителей и пояснил ее на частном примере произведения двух определителей 3-го порядка.

В главе 4 автор дал определения «минора данного определителя» и «взаимного» (составленного из алгебраических дополнений) определителя. Кроме того, в этой главе Ващенко-Захарченко указал на некоторые свойства миноров, подобно тому как это делает в своей книге Бриоски.

В 6-й главе рассматривал решение квадратной системы линейных уравнений с явным использованием материала работ Коши, Бриоски [9].

Таким образом, учебник Ващенко-Захарченко являлся первой крупной работой на русском языке, специально посвященный теории определителей и вобравший в себя все известные к тому времени сведения по предмету. Вероятно, именно поэтому монография Ващенко-Захарченко получила в России наибольшее распространение и известность как учебное пособие по теории определителей [19].

В заключение главы можно сказать, что анализ предложенных учебных пособий позволил выделить два подхода к изучению теории определителей. Первый подход рассматривается в рамках теории линейных уравнений (традиционный), а второй – в рамках теории функции (функциональный). Большинство авторов учебных пособий, изданных в середине XIX столетия,

рассматривали определитель как полилинейную функции нескольких переменных.

Таблица 3

Этапы истории и учебные пособия

Этап развития теории	Подход к изложению теории	Учебные пособия
Зарождение теории определителей	традиционный	Математический тракт «Математика в девяти книгах», II в. до н. э.
Накопление элементарных сведений по теории определителей		«Курс математики» Безу, 1769 г.
Построение теории определителей	функциональный	«Алгебраический анализ» Коши, 1821 г. «О построении и свойствах детерминантов» Якоби, 1841 г.
	традиционный	«Алгебра и вычисление конечных» Н.И. Лобачевского, 1834 г.
Расширение понятия определитель	функциональный	«Elementary theorems relating to determinants» В. Споттисвуда, 1851 г. «La teoria dei determinanti e le sue applicazioni» Ф. Бриоски, 1854 г. «Die Theorie und Anwendung der Determinanten» Р. Бальцера, 1857 г. «Теория определителей и теория форм» М.Е. Вщенко-Захарченко, 1877 г.

Во второй половине XIX в. исследования по теории определителей все чаще стали пополняться результатами по теории матриц. К концу столетия – матричное исчисление и исследование матриц квадратичных форм слились в единую теорию.

Современная программа по высшей математике предусматривает одновременное изучение свойств матриц и определителей, в том числе их применение в качестве вычислительного аппарата к решению систем линейных уравнений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выпускная квалификационная работа посвящена историко-математическому исследованию процесса преподавания теории определителей.

В ходе исследования предприняты и выполнены следующие шаги:

1. В соответствии с данными историко-математических исследований представлены этапы развития теории определителей.
2. Рассмотрена учебная литература, в том числе иностранная.
3. Установлено соответствие этапов истории определителей и важных математических открытий ученых в этой области; составлена таблица нововведений.
4. Выполнен сравнительный анализ пособий и подходов к определению определителя.
5. Представлены примеры некоторых задач из пособий.
6. Установлено соответствие этапов истории определителей и рассмотренной учебной литературы.

Проделанная работа позволяет сделать вывод о том, в процессе развития любой математической теории возникают различные способы ее изложения в зависимости от времени и места. История преподавания во многом зависит от накопления фактического материала и уровня развития математики. Так, например, на этапе зарождения и накопления теории, определители были способом решения систем линейных алгебраических уравнений, не выходя за их рамки. А уже следующий этап свидетельствует о создании новой независимой теории определителей, строящейся на основе знакопеременной функции. Таким образом, теория определителей строится в зависимости от выбранного за основу определения. В работе было выделено два подхода: в рамках теории уравнений и в рамках функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александрова Н.В.* История математических терминов, понятий, обозначений: словарь-справочник / Н.В. Александрова. – 3-е изд., испр. – М.: ЛКИ, 2008. – 248 с.
2. *Ананьева М.С.* История преподавания теории детерминантов / М.С. Ананьева // Педагогические идеи Е.А. Дышинского и современное математическое образование: Материалы конф. преподавателей, 2-3 ноября 2004 г. – Пермь : Перм. гос. педун-та, 2005. – С. 28-34.
3. *Ананьева М.С.* Работы английских ученых по теории детерминантов в середине XIX столетия / М.С. Ананьева, А.Е. Малых // История и методология науки. – Пермь: ПГУ, 2000. – Вып. 7. – С. 80-88.
4. *Ананьева М.С.* Развитие теории детерминантов до середины XIX века: автореф. ... канд. физико-математических наук / М. С. Ананьева. – Пермь: ПГПУ, 2003. – 20 с.
5. *Безу Э.* Курс математики господина Безу, члена Французской академии наук, экзаминатора воспитанников Артиллерийского и Морского корпусов, и королевского цензора : Ч. 3 / Э. Безу; пер. с франц. В. Загорского. М.: Унив. тип. у Хр. Клаудия, 1801. – 412 с.
6. *Белл Э.Т.* Творцы математики. Предшественники современной математики: пособие для учителей / Э.Т. Белл; под ред. С.Н. Киро; пер. с англ. В.Н. Тростникова, С.Н. Киро. – М. : Просвещение, 1979. – 256 с.
7. *Березкина Э.И.* Математика древнего Китая. / Э.И. Березкина. – М.: Наука, 1980. – 311 с.
8. *Бородин А.И.* Биографический словарь деятелей в области математики / А.И. Бородин, А.С. Бугай; под ред. И.И. Гихмана; пер. с укр. И.И. Гихмана. – Киев : Рад. школа, 1979. – 607 с.

9. *Ващенко-Захарченко М.Е.* Теория определителей и теория форм / М.Е. Ващенко-Захарченко. – Киев: Типография Императорского университета святого Владимира, 1887. – 502 с.

10. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия / Г. Вилейтнер; пер. с нем. П.С. Юшкевич, А.П. Юшкевич. – М.: Наука, 1966. – 467 с.

11. *Гаусс К.Ф.* Труды по теории чисел / Г.Ф. Гаусс; под. ред. И.М. Виноградова; пер. с нем. В.Б. Демьянова. – М. : Изд-во АН СССР, 1959. – 978 с.

12. *Гусак Г.М.* Системы алгебраических уравнений / Г.М. Гусак. – Минск: Вышэйшая школа, 1983. – 222 с.

13. *Крыситский В.* Шеренга великих математиков: пособие для учителей / В. Крыситский. – Варшава: Наша Ксенгарния, 1981. – 208 с.

14. *Лейбниц Г.В.* Избранные отрывки из математических сочинений / Г.В. Лейбниц; сост. и пер. А.П. Юшкевич // Успехи математических наук. – 1948. – Т. 3. – Вып. 1 (23). – С. 197 – 198.

15. *Лобачевский Н.И.* Сочинения по алгебре. Алгебра или вычисление конечных / Полное собрание сочинений. М. – Л. : ОНТИ, 1948. – Т. 4. – С. 127–140.

16. *Нетто Е.* Начала теории определителей. / Е. Нетто. – Одесса: Матезис, 1912. – 156 с.

17. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры / А.Г. Курош – М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1968. – 431 с.

18. *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк; пер. с нем. И.Б. Погребысского. – М.: Наука, 1990. – 254 с.

19. *Тарановская Т.Д.* Теория определителей в работах русских математиков XIX века // История и методология естественных наук / под ред.: К.А. Рыбников – М.: МГУ, 1989. Вып. XXXVI. – С. 130–138.

20. *Шифф В.* Элементарное изложение некоторых сведений из теории определителей. / В. Шифф – М.: СПб: Имп. М.О. Вольфа, 1914. – 36 с.
21. *Юшкевич А.П.* История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / А.П. Юшкевич. – М.: Изд-во Наука, 1972. – Т. 3. – 495 с.
22. *Юшкевич А.П., Башмакова И.Г.* «Алгебра или вычисление конечных» Н.И. Лобачевского // Историко-математические исследования. – М.: ГИТТЛ, 1949. – Вып. II. – С. 72–128.
23. *Baltzer R.* Theorie und Anwendung der Determinanten, mit Beziehung auf die Originalquellen. / R. Baltzer. – Leipzig, 1857. – vi + 129 s.
24. *Brioschi F.* La teoria dei determinanti e le sue applicazioni. / F. Brioschi. – Pavia, 1854. – 116 p.
25. *Cauchy A.* Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique. / A. Cauchy. Paris: Debure, 1821. – P. 1. Analyse algebrique.- xiv + 576 p.
26. *Cauchy A.* Mémoire sur le nombre des Valeurs qu'une Fonction peut acquérir, lorsqu' on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme // Journal de l' école polytechnique. Paris, 1815. – Т. 10, Ser.I. – P. 1–28.
27. *Cramer G.* La teoria dei determinanti le sue principali applicazioni [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://books.google.ru>. (дата обращения: 12 июня 2018 г.).
28. *Grafika.ru* [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.grafika.ru/item/08-002707?r=7000>. (дата обращения: 12 июня 2018 г.).
29. *MacTutor.* История математики – архив [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Spottiswoode.html> (дата обращения: 12 июня 2018 г.).
30. *Muir T.* The Theory of Determinants in the Historical Order of Development / T. Muir. – London, 1960. – Vol. 2: The period 1841 – 1860. – 475 p.

31. *Muir T.* The Theory of Determinants in the Historical Order of Development / T. Muir. – London, 19. – Vol. 1: The period 1841 – 1860. – 475 p.
32. *Pascal E.* Die Determinanten. Eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die neueren Forschungen / Überz. H. Leizmann. – Leipzig: Verlag von Teubner, 1900. – 266 p.
33. *Salmon G.* Lessons introductory to the modern higher algebra. / G. Salmon. – Dublin, 1868. – 376 p.
34. *Spottiswoode W.* A Tarantasse Journey Through Eastern Russia / W. Spottiswoode; London; Longman, Brown, Green, and Longman, 1857. – 258 p.
35. *Spottiswoode W.* Elementary theorems relating to determinants / W. Spottiswoode; London; Longman, Brown, Green, and Longman, 1851. – 63 p.
36. *Sylvester J.J.* The collected mathematical papers: in 4 vol. / J.J. Sylvester. – Cambridge, 1908. – Vol. II. – 732 p.
37. *Sylvester J.J.* The collected mathematical papers: in 4 vol. / J.J. Sylvester. – Cambridge, 1904. – Vol. I. – 650 p.