Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра теории и методики обучения математике

Выпускная квалификационная работа

ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ КОМБИНИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ В СТАРШЕЙ ШКОЛЕ

Работу выполнила:
студентка группы 151
направления 44.03.05
Педагогическое образование
Профили «Математика и Информатика»
Захарова Владислава Александровна

____
подпись

«Допущена к защите в ГЭК»
Зав. кафедры теории и методики обучения математике

09.06.18 _______________
дата подпись

Руководитель: старший преподаватель кафедры теории и методики обучения математике Мусихина Ирина Васильевна

____
подпись

Пермь
2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
Глава 1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ . 5
1.1. Задачи и функции самостоятельной работы школьника 5
1.2. Классификации самостоятельной работы 7
1.3. Дидактические принципы организации самостоятельной работы учащихся 11
1.4. Уровни самостоятельности школьников 16
Глава 2. ИЗУЧЕНИЕ КОМБИНИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ В СТАРШЕЙ ШКОЛЕ 19
2.1. Методы решения комбинированных уравнений 19
2.2. Анализ учебно-методической литературы 33
2.3. Методические рекомендации по изучению методов решения комбинированных уравнений 37
2.3.1. Графический метод решения комбинированных уравнений. 37
2.3.2. Применение области определения функций при решении уравнений 40
2.3.3. Применение монотонности функции при решении уравнений 41
2.3.4. Применение ограниченности функций при решении уравнений 43
2.4. Результаты апробации материалов 44
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 46
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 47
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 51
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. 87
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. 88

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение – одно из основных понятий в математике. Материал, связанный с ним, составляет значительную часть школьного курса. Комбинированные уравнения включены в контрольно-измерительные материалы ЕГЭ. Многие учащиеся относятся к ним, как к задачам повышенной сложности, так как решение комбинированных уравнений требует умения выполнять равносильные преобразования уравнений, выбирать наиболее рациональный способ решения. Но, к сожалению, времени на уроках бывает недостаточно для изучения данной темы, а некоторым школьникам необходимо отрабатывать описанные в учебниках приемы их и изучать новые самостоятельно.

Почти все учащиеся старших классов в полной мере владеют аналитическим методом решения уравнений. Однако использование этого метода при решении комбинированных уравнений порой отнимает много времени или вообще не позволяет найти корни уравнения. У учеников возникает вопрос: можно ли решать такие уравнения другими методами, не прибегая к долгим и громоздким преобразованиям? Поэтому важно показать учащимся способы решения комбинированных уравнений, основанные на простых и хорошо известных свойствах функций.

Объектом исследования: процесс обучения математике в школе.

Предметом исследования: процесс обучения решению комбинированных уравнений в старших классах.

Цель: изучение возможности организации самостоятельной работы учащихся при изучении методов решения комбинированных уравнений.

Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

– проанализировать научную и методическую литературу по теме исследования;

– описать методы решения комбинированных уравнений, составить сборник уравнений, решаемых описанными способами;

– разработать методические рекомендации по организации самостоятельной работы учащихся при обучении методам решения комбинированных уравнений;

– провести апробацию разработанных материалов.

Методы: анализ литературы, аналогия при составлении задач, сравнение различных методов решения комбинированных уравнений.

Практическая ценность выпускной работы заключается в том, что составлен сборник заданий.

Выпускная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литературы и приложения.

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи, необходимые для ее достижения, определены предмет и объект исследования, представлена краткая структура работы.

В первой главе рассматривается понятие самостоятельной работы школьников, формы контроля и уровни самостоятельной деятельности.

Во второй главе проанализированы методы решения комбинированных уравнений и составлены методические рекомендации по их изучению.

В заключении приводятся полученные результаты и подводятся итоги выполненного исследования.

Список литературы насчитывает 42 наименования.

Объем выпускной работы 50 страниц.

Глава 1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ

1.1. Задачи и функции самостоятельной работы школьника

Чтобы раскрыть личность ребенка, необходимо найти системообразующий компонент. Ученые выделяют самостоятельность, которая, позволяет ему в дальнейшем легко ориентироваться в изменяющихся условиях, использовать знания и умения в нестандартных ситуациях.

По мнению Б.П. Есипова «самостоятельная работа – это такая работа, которая выполняется без непосредственного участия учителя, но по его заданию, в специально предоставленное для этого время, при этом учащиеся, сознательно стремятся достигнуть поставленной цели, используя свои усилия и выражая в той или иной форме результат умственных или физических (либо тех и других вместе) действий» [15, с. 152]. «Самостоятельная работа служит важным средством развития у учащихся познавательных способностей: наблюдательности, пытливости, логического мышления, памяти, воображения, творческой активности в добывании и применении знаний» [15, с. 8].

По мнению А. И. Зимней самостоятельная работа – это «целенаправленная, внутренне мотивированная структурированная самим объектом в совокупности выполняемых действий и корригируемая им по процессу и результату деятельности. Ее выполнение требует достаточно высокого уровня самосознания, рефлективности, самодисциплины, личной ответственности, доставляет ученику удовлетворение как процесс самосовершенствования и самопознания» [18, с. 335].

За основу возьмем первое определение самостоятельной работы.

Общей *целью* самостоятельной работы учеников при изучении математики является формирование математического мышления. Она конкретизируется в задачах самостоятельной работы по каждой теме, среди которых выделяются приоритетные.

Задачи самостоятельной работы [15]:

1) систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений;

2) углубление и расширение теоретических знаний;

3) формирование навыков работы со справочной литературой;

4) развитие познавательных способностей и активности учащихся: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;

5) формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;

6) развитие исследовательских умений.

Самостоятельная работа выполняет ряд *функций*, к которым относятся [15]:

1) развивающая (повышение культуры умственного труда, приобщение к творческим видам деятельности, обогащение интеллектуальных способностей студентов);

2) информационно-обучающая (учебная деятельность студентов на аудиторных занятиях, неподкрепленная самостоятельной работой, становится мало результативной);

3) ориентирующая и стимулирующая (процессу обучения придается профессиональное ускорение);

4) воспитывающая (формируются и развиваются профессиональные качества специалиста);

5) исследовательская (новый уровень профессионально-творческого мышления).

1.2. Классификации самостоятельной работы

Виды самостоятельной работы, применяемые в учебном процессе, классифицируют по различным признакам:

– по дидактической цели,
– по характеру учебной деятельности учащихся,
– по содержанию,
– по степени самостоятельности учащихся и т. д.

Одну из наиболее полных и логически-завершенных классификаций самостоятельных работ представил В.П. Стрезикозин. В основу данной классификации были положены источник знания и метод обучения.

Автор выделил следующие виды самостоятельных работ [32, с. 89]:

1) работа с учебником;
2) работа со справочной литературой;
3) решение и сопоставление задач;
4) учебные упражнения обычные и в тетради с печатной основой;
5) сочинения и описания;
6) наблюдения и лабораторные работы;
7) работы-задания, связанные с использованием иллюстраций, картинок, схем, графиков и раздаточного материала;
8) графические работы.

Л.В. Жарова классификацию самостоятельной работы по дидактической цели и выделяет пять групп деятельности [16]:

1) приобретение новых знаний, овладение умением самостоятельно приобретать знания;
2) закрепление и уточнение знаний;
3) выработка учения применять знания в решении учебных и практических задач;
4) формирование учений и навыков практического характера;

5) формирование умений и навыков творческого характера, умения применять знания в усложненной ситуации.

Каждая из перечисленных групп включает в себя несколько видов самостоятельной работы, поскольку решение одной и той же дидактической задачи может осуществляться различными способами. Указанные группы тесно связаны между собой. Эта связь обусловлена тем, что одни и те же виды работ могут быть использованы для решения различных дидактических задач.

К основным видам самостоятельных работ можно отнести следующие [32]:

1. Работа с книгой.
2. Упражнения.
3. Выполнение практических и лабораторных работ.
4. Проверочные самостоятельные, контрольные работы, диктанты, сочинения.
5. Подготовка докладов, рефератов.
6. Домашние опыты, наблюдения.
7. Техническое моделирование и конструирование»

В соответствии с уровнями самостоятельной деятельности принято выделять следующие типы самостоятельной работы:

– воспроизводящие,
– реконструктивно-вариативные,
– эвристические,
– творческие.

Самостоятельные работы часто используют для контроля. В зависимости от целей выделяют следующие самостоятельные работы [32]:

– обучающие;
– тренировочные;
– закрепляющие;
– повторительные;

– развивающие;
– творческие;
– контрольные.

Рассмотрим каждый вид более подробно.

1. *Обучающие самостоятельные работы*. В ходе объяснения нового материала, учитель дает детям самостоятельную работу. «Цель таких работ – развитие интереса к изучаемому материалу, привлечение каждого ученика к работе на уроке» [32]. При выполнении данной работы школьник сразу видит, что ему непонятно, и он может попросить дополнительно объяснить эту часть материала. Учитель же составляет схему дальнейшего объяснения материала, в которой описываются сложные для учеников моменты, на которые в дальнейшем необходимо будет обратить внимание.

«Если ученик в процессе самостоятельной работы продумывает факты, на основании которых излагается новый материал или решается задача, то значительно повышается продуктивность его дальнейшей работы» [32].

2. *Тренировочные самостоятельные работы*. «К ним относятся задания на распознавание различных объектов и свойств. В тренировочных заданиях часто требуется воспроизвести или непосредственно применить теоремы, свойства тех или иных математических объектов и др.

Тренировочные самостоятельные работы в основном состоят из однотипных заданий, содержащих существенные признаки и свойства данного определения, правила. Такая работа позволяет выработать основные умения и навыки, тем самым создать базу для дальнейшего изучения материала. При выполнении тренировочных самостоятельных работ необходима помощь учителя. Также можно разрешить пользоваться учебником и записями в тетрадях, таблицами и т.п. Все это создает благоприятный климат для слабых учащихся. В таких условиях они легко включаются в работу и выполняют ее. В тренировочные самостоятельные работы можно включить выполнение заданий по разноуровневым карточкам. Самостоятельная работа оказывает значительное влияние на глубину и прочность знаний учащихся по предмету, на развитие их познавательных способностей, на темп усвоения нового материала » [32].

3. *Закрепляющие самостоятельные работы*. К ним можно отнести самостоятельные работы, которые способствуют развитию логического мышления и требуют комбинированного применения различных правил и теорем. Они показывают, насколько прочно усвоен учебный материал. По результатам проверки заданий данного типа учитель определяет количество времени, которое нужно посвятить повторению и закреплению данной темы. Примеры таких работ в изобилии встречаются в дидактическом материале.

4. Очень важны так называемые *повторительные* (обзорные или тематические) работы.

5. Самостоятельные работы *развивающего характера*. Это могут быть задания по составлению докладов на определенные темы, подготовка к олимпиадам, научно творческим конференциям, проведение в школе дней математики и др. На уроках это могут быть самостоятельные работы, в которые включены задания исследовательского характера.

6. Большой интерес вызывают у учащихся *творческие самостоятельные* работы, которые предполагают достаточно высокий уровень самостоятельности. Здесь учащиеся открывают для себя новые стороны уже имеющихся у них знаний, учатся применять эти знания в неожиданных, нестандартных ситуациях. В самостоятельные творческие работы можно включить задания, при выполнении которых необходимо и несколько способов их решений.

7. *Самостоятельные контрольные работы*. Главной функцией является – функция контроля. Условия при составлении заданий для самостоятельных контрольных работ должны быть следующими: равноценные по содержанию и объему работы; направлены на отработку основных навыков; обеспечивают достоверную проверку уровня знаний; стимулируют учащихся, позволять им продемонстрировать все их навыки и умения.

Эффективность самостоятельной работы, формирование навыков самостоятельной деятельности во многом зависит от вовремя выполненного анализа результатов работ. Когда у ученика еще не окончен процесс корректировки новых знаний, очевидно, что анализ самостоятельной работы должен носить обучающий характер, т.е. не просто констатировать количество ошибок, а производить их разбор, с тем, чтобы учащиеся смогли до конца понять вопросы, в которых сделали ошибки.

«К самостоятельным творческим работам можно отнести такие формы как:

- практические работы;
- контрольные работы;
- тематические зачеты;
- защита и написание рефератов;
- решение проблемных задач прикладного характера и другие» [15].

1.3. Дидактические принципы организации самостоятельной работы учащихся

На уроках и дома учащиеся могут самостоятельно приобретать знания, умения и навыки. Все виды самостоятельной работы учащихся только тогда дают положительные результаты, когда они определенным образом организованы, т.е. представляют систему.

Под системой самостоятельных работ понимается совокупность взаимосвязанных, взаимообуславливающих друг друга, логически вытекающих один из другого и подчиненных общим задачам видов работ.

«Планировать учителю самостоятельную работу учащихся правильнее всего в системе уроков по теме» [15, с. 214].

Всякая система должна удовлетворять определенным требованиям. В противном случае это будет не система, а случайный набор фактов, объектов, предметов и явлений.

«При построении системы самостоятельных работ в качестве основных дидактических требований выдвинуты следующие:

1. Система самостоятельных работ должна способствовать решению основных дидактических задач — приобретению учащимися глубоких и прочных знаний, развитию у них познавательных способностей, формированию умения самостоятельно приобретать, расширять и углублять знания, применять их на практике.

2. Система должна удовлетворять основным принципам дидактики, и, прежде всего принципам доступности и систематичности, связи теории с практикой, сознательной и творческой активности, принципу обучения на высоком научном уровне.

3. Входящие в систему работы должны быть разнообразны по учебной цели и содержанию, чтобы обеспечить формирование у учащихся разнообразных умений и навыков.

4. Последовательность выполнения домашних и классных самостоятельных работ логически вытекало из предыдущих и готовило почву для выполнения последующих. В этом случае между отдельными работами обеспечиваются не только «ближние», но и «дальние» связи. Успех решения этой задачи зависит не только от педагогического мастерства учителя, но и от того, как он понимает значение и место каждой отдельной работы в системе работ, в развитии познавательных способностей учащихся, их мышления и других качеств» [15].

Однако одна система не определяет успеха работы учителя по формированию у учеников знаний, умений и навыков. Для этого нужно еще знать основные принципы, руководствуясь которыми можно обеспечить эффективность самостоятельных работ, а также методику руководства отдельными видами самостоятельных работ.

Эффективность самостоятельной работы достигается, если она является одним их составных, органических элементов учебного процесса, и для нее предусматривается специальное время на каждом уроке, если она проводится планомерно и систематически, а не случайно и эпизодически.

Только при этом условии у учащихся вырабатываются устойчивые умения и навыки в выполнении различных видов самостоятельной работы и наращиваются темпы в ее выполнении.

«При отборе видов самостоятельной работы, при определении ее объема и содержания следует руководствоваться, как и во всем процессе обучения, основными принципами дидактики. Наиболее важное значение в этом деле имеют принцип доступности и систематичности, связь теории с практикой, принцип постепенности в нарастании трудностей, принцип творческой активности, а также принцип дифференцированного подхода к учащимся» [32, с. 69].

Применение этих принципов к руководству самостоятельной работой имеет следующие особенности [18]:

1. Самостоятельная работа должна носить целенаправленный характер. Это достигается четкой формулировкой цели работы. Задача учителя заключается в том, чтобы найти такую формулировку задания, которая вызывала бы у школьников интерес к работе и стремление выполнить ее как можно лучше. Учащиеся должны ясно представлять, в чем заключается задача и каким образом будет проверяться ее выполнение. Это придает работе учащихся осмысленный, целенаправленный характер, и способствует более успешному ее выполнению.

Недооценка указанного требования приводит к тому, что учащиеся, не поняв цели работы, делают не то, что нужно, или вынуждены в процессе ее выполнения многократно обращаться за разъяснением к учителю. Все это приводит к нерациональной трате времени и снижению уровня самостоятельности учащихся в работе.

2. Самостоятельная работа должна быть действительно самостоятельной и побуждать ученика при ее выполнении работать напряженно. Однако здесь нельзя допускать крайностей: содержание и объем

самостоятельной работы, предлагаемой на каждом этапе обучения, должны быть посильными для учащихся, а сами ученики – подготовлены к выполнению самостоятельной работы теоретически и практически.

3. На первых порах у учащихся нужно сформировать простейшие навыки самостоятельной работы. В этом случае самостоятельной работе учащихся должен предшествовать наглядный показ приемов работы с учителем, сопровождаемый четкими объяснениями, записям и на доске.

Самостоятельная работа, выполненная учащимися после показа приемов работы учителем, носит характер подражания. Она не развивает самостоятельности в подлинном смысле слова, но имеет важное значение для формирования более сложных навыков и умений, более высокой формы самостоятельности, при которой учащиеся оказываются способными разрабатывать и применять свои методы решения задач учебного или производственного характера.

4. Для самостоятельной работы в большинстве случаев нужно предлагать такие задания, выполнение которых не допускает действия по готовым рецептам и шаблону, а требует применения знаний в новой ситуации. Только в этом случае самостоятельная работа способствует формированию инициативы и познавательных способностей учащихся.

5. В организации самостоятельной работы необходимо учитывать, что для овладения знаниями, умениям и навыками различным учащимися требуется разное время. Осуществлять это можно путем дифференцированного подхода к учащимся.

Наблюдая за ходом работы класса в целом в отдельных учащихся, учитель должен вовремя переключать успешно справившихся с заданиями на выполнение более сложных. Некоторым учащимся количество тренировочных упражнений можно свести до минимума. Другим дать значительно больше таких упражнений в различных вариациях, чтобы они усвоили новое правило или новый закон и научились самостоятельно применять его к решению учебных задач. Перевод такой группы учащихся на выполнение более сложных заданий должен быть своевременным. Здесь вредна излишня торопливость, как и чрезмерно продолжительное «топтание на месте», не продвигающее учащихся вперед в познании нового, в овладении умениями и навыками.

6. Задания, предлагаемые для самостоятельной работы, должны вызывать интерес учащихся. Он достигается новизной выдвигаемых задач, необычностью их содержания, раскрытием перед учащимися практического значения предлагаемой задачи или метода, которым нужно овладеть.

7. Самостоятельные работы учащихся необходимо планомерно и систематически включать в учебный процесс. Только при этом условии у них будут вырабатываться твердые умения и навыки.

Результаты работы в этом деле оказываются более ощутимы, когда выработке навыков самостоятельной работы у школьников занимается весь коллектив учителей, на занятиях по всем предметам.

8. При организации самостоятельной работы необходимо осуществлять разумное сочетание и изложения материала учителем с самостоятельной работой учащихся по приобретению знаний, умений и навыков. В этом деле нельзя допускать крайностей: излишнее увлечение самостоятельной работой может замедлить темпы изучения программного материала, темпы продвижения учащихся вперед в познании нового.

9. При выполнении учащимися самостоятельных работ любого вида руководящая роль должна принадлежать учителю. Учитель продумывает систему самостоятельных работ, их планомерное включение в учебный процесс. Он определяет цель, содержание и объем каждой самостоятельной работы, ее место на уроке, методы обучения различным видам самостоятельной работы. Он обучает учащихся методами самоконтроля и осуществляет контроль за качеством ее выполнения, изучает индивидуальные особенности учащихся и учитывает их при организации самостоятельной работы».

Самостоятельная работа обладает большим потенциалом для развития различных умений школьников. Основными из них являются:

– умения работать с книгой (учебником, математическим текстом, справочниками, таблицами и.др.), работа по плану, алгоритму, предписанию. Навыки работы учащихся по плану особенно успешно развиваются на уроках геометрии. Так, умение работать по образцу не приходит само собой, а требует специальных приемов работы учителя, на уроках математики можно применять карточки с пропусками;

– классификация, систематизация учебного материала успех самостоятельной работы нередко зависит от умения систематизировать учебный материал;

– навыки самоконтроля и самоанализа.

Организация самостоятельной работы, руководство ею – это ответственная и сложная работа каждого учителя. Воспитание активности и самостоятельности необходимо рассматривать как составную часть воспитания учащихся. Эта задача выступает перед каждым учителем в числе задач первостепенной важности.

1.4. Уровни самостоятельности школьников

Потребность установить уровни самостоятельности обучаемых появилась у педагогов и психологов давно. Но вместе с тем, выявились и трудности такой диагностики. Не случайно основным показателем самостоятельности большинство склонны считать учебные достижения ученика (умения). Однако, если ориентироваться на более отдаленные результаты обучения и развивать самостоятельность как качество деятельности личности, то критериями выделения уровней самостоятельности могут быть: степень сформированности знаний и умений, содержание и устойчивость мотивации, отношение школьников к учебной деятельности, её нравственные основы.

В соответствии с этими критериями выделяют три уровня самостоятельности [16]:

– подражательно-пассивный (низкий),
– активно-пассивный (средний),
– интенсивно-пассивный (высокий).

Низкий уровень самостоятельности – ученик может выполнять действия по готовому образцу (копирование).

По мнению психологов Л.С. Выготского и Л.Г. Ковалева подражание «является свойством развивающейся личности, а с другой стороны – способом познания действительности» [27]. Л.С. Выготский писал, что для того, чтобы подражать, «ребенок должен иметь какую-то возможность перехода оттого, что он умеет, к тому чего не умеет» [27]. Ценность же такой самостоятельности будет зависеть от того, какие образы для подражания получает ученик. Мотивы носят ситуативный характер и связаны обычно с внешним побуждением. Познавательная потребность не выражена. Активность проявляется редко, ответственность чаще стимулируется внешним контролем. Выражена потребность в помощи товарищей, учителей.

Средний уровень самостоятельности «предполагает свободное применение знаний в знакомой, стандартной ситуации. Цель работы, учебную задачу выдвигает учитель, но планировать её решение ученик может уже сам. Выполняя типовые упражнения, примеры, излагая текст, ученик подвергает материал частичной реконструкции, суть вопроса умеет раскрыть своими словами, не копируя учебник или рассказ учителя. Проявляется интерпретирующая активность. Успешно осуществляется взаимоконтроль, и самоконтроль, но преимущественно после завершения работы. Сам же процесс деятельности контролируется слабо. Для этого уровня самостоятельности характерен чаще один, но устойчивый мотив (желание узнать новое, чувство долго и др.)» [27].

Высокий уровень самостоятельности характеризуется тем, что ученик успешно применяет знания в новой, нестандартной для него ситуации. При этом обнаруживается их системность, умение ученика устанавливать внутрипредметные и межпредметные связи. «Наблюдается высокий уровень прогнозирования собственной деятельности: ученик сам может поставить перед собой цель, способен видеть и сформулировать учебную проблему, планировать этапы её решения. У школьников, обладающих высоким уровнем самостоятельности, может быть хорошо выражена оригинальность мышления, умение использовать различные средства обучения. Наблюдается высокая интенсивность самостоятельность деятельности, в процессе которой постоянно осуществляется самоконтроль. Процесс решения задачи непрерывно соотносится с её условиями. Проявляется мотивация, часто связанная с жизненными планами и профессиональными намерениями учащихся. Наряду с этим хорошо выражены и общественно значимые мотивы: активное отношение к работе товарищей, готовность сотрудничать с учителем, товарищами, работниками библиотеки, других внешкольных объектов. Отмечается высокая ответственность за результаты индивидуального и коллективного труда» [27]

Самостоятельная работа учащихся является важной составляющей учебно-воспитательного процесса.

Глава 2. ИЗУЧЕНИЕ КОМБИНИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ В СТАРШЕЙ ШКОЛЕ

2.1. Методы решения комбинированных уравнений

Уравнение – одна из основных линий школьного курса математики. К ним сводится решение многих текстовых задач, с их помощью задаются функции, геометрической фигуры.

В школьном курсе математики существуют следующие трактовки понятия уравнения:

1) равенство с буквой, значение которой нужно найти [3, с. 83];
2) равенство с переменной [6, с. 23];
3) равенство двух функций [30];
4) математическая модель задачи [23], [13, с. 19].

В методике преподавания математики выделяют три аспекта использования уравнения:

1) Теоретико-математическая направленность линии уравнений и неравенств состоит в изучении обобщенных понятий и методов, относящихся к линии в целом, а также в изучении наиболее важных классов уравнений, неравенств и их систем.

2) Прикладная направленность раскрывается широким использованием уравнения как простейшей математической модели в решении задач.

3) Линия уравнений и неравенство выделена как одна из основных содержательных линий школьного курса математики. Её характерная направленность на установление связей с остальным содержанием курса математики.

Комбинированные уравнения – это уравнения, которые содержат комбинацию нескольких функций [26].

В основном в учебной литературе выделяются следующие виды комбинированных уравнений:

а) содержащие композицию функций: ;

б) содержащих равенство функций, одна из которых алгебраическая, другая трансцендентная: $\sin\frac{\pi x}{4} = x^2 - 4x + +5$;

в) содержащих комбинации первых двух видов.

В эти виды уравнения решаются с помощью равносильных преобразований или функционально-графическим методом.

Если нельзя точно определить вид уравнения, то следует обратить внимание на функции, входящие в данное уравнение, и попытаться свести их к функциям одного вида. В случае, когда это возможно, уравнение решается с помощью перехода к равносильным условиям. В противном случае применяют функциональные методы.

Рассмотрим каждый метод подробнее.

1. *Переход к равносильному условию.*

При решении этих уравнений приходится применять комбинации различных приёмов. Решение уравнений требует, как правило, некоторых преобразований, после которых оно сведётся к простейшему алгебраическому уравнению.

Два уравнения с одной переменной $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называются равносильными, если множества их корней совпадают. Иными словами, «два уравнения называют равносильными, если они имеют одинаковые корни или если оба уравнения не имеют корней» [29, с. 294]. Обозначается: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow p(x) = h(x)$.

«Если каждый корень уравнения $f(x) = g(x)$ (1) является в то же время корнем уравнения $p(x) = h(x)$ (2), то уравнение (2) называют ***следствием*** уравнения (1)» [29, с. 294].

Достаточно очевидным является следующее утверждение: «два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого» [29, с. 295].

Решение уравнений основано на теоремах о равносильности.

Теорема 1. Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному, то есть $f(x)=g(x)+h(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=h(x)$ или $f(x)-\varphi(x)=g(x)$ [29, с. 296].

Теорема 2. Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному, то есть $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f^{2n+1}(x)=g^{2n+1}(x)$, где $n \in N$ [29, с. 296].

Теорема 3. Если обе части уравнения умножить на одно и то же выражение $h(x)$, которое:

а) имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения $f(x)=g(x)$;

б) нигде в этой области не обращается в 0 – то получится уравнение, равносильное данному, то есть:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x),$$

где $x \in D(f) \cap D(g),\ h(x) \neq 0$ [29, с. 296].

Следствие. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному, то есть $f(x)=g(x) \Leftrightarrow a\cdot f(x) \Leftrightarrow a\cdot g(x),\ a \in R,\ a \neq 0$ [29, с. 297].

Теорема 4. Если обе части уравнения неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень n, получится уравнение, равносильное данному, то есть $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f^{n}(x)=g^{n}(x)$, где $f(x)>0, g(x)>0$ [29, с. 297].

«Замена выражения тождественно равным ему выражением называется тождественным преобразованием» [36, с. 34]. «Два выражения называются тождественно равными, если соответственные значения их равны при любых значениях переменных» [36, с. 34].

***Пример* 1**. Решить уравнение

$$\frac{1}{2}+16^{\sin x}=\frac{6}{16^{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}.$$

Решение. После выполнения тождественных преобразований в правой части уравнения:

$$16^{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=16^{\frac{1+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}}=4^{1-\sin x}=\frac{4}{4^{\sin x}},$$

данное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}+16^{\sin x}=\frac{3\cdot 4^{\sin x}}{2}.$$

На первом этапе рассмотрим это уравнение как показательное. Введем новую переменную $u=4^{\sin x}$. Тогда уравнение примет вид $\frac{1}{2}+u^2=\frac{3u}{2}$, и далее $2u^2-3u+1=0$, откуда следует совокупность $\left[\begin{array}{l} u_1=1, \\ u_2=\frac{1}{2}. \end{array}\right.$

Далее имеем $\left[\begin{array}{l} 4^{\sin x}=1, \\ 4^{\sin x}=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0, \\ \sin x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi k, \\ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n. \end{array}\right.$

Ответ: $\pi k;\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n;\ k,n\in Z.$

2. Графический метод решения комбинированных уравнений.

Графический метод применяется при решении любых видов уравнений. Особенно он эффективен при решении комбинированных уравнений. Целесообразно его применение при определении количества корней уравнения. К тому же, данный метод создает наглядную основу для достижения более глубокого понимания функционального содержания уравнений.

Алгоритм функционально-графического метода [29, с. 136]:

1. Обе части уравнения $f(x) = g(x)$ рассматриваются как функции, входящие в уравнение.

2. Строят графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в одной системе координат.

3. Находят абсциссы точек пересечения построенных графиков – это и есть корни уравнения.

Если же уравнение имеет вид $f(x) = 0$, то в качестве функции, стоящей в правой части выступает функция $y = 0$. Графиком ее будет ось Ox, так что корнями уравнения будут абсциссы точек пересечения графика функции $y = f(x)$с осью Ox.

***Пример* 2.** Определите количество корней уравнения

$$2^x = 11 - |x|.$$

Решение. Построив графики функций $y_1 = 2^x$ и $y_2 = 11 - |x|$ в одной системе координат (рис.1), получим две точки пересечения $x_1 = 3$ и $x_2 \approx -11$.

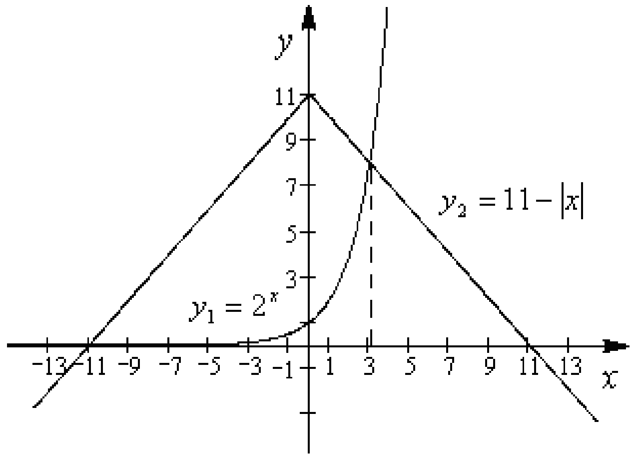


Рис. 1. График уравнения $2^x = 11 - |x|$

Ответ: два корня.

3. *Применение свойств функций.*

Не всякое комбинированное уравнение в результате преобразований сводится к решению системы уравнений и неравенств стандартного вида, для которых существует определенный алгоритм решения. В таких случаях оказывается полезным использовать некоторые свойства функций, входящих в уравнение, таких как область определения, монотонность и ограниченность.

а) *Применение области определения функций, входящих в уравнение.*

«Множество X всех допустимых действительных значений аргумента x, при которых функция $y = f(x)$ определена, называется областью определения функции» [35, стр. 57]. Обозначается $D(f)$.

«Если при рассмотрении уравнения выясняется, что обе части определены на множестве X, состоящем из одного или нескольких чисел, то нет необходимости проводить какие-либо преобразования уравнения. Достаточно проверить, является или нет каждое из этих чисел решением данного уравнения» [31, стр. 314].

Если множество X, на котором определены обе части уравнения, окажется пустым множеством, то в этом случае уравнение решений не имеет.

***Пример* 3**. Решить уравнение

$$\sqrt{2^{2x}-2^{x+1}+4}\cdot\log_x x^2\cdot\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{3-x}=0.$$

Решение. Найдем область определения данного уравнения:

$$\begin{cases}2^{2x}-2^{x+1}+4\ge 0,\\ x>0,\\ x\ne 1,\\ x+2\ge 0,\\ 3-x\ge 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^{2x}-2\cdot 2^{x}+4>0,\\ x>0,\\ x\ne 1,\\ x\ge -2,\\ x\le 3;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\infty<x<+\infty,\\ x>0,\\ x\ne 1,\\ x\ge -2,\\ x\le 3;\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1,\\ 1<x\le 3\end{array}\right.$$

Далее, решая уравнение, приравниваем каждое из произведений к нулю. Однако произведение функций в данном уравнении может быть равно нулю только при $x=3$.

Ответ: 3.

б) *Использование монотонности функций, входящих в уравнение.*

«Функция $f(x)$ называется монотонно возрастающей на множестве $X\subset D(f)$, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 множества X, таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$» [29, с. 76] (большему значению аргумента соответствует большее значение функции)

$$(\forall x_1,x_2\in X, x_1<x_2)\Rightarrow(f(x_1)<f(x_2))$$

«Функция $f(x)$ называется монотонно убывающей на множестве $X\subset D(f)$, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2, множества X, таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$» [29, с.76] (большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции).

$$(\forall x_1,x_2\in X, x_1<x_2)\Rightarrow(f(x_1)>f(x_2))$$

Если функция возрастает на некотором промежутке или убывает на этом промежутке, говорят, что она монотонна на этом промежутке.

Свойства монотонных функций [4; 14]:

1. Сумма возрастающих (соответственно, убывающих) функций – функция, возрастающая (соответственно, убывающая) на их общей области определения.

Примечание: свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых.

2. Разность возрастающей и убывающей (соответственно, убывающей и возрастающей) функций – функция, возрастающая (соответственно, убывающая) на их общей области определения.

3. Если функция $y = f(x)$ является возрастающей (убывающей), то функция $y = -f(x)$ является убывающей (возрастающей).

4. а) Если функция $y = g(x)$ определена и возрастает (соответственно, убывает) на некотором промежутке $[a;b]$, а функция $z = f(y)$ определена и возрастает на некотором промежутке $[a_1;b_1]$, содержащем область значений функции g, то сложная функция $y = f(g(x))$ определена и возрастает (соответственно, убывает) на промежутке $[a;b]$.

б) Если функция $y = g(x)$ определена и возрастает (соответственно, убывает) на некотором промежутке $[a;b]$, а функция $z = f(y)$ определена и убывает на некотором промежутке $[a_1;b_1]$, содержащем область значений функции g, то сложная функция $y = f(g(x))$ определена и убывает (соответственно, возрастает) на промежутке $[a;b]$.

5. Если функция $y = g(x)$ монотонна на некотором промежутке $[a;b]$ и сохраняет на этом промежутке знак, то функция $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ на промежутке $[a;b]$ имеет противоположный характер монотонности.

6. Произведение возрастающих (соответственно, убывающих) функций – функция, возрастающая (соответственно, убывающая) на их общей области определения.

Примечание: свойство справедливо для любого конечного числа множителей.

7. Произведение возрастающей и убывающей функций – функция, убывающая на их общей области определения.

8. Если числитель и знаменатель дроби положительны, числитель убывает (возрастает), а знаменатель возрастает (соответственно, убывает), то дробь убывает (возрастает).

Рассмотрим далее некоторые теоремы, связанные с монотонностью функции [14].

Теорема 5. *Теорема Коши.* Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то на этом отрезке имеется хотя бы один нуль функции $f(x)$ (то есть на отрезке $[a;b]$ уравнение $f(x)=0$ имеет хотя бы один корень).

При этом если функция строго монотонна на этом отрезке $[a;b]$, то она принимает значение 0 лишь один раз (т.е. уравнение $f(x)=0$ имеет единственный корень).

Следствие 1. Если функция $f(x)$ непрерывна и строго монотонна на некотором промежутке и a принадлежит области значений функции $f(x)$, то уравнение $f(x)=a$ имеет единственный корень [14, с. 42].

Следствие из теоремы Коши позволяют решать комбинированные уравнения с монотонными функциями [14, 13].

Следствие 2. «Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго возрастает на промежутке $[a;b]$, а функция $y = g(x)$ непрерывна и строго убывает на этом промежутке, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на промежутке $[a;b]$ единственный корень» [14, с. 49].

Это следствие еще называют «встречной монотонностью». Оно также находит широкое применение при решении комбинированных уравнений.

***Пример* 4.** Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-7}+\left(\sqrt{x-5{,}3}\right)^2+13{,}3=\frac{x^2-2x+1}{x-3}+x\,.$$

Решение. Выполнив преобразования, получим*:*

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-7}+x-5{,}3+13{,}3=\frac{(x-1)^2}{x-3}+x,\\ x-3\neq 0,\\ x-5{,}3\geq 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-7}+8=\frac{(x-1)^2}{x-3},\\ x\geq 5{,}3.\end{cases}$$

Замечаем, что это уравнение имеет корень $x=7$. Докажем, что других корней нет.

Функция $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-7}+8$ убывает. Если окажется, что функция $y=\frac{(x-1)^2}{x-3}$ возрастает в области определения заданного уравнения, то есть на луче $[5{,}3;+\infty)$, то можно будет сделать вывод о том, что $x=7$ – единственный корень уравнения.

Найдем производную функции $y=\frac{(x-1)^2}{x-3}$.

Получим $y'=\frac{2(x-1)(x-3)-(x-1)^2}{(x-3)^2}=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$.

Если $x\geq 5{,}3$, то $y'>0$, то есть функция $y=\frac{(x-1)^2}{x-3}$ возрастает на луче $[5{,}3;+\infty)$, что и требовалось доказать.

Итак, $x=7$ – единственный корень уравнения.

Ответ: 7.

в) *Использование ограниченности функции.*

Метод, основанный на свойстве ограниченности функции, особенно результативен при решении уравнений, в состав которых входят функции, области значений которых ограничены. Данный метод может помочь либо найти корни уравнения, либо опровергнуть утверждение об их существовании.

«Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве X, называют ограниченной сверху на множестве X, если существует такое число A, что для всех значений аргумента из области определения функции выполняется неравенство $f(x) \leq A$» [5, с. 6].

$$(\exists A)(\forall x)(f(x) \leq A)$$

«Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве X, называют ограниченной снизу на множестве X, если существует такое число a, что для всех значений аргумента из области определения функции выполняется неравенство $f(x) \geq a$» [5, с. 6].

$$(\exists A)(\forall x)(f(x) \geq a)$$

Функция называется ограниченной, если она ограниченна сверху и ограниченна снизу.

$$(\exists A)(\exists a)(\forall x)(a \leq f(x) \leq A)$$

***Пример* 5.** Решить уравнение:

$$x^2 + 3 = \sin x$$

Решение: оценим левую часть уравнения: $x^2 + 3 > 2$; оценим правую часть уравнения: $-1 \leq \sin x \leq 1$, значит $\sin x < 2$. Изобразим графически (рис. 2):

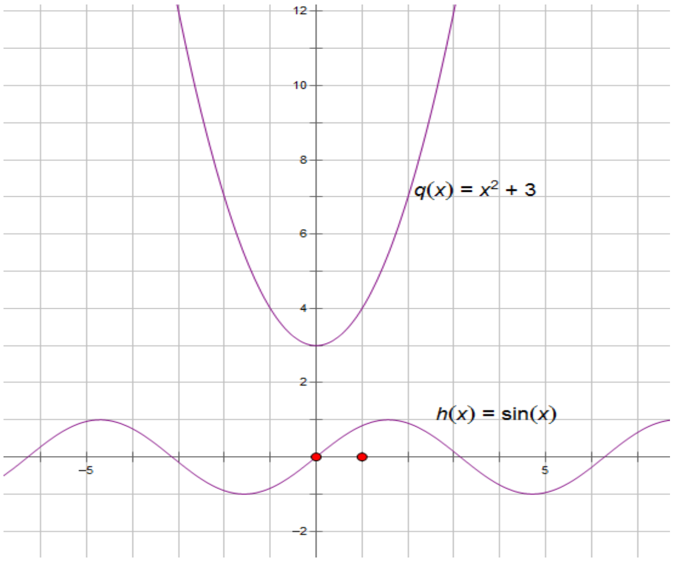


Рис. 2. График уравнения $x^2 + 3 = \sin x$

Ответ: общих значений нет.

г) *Использование области значений функции.*

«Множество Y всех действительных значений y, которые принимает функция, называется областью значений функции» [4, с. 69]. Обозначается $E(f)$.

Пример **6**. Решить уравнение $2^{|x|} = \cos^2 x$.

Решение. Оценим обе части уравнения. При всех значениях *x:*

$$2^{|x|} \geq 1 \text{ и } \cos^2 x \leq 1.$$

Следовательно, данное уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} 2^{|x|} = 1 \\ \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

При $x = 0$ второе уравнение обращается в верное равенство. Значит, 0 – корень уравнения.

Ответ: 0.

Теорема 6. Если в уравнении $f(x)+g(x)=a+b$ при любом допустимом x выполняются условия $f(x)\geq a,\ g(x)\geq b$ $(f(x)\leq a,\ g(x)\leq b)$, то данное уравнение равносильно системе [5, с. 315]:

$$\begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=b. \end{cases}$$

Теорема 7. Если в уравнении $f(x)\cdot g(x)=a\cdot b$ при любом допустимом x, выполняются условия $0<f(x)\leq a,\ 0<g(x)\leq b$ $(a<f(x)\leq 0,\ b<g(x)\leq 0)$, где a и b – взаимно просты, то данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=b. \end{cases}$$

Теорема 8. Если левая часть уравнения $F(x)=0$ есть сумма нескольких функций $F(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$, каждая из которых неотрицательна для любого x из области определения, то данное уравнение $F(x)=0$ равносильно системе уравнений [5, с. 317]:

$$\begin{cases} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(x)=0. \end{cases}$$

д) *Метод мажорант.*

Если области значения функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, входящих в уравнение $f(x)=g(x)$ имеют единственное общее значение, то применяют метод мажорант.

Название метода мажорант происходит от французских слов *majorer* – объявлять большим и *minorer* – объявлять меньшим.

«Мажорантой данной функции на множестве *P* называется такое число *M*, что $f(x) \le M$ для всех $x \in P$» [27, с. 13].

По определению, мажоранта функции является точной верхней границей (ТВГ), а миноранта – точной нижней границей (ТНГ) функции.

Основная идея метода мажорант состоит в следующем [25, с. 13]:

Теорема 9. Если для всех $x \in X$ справедливы неравенства $f(x) > A$ и $g(x) < A$, где A – некоторое число, то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) < g(x)$ решений не имеют, а неравенство $f(x) > g(x)$ выполняется для всех $x \in X$.

Теорема 10. Если для всех $x \in X$ справедливы неравенства $f(x) \ge A$ и $g(x) \le A$, где A – некоторое число, то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) \le g(x)$ равносильны системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases},$$

а неравенство $f(x) \ge g(x)$ выполняется для всех $x \in X$.

Этот метод иногда называют «метод мини-макса».

Следующее уравнение служит этому наглядным примером.

Пример **7**. Решить уравнение $2^{|x|} = \cos^2 x$.

Решение. Оценим обе части уравнения. При всех значениях *x:*

$$2^{|x|} \ge 1 \text{ и } \cos^2 x \le 1.$$

Следовательно, данное уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} 2^{|x|} = 1 \\ \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

При $x = 0$ второе уравнение обращается в верное равенство. Значит, 0 – корень уравнения.

Ответ: 0.

2.2. Анализ учебно-методической литературы

Единый государственный экзамен как форма аттестации, которая введена в практику российского образования в 2002 г., с 2009 г. переходит из экспериментального в штатный режим. Рассмотрев задания ЕГЭ и ОГЭ с 2007 по 2018 гг. различных вариантов, можно заметить, что в каждом тесте встречаются более двух заданий, решаемых с помощью свойств функций.

Задания могут быть с указанием свойств, например:

1) Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 6x - 5$ на отрезке.

2) Найдите точку минимума функции $y = 2x - \ln(x+8)^2$.

3) Найдите точку максимума функции $y = 0{,}5x^2 - 7x + 12\ln x + 8$.

Задания могут быть без указания свойств, например:

1) Решите уравнение $(x-2)^4 + \left|x^2 - 4\right| = 0$

2) Решите уравнение $\sin^2 x + \sqrt{x^2 + 9} = 3$

3) Решите уравнение $\sqrt{25 + x^4} = 3\cos^2 x + 2$

Кроме того, есть задания, которые решают графически:

1) Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$

2) Постройте график функции $y = \frac{(\sqrt{16 - x^2})^2}{x + 4}$ и найдите все значения a, при которых прямая $y = a$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

Чтобы решить задания из ЕГЭ и ОГЭ школьнику необходимо знать все основные свойства функций.

Функциональная линия – это одна из ведущих линий в школьной курсе математики, знакомство с ней начинается в 7 классе, а заканчивается в 11 классе.

Анализ учебников алгебры 10–11-х классов А.Н. Колмогорова [2], Ш.В. Алимова [1] и А.Г. Мордковича [28, 29] показал, что в изложении материала присутствует функциональный подход. Типы уравнений и методы их решений совпадают. В учебниках А.Г. Мордковича и С.М. Никольского есть параграфы по систематизации методов решения уравнений и неравенств, в которых содержатся комбинированные уравнения.

Для того, чтобы понять с какими теоретическими знаниями о свойствах функции и практическими навыками решения уравнений разных видов учащиеся приходят в старшую школу, учителю необходимо знать содержание данной линии в школьных учебниках алгебры с 7 по 9 классы. Проанализируем школьные учебники с 7 по 11 класс таких авторов, как Ю.Н. Макарычев, А.Г. Мордкович, С.М. Никольский, Н.Я. Виленкин, А.Н. Колмогоров, Ш.В. Алимов (таблица 1 и таблица 2).

Таблица 1

Анализ функциональной линии в учебниках 7–9-х классов

	7 класс	8 класс	9 класс
Ю.Н. Макарычев [4, 5]	Вводится понятия функции (как зависимость одной переменной от другой), аргумента, области определения функции, графика функции, рассматриваются способы задания функции. Изучается прямая пропорциональность, линейная функция и степенные функции вида $y = x^2$, $y = x^3$, их свойства и графики.	Рассматриваются обратная пропорциональность и функция $y = \sqrt{x}$	Вводятся понятия возрастающей и убывающей функций, четности и нечетности функций. Рассматриваются квадратичная функция (её график и свойства), простейшие преобразования графиков (в примере квадратичной функции) и степенная функция $y = x^n$ с натуральным показателем.
А.Г. Мордкович [30, 31]	Рассматриваются линейное уравнение с двумя переменными и его график, линейная функция, прямая пропорциональность и функция $y = x^2$, их графики. Учащиеся учатся находить наибольшее и наименьшее значение этих функций на заданном промежутке.	Рассматриваются следующие функции: $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \sqrt{x}$, $y = \|x\|$ и их графики.	Вводится определение функции, способы задания функции, область значения, область определения, свойства функций: монотонность, ограниченность, наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке, четность и нечетность. Даны наглядно-геометрические

	Вводится понятие о непрерывных и разрывных функциях, разъясняется запись, а также вводится функциональная символика.		представления о непрерывности и выпуклости функции. Произведен обзор свойств и графиков известных функций: $y=C$, $y=kx+m$, $y=\frac{k}{x}$, $y=kx^2$, $y=\sqrt{x}$, $y=ax^2+bx+c$, $y=\|x\|$. А так же рассмотрены функции $y=x^n$ и $y=x^{-n}$, их свойства и графики, построение графика функции $y=mf(x)$ по известному графику функции $y=f(x)$.
С.М. Никольский [3]		Начинается изучение функциональной линии. Вводятся понятия функции, её графика, рассматриваются функции $y=x$, $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$, прямая пропорциональность, линейная функция, квадратичная функция, их свойства и графики.	Изучается степенная функция $y=x^n$. Рассмотрены функции $y=\|x\|$, $y=\frac{k}{x-x_0}-y$ и $y=\sqrt[n]{x}$. Но этот материал не является обязательным для изучения.

2.3. Методические рекомендации по изучению методов решения комбинированных уравнений

2.3.1. Графический метод решения комбинированных уравнений.

Одним из способов решения комбинированных уравнений является графический способ. Он основан на построении графиков функций и определения точек их пересечения. Минус графического метода в том, что он зачастую дает приближенные значения корней. Для того, чтобы получить более точные значения корней необходимо использовать специальные методы уточнения (приближенные вычисления), однако рациональнее использовать другие методы решения.

Методическая разработка урока.

1 этап. Подготовительный этап.

Учащиеся знают алгоритм графического метода, но кто-то мог и забыть, поэтому перед его изучением, ученикам необходимо самостоятельно повторить построение известных им графиков функций. Для этого можно заранее дать домашнее задание и обсудить результаты в начале урока.

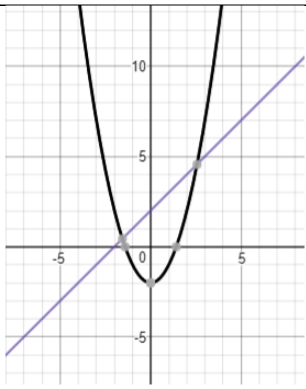
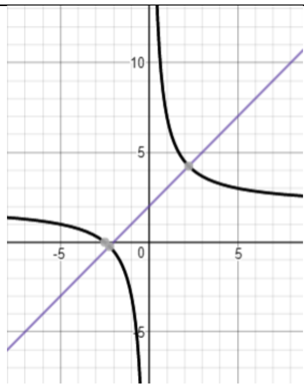
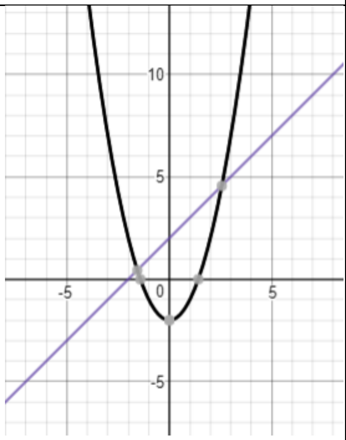
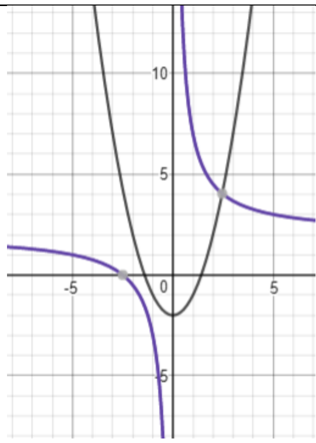
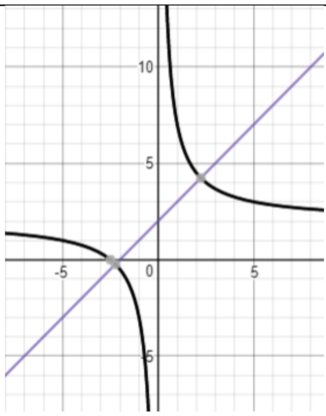
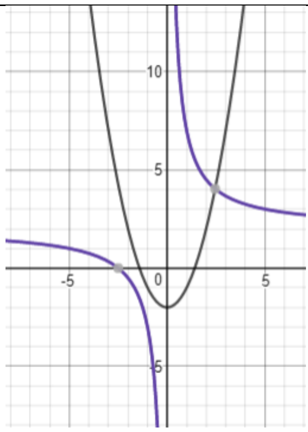
Повторите алгоритмы построения графиков функций. Постройте графики функций: а) $f = x + 2$ б) $g = x^2 - 2$ в) $m = \frac{5}{x} + 2$

2 этап. На уроке учитель организует работу в группах (для задания используются графики функции из домашней работы). Перед началом работы учитель обсуждает с учащимися, какие виды заданий мы можем выполнять, зная графики функций. Спрашивает, все ли учащиеся умеют решать уравнения графически, и просит сформулировать цель на данный урок.

Задание. Постройте графики каждой пары функций из таблицы в одной системе координат (табл. 2):

Таблица 2

Графики функций в одной системе координат

	$f = x + 2$	$g = x^2 - 2$	$m = \dfrac{5}{x} + 2$
$f = x + 2$			
$g = x^2 - 2$			
$m = \dfrac{5}{x} + 2$			

Ответьте на вопросы:

1. Сколько корней имеют уравнения?

	$x^2 - 2 = x + 2$	$\dfrac{5}{x} + 2 = x + 2$	$\dfrac{5}{x} + 2 = x^2 - 2$
Количество корней			

2. Всегда ли можно определить количество корней уравнения по графикам?

3. Всегда ли можно найти точные значения корней уравнения?

4. Сформулируйте алгоритм решения уравнений графическим способом.

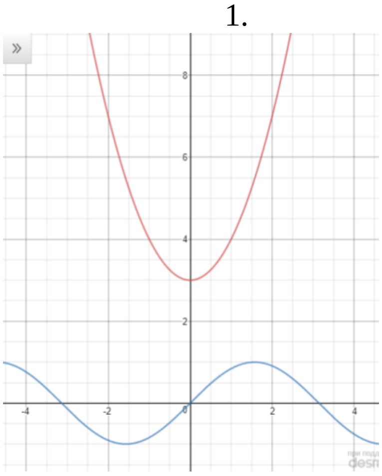
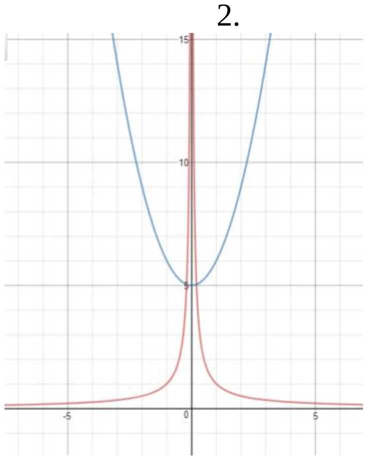
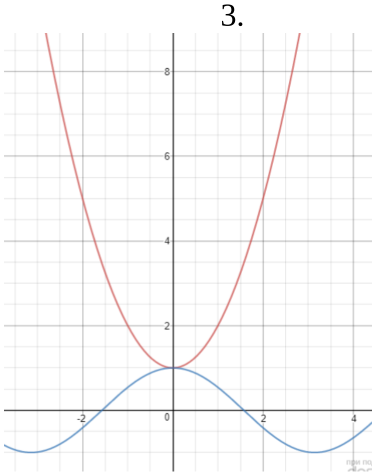
3 этап. Обсуждение работы групп, возможно применение документ-камеры или презентации, формулировка алгоритма.

4 этап. Для диагностики понимания алгоритма решения уравнений данным способом организуется самостоятельная работа учащихся в парах.

Задание. 1. С помощью графического метода определите количество корней уравнений, заданных уравнениями (а – в):

а) $\frac{1}{x}-3+x=0$	б) $\frac{2}{x}+x=0$	в) $\sqrt{x^2}-x-5=0$

2. Определите количество корней уравнений $f(x)=g(x)$, заданных графиками функций (1 – 3):

1.	2.	3.
		

3. Заполните таблицу на соответствие по количеству корней.

А	Б	В

Организуется проверка результатов и обсуждения результатов работы.

5 этап. Практическая работа. Учащиеся выполняют решение комбинированных уравнений с помощью графического метода у себя в тетрадях самостоятельно. Задания представлены в виде раздаточного материала (прил. 1). Ученики могут самостоятельно выбрать какие задания они будут решать в классе, а какие дома. Те, кто хорошо владеют данным способ, могут выполнить все задания на уроке. В этом случае они получают творческое домашнее задание: ученикам необходимо самостоятельно составить 2 уравнения, которые решаются графическим способом, либо взять из учебника или с сайта «Решу ЕГЭ».

6 этап. Подведение итогов. Сформулировать преимущества и недостатки рассмотренного способа.

Рефлексия: попросить учащихся ответить на вопрос: «Достигли ли вы поставленной цели урока?».

Данная разработка была апробирована в школе, результаты домашних работ учащихся представлены в приложении.

2.3.2. Применение области определения функций при решении уравнений

1 этап. Учащиеся знакомы с областью определения функции, поэтому дома им необходимо самостоятельно вспомнить эту тему.

Задание. Найдите область определения функции.

$$y=\sqrt{x^2+4x-12}$$

$$y=\frac{7}{25-x^2}$$

$$y=\frac{3}{(x+5)(x^2-5x-6)}$$

$$y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2+2x-3}$$

2 этап. На уроке учитель организует работу в группах. Перед началом работы учитель спрашивает, все ли учащиеся умеют находить область определения функций и просит сформулировать цель на данный урок.

Задание. Решите уравнения.

1. $\sqrt{3-x} = \log_5(x-3)$

2. $\arcsin^2(x-2) - \sqrt[4]{x-3} = 0$

3. $\sqrt{|\sin x|} = \sqrt[4]{-|\sin x|} + tg\, x$

3 этап. Обсуждение работы групп, возможно применение документ-камеры или презентации, формулировка алгоритма.

4 этап. Практическая работа. Учащиеся выполняют решение комбинированных уравнений с помощью области определения у себя в тетрадях самостоятельно. Задания представлены в виде раздаточного материала (прил. 1). Ученики могут самостоятельно выбрать, какие задания они будут решать в классе, а какие дома. Творческое домашнее задание: ученикам необходимо самостоятельно составить 2 уравнения, которые решаются данным способом, либо взять из учебника или с сайта «Решу ЕГЭ».

5 этап. Подведение итогов. Сформулировать преимущества и недостатки рассмотренного способа.

Рефлексия: попросить учащихся ответить на вопрос: «Достигли ли вы поставленной цели урока?».

2.3.3. Применение монотонности функции при решении уравнений

Этот метод используется в школьном курсе математики чаще всего.

1 этап. Учащиеся знакомы с таким свойством функции, как монотонность, поэтому дома им необходимо самостоятельно вспомнить эту тему.

Задание. Исследуйте на монотонность функции.

$$y = x^2 + 3x - 1$$

$$y = \sqrt{3x - 1}$$

$$y = 2x^3 + 3x^2 - x + 5$$

2 этап. Перед началом работы учитель спрашивает, все ли учащиеся умеют исследовать функцию на монотонность, и просит сформулировать цель на данный урок.

После учащиеся должны самостоятельно проговорить и записать алгоритм у себя в тетрадях. Они должны обязательно помнить:

- Если функция имеет несколько промежутков возрастания и убывания, каждый из них следует рассмотреть отдельно.
- Сумма возрастающих функций – возрастающая функция.
- Сумма убывающих функций – убывающая функция.
- Прибавление или вычитание постоянной величины не влияет на монотонность функции.

3 этап. Обсуждение работы групп, возможно применение документ-камеры или презентации, формулировка алгоритма.

4 этап. Практическая работа. Учащиеся выполняют решение комбинированных уравнений с помощью области определения у себя в тетрадях самостоятельно. Задания представлены в виде раздаточного материала (прил. 1). Ученики могут самостоятельно выбрать, какие задания они будут решать в классе, а какие дома. Творческое домашнее задание: ученикам необходимо самостоятельно составить 2 уравнения, которые решаются данным способом, либо взять из учебника или с сайта «Решу ЕГЭ».

5 этап. Подведение итогов. Сформулировать преимущества и недостатки рассмотренного способа.

Рефлексия: попросить учащихся ответить на вопрос: «Достигли ли вы поставленной цели урока?».

2.3.4. Применение ограниченности функций при решении уравнений

1 этап. Учащиеся знакомы с таким свойством функции, как ограниченность, поэтому дома им необходимо самостоятельно вспомнить эту тему.

Задание. Найдите область значения функций.

1. $y=\frac{2}{x}$	2. $f=-x$
3. $y=x^2+3$	4. $f=\sin x$
5. $y=x^2+1$	6. $f=\cos x$
7. $y=\left(x+4\right)^2$	8. $f=\sqrt{x-1}$

2 этап. На уроке учитель организует работу в группах (для задания используются графики функции из домашней работы). Перед началом работы учитель спрашивает, все ли учащиеся умеют находить область значения функции и просит сформулировать цель на данный урок.

Задание.

a) Постройте графики каждой пары функций из таблицы в одной системе координат (1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, 7 и 8).

b) Сколько корней имеют уравнения?

3 этап. Учащиеся должны самостоятельно проговорить и записать алгоритм у себя в тетрадях.

4 этап. Практическая работа. Учащиеся выполняют решение комбинированных уравнений с помощью области определения у себя в тетрадях самостоятельно. Задания представлены в виде раздаточного материала. Ученики могут самостоятельно выбрать, какие задания они будут решать в классе, а какие дома. Творческое домашнее задание: ученикам необходимо самостоятельно составить 2 уравнения, которые решаются данным способом, либо взять из учебника или с сайта «Решу ЕГЭ».

5 этап. Подведение итогов. Сформулировать преимущества и недостатки рассмотренного способа.

Рефлексия: попросить учащихся ответить на вопрос: «Достигли ли вы поставленной цели урока?»

2.4. Результаты апробации материалов

В период педагогической практики в средней общеобразовательной школе № 59 г. Перми была проведена апробация по изучению графического метода решения уравнений в 8 классе, так как этот метод изучается в каждом классе. Результаты следующие:

1) Учащиеся знают графики линейной, квадратичной функций и обратной пропорциональности.

2) Учащиеся знают этот способ, но сформулировать алгоритм его применения они не смогли.

3) Учащиеся не всегда могут заменить уравнение равенством двух функций, графики которых они умеют строить. Поэтому важно рассмотреть варианты перехода от уравнения к равенству различных функций.

4) Уровень подготовки учащихся разный, поэтому необходимо готовить дополнительные задания для тех, кто решает быстрее.

5) Работа в малых группах позволяет ученикам справляться с решением заданий с непривычной для них формулировкой:

I. По рисунку определить количество корней уравнения.

II. Решить уравнение графическим способом.

III. Соотнести уравнения у которых одинаковое количество корней.

В данной работе справилось 85% учащихся.

После работы был проведен опрос, по которому можно сделать следующие выводы: ребята поняли материал, но одного занятия для того, чтобы они смогли объяснить другому не достаточно. Поэтому учителю было предложено продолжить работу по применению данного метода решения уравнений и их систем.

Дома учащимся необходимо было придумать 2 уравнения на данную тему (прил. 2), либо найти в учебнике или на сайте «Решу ОГЭ». Задания они нашли, кто–то придумал сам, но большинство их не решило. Также ученики не видят различия между уравнением и функцией. И можно сделать вывод, что те, кто справились на уроке, справились и с домашним заданием.

Также была проведена апробация в рамках курса «Элементарная математика» на 2 курсе математического факультета ПГГПУ.

Получены следующие результаты:

1) Студенты знают графический способ, но сформулировать алгоритм его применения они не смогли.

2) Рассмотрены варианты перехода от уравнения к равенству различных функций, чтобы решение было проще.

3) Многие студенты считали этот метод неэффективным для решения уравнений. Были выявлены преимущества и недостатки метода; тип заданий, для которых графический метод является наиболее рациональным.

Комбинированные уравнения встречаются в заданиях ЕГЭ и ОГЭ. Для того, чтобы школьник мог с легкостью решать их, ему необходимо понимать где и какой метод решения уравнений нужно применять, а для этого он должен иметь опыт их решения. Так как часов на изучение этих способов в школьном курсе математики недостаточно, то необходимо организовать самостоятельную работу учащихся по их усвоению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выпускная квалификационная работа посвящена обучению методам решения комбинированных уравнений с применением свойств функций.

В ходе исследования были получены следующие результаты:

– В ходе анализа научной и методической литературы следующих авторов: Колмогоров А.Н., Глейзер Г.И., Фихтенгольц Г.М, Мордкович А.Г. и др., были выявлены функции и виды самостоятельной работы учащихся, уровни самостоятельности учеников.

– Описаны методы решения комбинированных уравнений: переход к равносильному условию, графический метод, функциональный метод (область определение, монотонность, область значения).

– Разработаны методические рекомендации для учителей по обучению функционально-графическому методу решения комбинированных уравнений; составлен сборник уравнений, который насчитывает 48 заданий.

Материалы апробированы в период педагогической практики в МАОУ «СОШ № 59» г. Перми, на математическом факультете ПГГПУ в рамках курса «Элементарная математика» (2 курс). Материалы исследования обсуждались на научно-практической конференции студентов математического факультета (2016, 2017, 2018 гг.), опубликованы тезисы [17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алгебра* и начала анализа: 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый уровень / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва и др. – 18–е изд. – М. : Просвещение, 2012. – 464 с.

2. *Алгебра* и начала анализа: учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений / А.Н. Колмагоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.; Под ред. А.Н. Колмагорова. – 13–е изд. – М. : Просвещение, 2003. – 384 с.

3. *Алгебра* и начала анализа: учеб. пособие для 11 кл. общеобразоват. учреждений / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 2-е изд. – М. : Просвещение, 2003.

4. *Алгебра*: учеб. для 7 кл. сред. шк. / Ю.Н. Макарычев и др.; под ред. С.А. Теляковского. – М. : Просвещение, 2009. – 252 с.

5. *Алгебра*: учеб. для 9 кл. общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев. – М. : Просвещение, 2000. – 272 с.

6. *Башмаков М.И.* Давайте учить математике / М.И. Башмаков // Математика: Приложение к газете «Первое сентября».– 2010.– № 6. – 48 с.

7. *Буряк В.К.* Самостоятельная работа учащихся. – М. : Просвещение, 1984. – 640 с.

8. *Вебер Г.* Энциклопедия элементарной математики : в 2 томах / Г. Вебер, И. Вельштейн ; пер. с нем. В.Ф. Кагана. – Т.1. Руководство для преподающих и изучающих математику. – М. ; Л. : ОНТИ, 1927. – 263 с.

9. *Глейзер Г.И.* История математики в школе IX–X классы / Г.И. Глейзер. – М. : Просвещение, 1983. – 351 с.

10. *Глейзер Г.И.* История математики в школе VII–VIII классы / Г.И. Глейзер. – М. : Просвещение, 1982. – 240 с.

11. *Грес П.В.* Математика для бакалавров. Универсальный курс для студентов гуманитарных направлений: учеб. пособие / П.В. Грес. – 2-е изд. перераб. и доп. – М. : Логос, 2013. – 288 с.

12. *Дорофеев Г.В.* Математика. 5 класс. Ч. 1 / Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. – М. : Ювента, Просвещение, 2005.

13. *Дорофеев Г.В.* Математика. 6 класс. Ч. 3 / Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. – М. : Баласс : С-инфо, 2002.

14. *Егоров А.А.* Монотонные функции в конкурсных задачах /А.А. Егоров, В.А. Тихомирова, А.И Черноуцан // приложение к журналу «Квант». – М. : Квантум. – 2009. – № 1. – 60 с.

15. *Есипов Б.П.* Самостоятельная работа учащихся на уроках. – М. : Учпедгиз, 1961. – 239 с.

16. *Жарова Л.В.* Управление самостоятельной деятельностью учащихся. – Л. : Техтеорлит, 1982. – 135 с.

17. *Захарова В.А.* Методические особенности темы «Применение свойств функций при решении уравнений и неравенств» в основной школе // Вопросы математики, её истории и методики преподавания в учебно–исследовательских работах: мастер. всерос. науч. – практ. конф. студентов матем. факт–тов / ред. кол.: И.В. Косолапова; А.Ю. Скорнякова, под общ. ред. А.Ю. Скорняковой; ПГГПУ. – пед. ун-т. – Пермь, 2018. – Вып. 11. – С. 48

18. *Зимняя И.А.* Основы педагогической психологии. – М. : Просвещение, 1980. – 378 с.

19. *Иванов А.А.* Математика. Пособие для подготовки к ЕГЭ: учеб. пособие / А.А. Иванов, А.П. Иванов. – Пермь. : Изд-во Пермского гос. ун-та, 2011. –295 с.

20. *Калинин В.В.* Математика. Домашняя общеобразовательная библиотека / В.В. Калинин. – М. : Астрель, 2000. – 256 с.

21. *Колмогоров А.Н.* Математика XIX века / А.Н. Колмогоров, А.П. Юшкевич. – М. : Наука, 1987. – 318 с.

22. *Латышева Л.П.* Функция, предел, непрерывность, производная : учеб. пособие по курсу «Математический анализ» / Л.П. Латышева. – Пермь : Пермский государственный университет, 2005. – 94 с.

23. *Литвиненко В.Н.* Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. инст. / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1991. – 352 с

24. *Математика.* Контрольные измерительные материалы единого государственного экзамена в 2004 г. – М. : Центр тестирования Минобразования России, 2004.

25. *Математика*: учеб. для 5 кл. ср. шк. / Н.Я. Виленкин, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд, В.И. Жохов. – 3-е изд., испр. и доп.– М. : Мнемозина, 2003. – 384 с

26. *Математический* портал [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.webmath.ru. (Дата обращения: 18 мая 2018 г.)

27. *Мир знаний* [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://mirznanii.com. (Дата обращения: 21 января 2018 г.)

28. *Мордкович А.Г.* Алгебра и начала анализа: учебник для уч-ся 10–11 кл.: в 2 ч. Ч. 1 / А.Г. Мордкович. – М. : Мнемозина, 2003. – 180 с.

29. *Мордкович А.Г.* Алгебра и начала анализа: учебник для уч-ся 10–11 кл.: в 2 ч. Ч. 2 / А.Г. Мордкович. – М. : Мнемозина, 2003. – 180 с.

30. *Мордкович А.Г.* Алгебра. 7 кл.: в 2 ч. Ч. 1 : учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович. – 4-е изд., испр. – М. : Мнемозина, 2001. – 160 с.

31. *Мордкович А.Г.* Алгебра. 7 кл.: в 2 ч. Ч. 2 : учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович. – 4-е изд., испр. – М. : Мнемозина, 2001. – 160 с.

32. *Нильсон О.А.* Теория и практика самостоятельной работы учащихся. – Тал., 1976. – 289 с.

33. *Олехник С.Н.* Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: справочник / С.Н. Олехник, М.К. Потапов, П.И. Пасиченко. – М. : Факториал, 1997.

34. *Подготовка* к ЕГЭ [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://ege-ok.ru. (Дата обращения: 09 июня 2017 г.)

35. *Справочник* школьника: учеб. пособие для уч-ся 5-11 кл.: в 2 ч. /М.Б. Волович, О. Ф. Кабардин, Р. А. Лидин и др.; под ред. И. Ермакова. – М. : АСТ-ПРЕСС, 2000.

36. *Срода Р.Б.* Воспитание активности и самостоятельности учащихся в учении. М. : АПН РСФСР, 1956. – 55 с.

37. *Сугирбекова Е.* Метод мажорант / Е. Сугирбекова // Первое сентября: еженед. учеб.-метод. Приложение «Математика». №10 – 2009.

38. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1968. – 440 с.

39. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. Т. I / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Физматлит, 2002. – 416 с.

40. *Центр* образования «Технологии обучения» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://iclass.home-edu.ru. (Дата обращения: 18 мая 2018 г.)

41. *Чирский В.Г.* Уравнения элементарной математики. Методы решения / В.Г. Чирский, Е.Т. Шавгулидзе – М. : Наука, 1992.

42. *ЯКласс* [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.yaklass.ru. (Дата обращения: 18 мая 2018 г.)

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Сборник задач

***Пример* 1**. Решить уравнение

$$\frac{1}{2}+16^{\sin x}=\frac{6}{16^{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}$$

Решение. После выполнения тождественных преобразований в правой части уравнения:

$$16^{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=16^{\frac{1+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}}=4^{1-\sin x}=\frac{4}{4^{\sin x}},$$

данное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}+16^{\sin x}=\frac{3\cdot 4^{\sin x}}{2}.$$

На первом этапе рассмотрим это уравнение как показательное. Введем новую переменную $u=4^{\sin x}$. Тогда уравнение примет вид $\frac{1}{2}+u^2=\frac{3u}{2}$, и далее $2u^2-3u+1=0$, откуда следует совокупность $\left[\begin{array}{l} u_1=1, \\ u_2=\frac{1}{2}. \end{array}\right.$

Далее имеем $\left[\begin{array}{l} 4^{\sin x}=1, \\ 4^{\sin x}=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0, \\ \sin x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi k, \\ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n. \end{array}\right.$

Ответ: $\pi k;\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n;\ k,n\in Z.$

***Пример* 2**. Решить уравнение

$$\lg\cos x+\log_{0,1}\sin 2x=\lg 7$$

Решение. Сначала рассматриваем это уравнение как логарифмическое. Функцию $\log_{0,1}\sin 2x$ преобразуем следующим образом:

$$\log_{0,1}\sin 2x=\log_{(0,1)^{-1}}(\sin 2x)^{-1}=-\lg\sin 2x.$$

Тогда исходное уравнение можно записать в виде системы:

$$\begin{cases}\lg\cos x-\lg\sin 2x=\lg 7,\\ \cos x>0,\\ \sin 2x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lg\cos x=\lg(7\sin 2x),\\ \cos x>0,\\ 2\sin x\cos x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\cos x=7\sin 2x,\\ \cos x>0,\\ \sin x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=14\sin x\cos x,\\ \cos x>0,\\ \sin x>0.\end{cases}$$

Так как $\cos x\neq 0$, то получим $\sin x=\dfrac{1}{14}$, откуда $x=(-1)^k\arcsin\dfrac{1}{14}+\pi k, k\in Z.$

Исходя из области определения уравнения, делаем вывод, что его корни должны принадлежать первой четверти числовой окружности. Таким образом, из двух точек, служащих на окружности образами решений уравнения $\sin x=\dfrac{1}{14}$, надо взять лишь ту, которая находится в первой четверти.

Ответ: $\arcsin\dfrac{1}{14}+2\pi k, k\in Z.$

***Пример* 3.** Решить уравнение

$$\log_{tgx}\frac{1-\sin 2x}{1+\cos 2x}+\log_{tgx-1}\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=3-\log_{tgx}2.$$

Решение. Выполним тождественные преобразования:

$$\log_{tgx}\frac{\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x}{1+\cos^2 x-\sin^2 x}+\log_{tgx-1}\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{2\sin x\cos x}+\log_{tgx}2=3,$$

$$\log_{tgx}\frac{(\sin x-\cos x)^2}{2\cos^2 x}+\log_{tgx-1}\frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}+\log_{tgx}2=3,$$

$$\log_{tgx}\frac{1}{2}\cdot(tgx-1)^2\cdot 2+\log_{tgx-1}tg\,x=3,$$

$$2\log_{tgx}(tg\,x-1)+\frac{1}{\log_{tgx}(tg\,x-1)}=3.$$

Значения переменной должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases} tg\,x>0, \\ tg\,x-1>0, \\ tg\,x-1\neq 1, \qquad (3). \\ \dfrac{1-\sin 2x}{1+\cos 2x}>0, \\ \dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}>0. \end{cases}$$

Положив $u=\log_{tgx}(tgx-1)$, получим следующее уравнение: $2u+\dfrac{1}{u}=3$. Решая его, найдем $u_1=1$ или $u_2=\dfrac{1}{2}$. Тогда

$$\log_{tgx}(tg\,x-1)=1 \quad \text{или} \quad \log_{tgx}(tg\,x-1)=\frac{1}{2}$$

$$tg\,x-1=tg\,x \qquad\qquad tg\,x-1=\sqrt{tg\,x},$$

Первое уравнение не имеет решений. Во втором положим $t=\sqrt{tg\,x}$. Получим $t^2-1=t$, откуда $t_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $t_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. По смыслу сделанной замены $t\geq 0$. Этому условию удовлетворяет лишь первый из полученных корней. Итак, $\sqrt{tg\,x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, откуда $tg\,x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ и $x=arctg\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)+\pi k, k\in Z.$

Ясно, что первые три условия системы (3) выполняются. При этих же значениях x выполняются неравенства $1-\sin 2x>0,\ 1+\cos 2x>0,$ $1-\cos 2x>0$. Осталось проверить выполнимость неравенства $\sin 2x>0$.

Имеем $\sin 2x=\frac{2tg\,x}{1+tg^2x}$. Отсюда ясно, что из $tg\,x>0$ следует $\sin 2x>0$.

Итак, все значения x, при которых $tg\,x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, принадлежат области определения заданного уравнения, так как при его решении, кроме расширения области определения, не было преобразований, которые могли привести к появлению посторонних корней, то $x=arctg\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\pi k, k\in Z$ – решения заданного уравнения.

Ответ: $arctg\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\pi k, k\in Z$.

***Пример* 4.** Решить уравнение

$$\sqrt{5\sin 2x-\cos 2x}=\sin x$$

Решение. Данное уравнение можно представить в виде системы:

$$\begin{cases}5\sin 2x-\cos 2x=\sin^2 x,\\ \sin x\geq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10\sin x\cos x-\cos^2 x+\sin^2 x=\sin^2 x,\\ 2\pi n\leq x\leq \pi+2\pi n,\ n\in Z;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}10\sin x\cos x-\cos^2 x=0,\\ 2\pi n\leq x\leq \pi+2\pi n,\ n\in Z;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\cdot(10\sin x-\cos x)=0,\\ 2\pi n\leq x\leq \pi+2\pi n,\ n\in Z;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ 10\sin x-\cos x=0,\end{array}\right.\\ 2\pi n\leq x\leq \pi+2\pi n,\ n\in Z.\end{cases}$$

Рассмотрим однородное уравнение первой степени $10\sin x-\cos x=0$. Разделим его на $\cos x\neq 0$ и получим:

$$10\,tg\,x-1=0 \Leftrightarrow tg\,x=\frac{1}{10} \Leftrightarrow \ x=arctg\frac{1}{10}+\pi k, k\in Z.$$

Перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+\pi l, \\ \\ x=arctg\dfrac{1}{10}+\pi k, \end{array}\right. \quad l,\ k,\ n\in Z; \\ 2\pi n\le x\le \pi+2\pi n, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, \\ x=arctg\dfrac{1}{10}+2\pi k, \end{array}\right. \quad n,\ k\in Z.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\ arctg\dfrac{1}{10}+2\pi k,\ n,k\in Z.$

***Пример* 5.** Решить уравнение

$$2^{2+\cos 2x}-5\cdot 2^{\cos^2 x}+2=0$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$2^{2+\cos 2x}-5\cdot 2^{\cos^2 x}+2=0 \Leftrightarrow 2^{2+2\cos^2 x-1}-5\cdot 2^{\cos^2 x}+2=0 \Leftrightarrow 2\cdot 2^{2\cos^2 x}-5\cdot 2^{\cos^2 x}+2=0.$$

Примем $2^{\cos^2 x}=t$, $1\le t\le 2$. Рассмотрим квадратное уравнение относительно переменной t:

$$2t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{\cos^2 x}=2, \\ 2^{\cos^2 x}=2^{-1}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 x=1, \\ \\ \cos^2 x=-1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=-1, \\ \cos x=1; \end{array}\right.$$

тогда $x=\pi n, n\in Z.$

***Пример* 6.** Решить уравнение

$$(\cos x-\sin x)^2\cdot\sqrt{9-x^2}=0$$

Решение. Произведение двух множителей равно нулю в области допустимых значений, если хотя бы один из множителей равен нулю. Значит, решение данного уравнения приводит нас к следующей системе:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}(\cos x-\sin x)^2=0,\\ \sqrt{9-x^2}=0,\end{array}\right.\\ 9-x^2\ge 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x=0,\\ 9-x^2=0,\end{array}\right.\\ -3\le x\le 3;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2\sin x\cos x=1,\\ (3-x)(3+x)=0,\end{array}\right.\\ -3\le x\le 3;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin 2x=1,\\ x=\pm 3,\end{array}\right.\\ -3\le x\le 3;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z,\\ x=\pm 3,\end{array}\right.\\ -3\le x\le 3;\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4},\\ x=-\dfrac{3\pi}{4},\\ x=-3,\\ x=3.\end{array}\right.$$

Ответ: $-3;\ -\dfrac{3\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{4};\ 3.$

***Пример* 7.** Найти число корней уравнения

$$\sqrt{30-x-x^2}\cdot\left(2\sin^2 x+\cos^2 2x-1\right)=0$$

Решение.

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{30-x-x^2}=0,\\ 2\sin^2 x+\cos^2 2x-1=0,\end{array}\right.\\ 30-x-x^2\ge 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2+x-30=0,\\ 1-\cos 2x+\cos^2 2x-1=0,\end{array}\right.\\ x^2+x-30\le 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}(x-5)(x+6)=0,\\ \cos 2x\cdot(\cos 2x-1)=0,\end{array}\right.\\ (x-5)(x+6)\le 0;\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-6,\\ x=5,\\ \cos 2x=0,\\ \cos 2x=1,\end{array}\right.\\ -6\le x\le 5;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-6,\\ x=5,\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n,\ k\in Z.\\ x=\pi k,\end{array}\right.\\ -6\le x\le 5,\end{cases}$$

Найдем число решений уравнения, принадлежащих отрезку $[-6;\ 5]$.

$$
\begin{aligned}
&-6 \le \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \le 5 \\
&-24 \le \pi + 2\pi n \le 20 \\
&-24 - \pi \le 2\pi n \le 20 - \pi \\
&-\frac{12}{\pi} - \frac{1}{2} \le n \le \frac{10}{\pi} - \frac{1}{2} \\
&-4{,}3 \le n \le 2{,}7;\ n \in Z.
\end{aligned}
$$

Так как $n \in Z$, то целых решений будет 7. Аналогично находим количество корней для $x = \pi k$.

$$
\begin{gathered}
-6 \le \pi k \le 5 \\
-\frac{6}{\pi} \le k \le \frac{5}{\pi} \\
-1{,}9 \le k \le 1{,}6;\ k \in Z.
\end{gathered}
$$

Здесь целых решений будет 3. Таким образом, решений исходного уравнения будет 10.

Ответ: 10.

***Пример* 8.** Решить уравнение

$$\sqrt{(4\cos 3x - 5)^2} - \sqrt{\cos^2 3x - 8\cos 3x + 16} = 4$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду $\sqrt{(4\cos 3x - 5)^2} - \sqrt{(\cos 3x - 4)^2} = 4$. Так как $|\cos 3x| \le 1$, то $4\cos x - 5 \le -1$ и $\cos 3x - 4 < 0$. Тогда по определению модуля числа получим:

$$
\begin{gathered}
5 - 4\cos 3x - 4 + \cos 3x = 4 \\
-3\cos 3x = 3 \\
\cos 3x = -1 \\
x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z.
\end{gathered}
$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z.$

***Пример* 9**. Решить уравнение

$$\log_{\frac{6x-x^2}{11}}\left(-\cos x-\cos 3x\right)=\log_{\frac{6x-x^2}{11}}\left(-\cos 2x\right)$$

Комментарий. Логарифмические уравнения такого вида решаются следующим образом:

а) $\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)=g(x),\\ f(x)>0.\end{cases}$ б) $\log_{f(x)} g(x)=\log_{f(x)} h(x)\Leftrightarrow\begin{cases} g(x)=h(x),\\ g(x)>0,\\ f(x)>0,\\ f(x)\neq 1.\end{cases}$

Решение. Согласно алгоритму решения, рассмотренному выше, приводим исходное уравнение к следующей системе:

$$\begin{cases} -\cos x-\cos 3x=-\cos 2x,\\ \cos 2x<0,\\ \dfrac{6x-x^2}{11}>0,\\ \dfrac{6x-x^2}{11}\neq 1, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2\cos x\cdot\cos 2x-\cos 2x=0,\\ \cos 2x<0,\\ x^2-6x<0,\\ x^2-6x+11\neq 0, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0,\\ \cos x=\dfrac{1}{2}, \end{array}\right.\\ \cos 2x<0,\\ 0<x<6,\\ x\in R, \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \cos x=\dfrac{1}{2},\\ 2\cos^2 x-1<0,\\ 0<x<6, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \cos x=\dfrac{1}{2},\\ \cos^2 x<\dfrac{1}{2},\\ 0<x<6, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \cos x=\dfrac{1}{2},\\ 0<x<6, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z,\\ 0<x<6, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=\dfrac{\pi}{3},\\ x_2=\dfrac{5\pi}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{3}.$

***Пример* 10.** Решить уравнение

$$x^5+x=\sqrt[3]{x-7}$$

Решение. Графики функций $f(x)=x^5+x$ и $g(x)=\sqrt[3]{x-7}$ представлены на рисунке 1. Легко проверяется, что точка $(-1;-2)$ является точкой пересечения графиков функций $f(x)$ и $g(x)$, то есть $x=-1$ и есть решение данного уравнения. Проведем прямую, расположенную между графиками функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ и проходящую через точку их пересечения. Пусть эта прямая задана уравнением $y=x-1$. Тогда легко доказать, что других решений уравнение не имеет.

Для этого докажем, что для $x\in(-1;+\infty)$ справедливы неравенства $x^5+x>x-1$ и $x-1>\sqrt[3]{x-7}$, а для $x\in(-\infty;-1)$ справедливы неравенства $\sqrt[3]{x-7}>x-1$ и $x^5+x<x-1$.

Очевидно, что неравенство $x^5+x>x-1$ справедливо для $x>-1$, а неравенство $x^5+x<x-1$ для $x<-1$. Решим неравенство $\sqrt[3]{x-7}>x-1$. Оно равносильно неравенству $x-7>(x-1)^3$, которое можно переписать в виде $(x+1)\left((x-2)^2+2\right)<0$. Решениями этого неравенства являются все $x<-1$. Точно так же показывается, что решениями неравенства $\sqrt[3]{x-7}<x-1$ являются все $x>-1$.

Следовательно, требуемое утверждение доказано, и исходное уравнение имеет единственный корень $x=-1$.

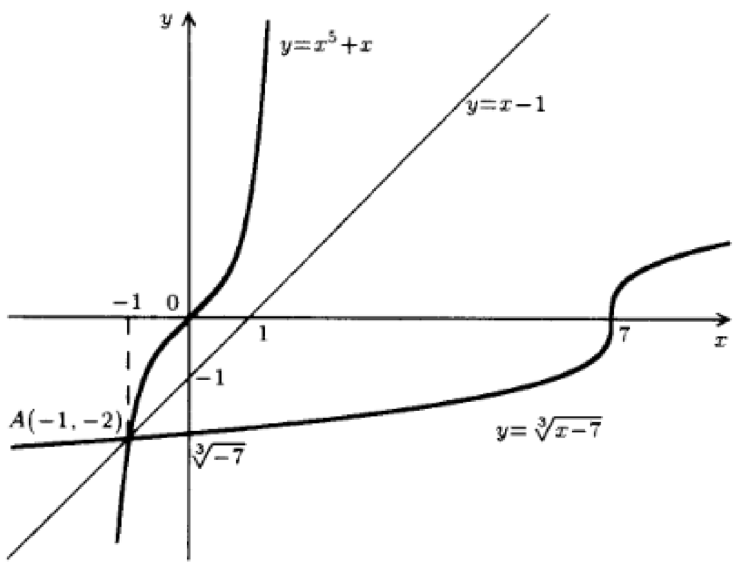


Рис. 1

Ответ: -1.

***Пример* 11.** Решить уравнение $\sin x = x - \pi$

Решение. Построим графики функций $y_1 = \sin x$ и $y_2 = x - \pi$ (рис.2).

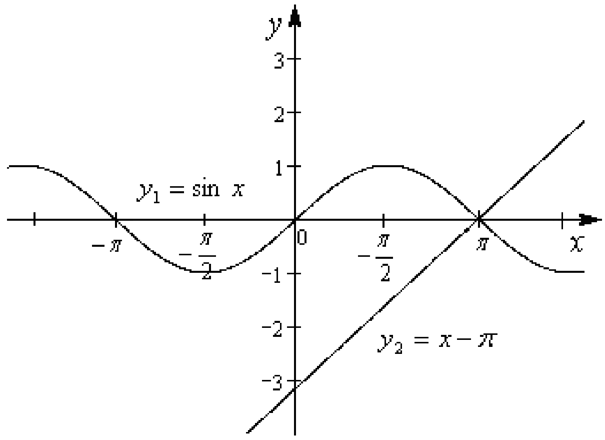


Рис. 2

Из рисунка видно, что графики пересекаются в точке $x = \pi$. Это и есть корень уравнения.

Ответ: π.

***Пример* 12.** Определите количество корней уравнения

$$2^x = 11 - |x|$$

Решение. Построив графики функций $y_1 = 2^x$ и $y_2 = 11 - |x|$ в одной координатной плоскости (рис.3), получим две точки пересечения $x_1 = 3$ и $x_2 \approx -11$.

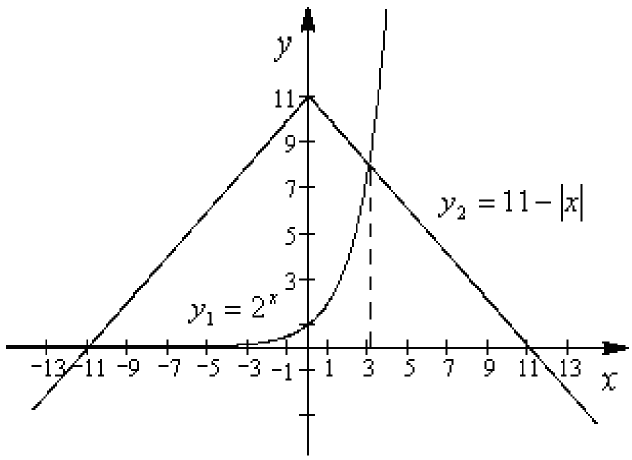


Рис. 3

Ответ: два корня.

***Пример* 13.** Решить уравнение $-(x-1)^2+2=2^x$

Решение. Изобразим графики функций $y_1=-(x-1)^2+2$ и $y_2=2^x$ в одной координатной системе (рис.4). Абсциссы точек пересечения: 0 и 1.

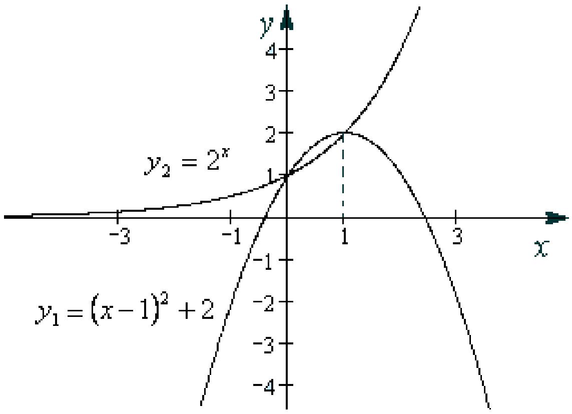


Рис. 4

Ответ: $0; 1$.

***Пример* 14.** Решить уравнение $2\cos^2\left(\dfrac{x^2+x}{6}\right)=7^x+7^{-x}$

Решение. Построим графики функций (рис. 5):

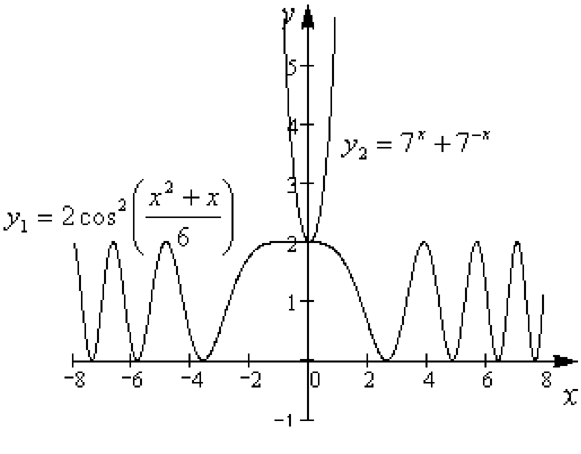


Рис. 5

Графики функций пересеклись в точке с абсциссой $x=0$.

Ответ: 0.

***Пример* 15.** Определить количество корней уравнения

$$x^2-1=\sin x, \text{ при } x\in[0,3]$$

Решение. Графики функций $y_1 = x^2 - 1$ и $y_2 = \sin x$ пересеклись в двух точках (рис.6). Однако в заданный отрезок $x \in [0,3]$ попадает только одна из них. Значит, уравнение имеет один корень.

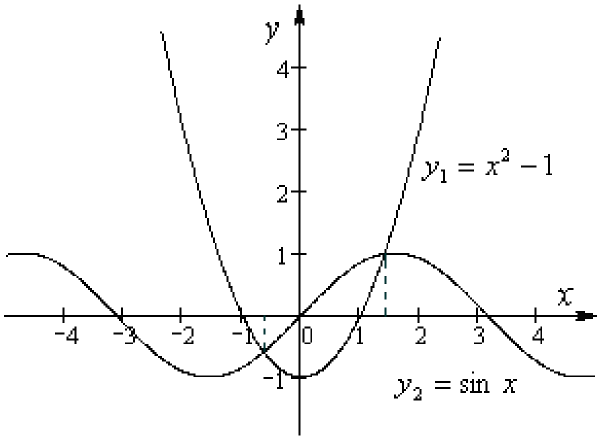


Рис. 6

Ответ: 1 корень.

***Пример* 16.** Определить количество корней уравнения

$$\ln x = x^2$$

Решение. Построим графики функций (рис. 7). По рисунку видно, что корней нет.

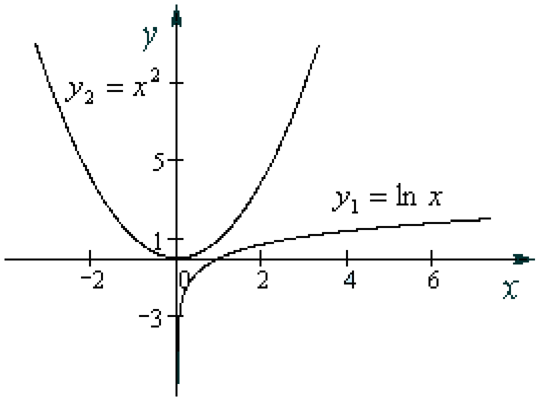


Рис. 7

Ответ: нет корней.

***Пример* 17.** Определить количество корней уравнения

$$|\cos 2x| = 1 - \frac{1}{x}$$

Решение. Найдем предел функции, стоящей в правой части уравнения, при $x \to \infty$. Получаем $\lim\limits_{x\to\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$. Значит, прямая $y = 1$ является асимптотой к графику функции $y = 1 - \dfrac{1}{x}$ (рис. 8). Следовательно, нижняя ветвь гиперболы этой функции будет пересекать график периодической функции $y = |\cos 2x|$, определенной на промежутке $[0;1]$, бесконечное количество раз.

Ответ: бесконечно много корней.

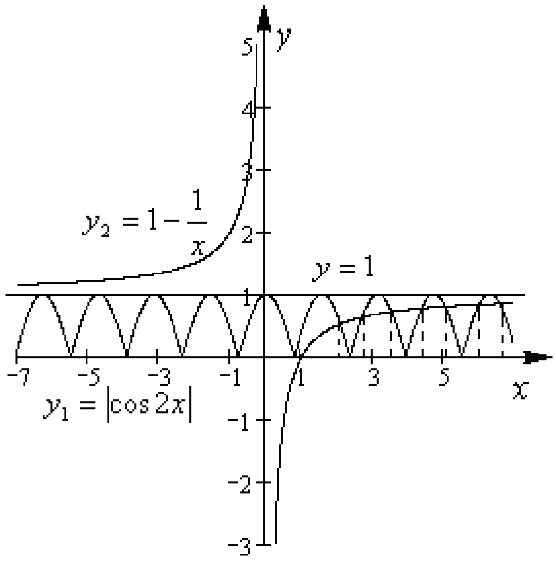


Рис. 8

***Пример* 18.** Определить количество корней уравнения

$$4^{\frac{1}{x}} = \sqrt{9 - (x-1)^2}$$

Решение. Построим графики функций (рис. 9):

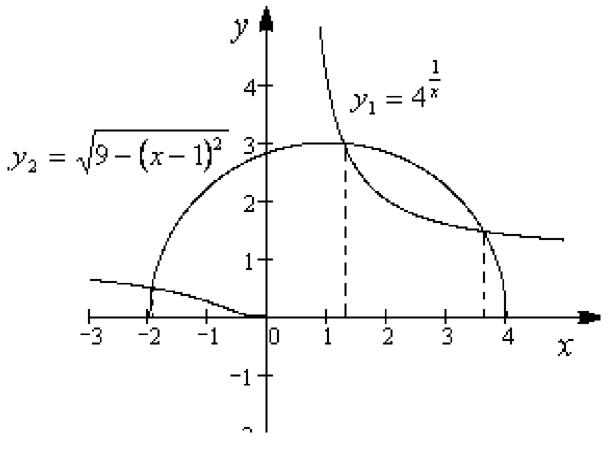


Рис. 9

Ответ: 3 корня.

***Пример* 19.** Определить количество корней уравнения

$$x^2 + 2x - 3 = 2 \cdot \lg 9x$$

Решение. Построим графики функций (рис. 10):

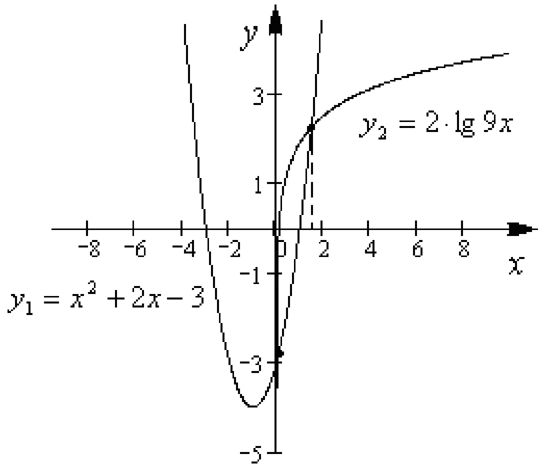


Рис. 10

Ответ: 2 корня.

***Пример* 20.** Решить уравнение $\sqrt{5x-27} = |x-3| - 4$

Решение. Построим графики функций $y = \sqrt{5x-27}$ и $y = |x-3| - 4$ (рис. 11). Из рисунка 11 видно, что построенные графики пересекаются при значениях аргумента, больших 7. Предположим, что корень уравнения равен a. Тогда из прямоугольного равнобедренного треугольника ABC заключаем $BC = AC = a - 7$.

Найдем значение a из уравнения $\sqrt{5a-27} = a - 7$, где $a \geq 7$:

$$5a - 27 = a^2 - 14a + 49$$

$$a^2 - 19a + 76 = 0$$

$$a_1 = \frac{19 + \sqrt{57}}{2}; \; a_2 = \frac{19 - \sqrt{57}}{2}.$$

Корень a_2 не удовлетворяет условию $a > 7$.

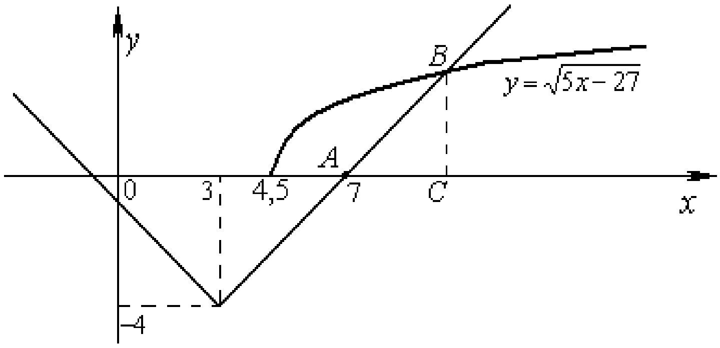


Рис. 11

Ответ: $\dfrac{19+\sqrt{57}}{2}$.

***Пример* 21.** Решить уравнение $\sqrt{3-x}=\log_5(x-3)$

Решение. Область определения этого уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющим условиям $\begin{cases}3-x\ge 0,\\ x-3>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3,\\ x>3.\end{cases}$

То есть область определения уравнения представляет собой пустое множество. Этим решение уравнения и завершается, так как установлено, что ни одно число не может являться решением, то есть, что уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

***Пример* 22.** Решить уравнение $\arcsin^2(x-2)-\sqrt[4]{x-3}=0$

Решение. Найдем область определения данного уравнения:

$$\begin{cases}-1\le x-2\le 1,\\ x-3\ge 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le 3,\\ x\ge 3,\end{cases}\Leftrightarrow x=3.$$

Область определения уравнения представляет собой одно значение. Подставим его в левую часть уравнения: $\arcsin^2(3-2)-\sqrt[4]{3-3}=0-0=0$. Получим верное равенство, значит, $x=3$ – корень уравнения.

Ответ: 3.

***Пример* 23.** Решить уравнение $\sqrt{|\sin x|}=\sqrt[4]{-|\sin x|}+tg\,x$ (4)

Решение. Область определения этого уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} |\sin x| \ge 0, \\ -|\sin x| \ge 0, \\ x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z. \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi k,\ k \in Z.$$

Подставляя эти значения x в уравнение (4), получаем, что его левая и правая части равны 0, а это означает, что все $x = \pi k,\ k \in Z$, являются его решениями.

Ответ: $\pi k,\ k \in Z$.

***Пример* 24.** Решить уравнение $4\sqrt{x-2} + \sqrt{x} = \sqrt{2x - x^2} + 2\sin\dfrac{\pi x}{8}$.

Решение. Арифметический квадратный корень определен для неотрицательных подкоренных выражений, следовательно, имеем область определения этого уравнения в виде:

$$\begin{cases} x - 2 \ge 0, \\ x \ge 0, \\ 2x - x^2 \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, \\ x(x-2) \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, \\ 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

Таким образом, единственное допустимое значение $x = 2$. Проверкой убеждаемся, что это значение является корнем исходного уравнения.

Ответ: 2.

***Пример* 25.** Решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_3(x-5)\right) - \sqrt{9x - 8 - x^2} + \sqrt{x-8} = 2$$

Решение. Найдем область определения этого уравнения:

$$\begin{cases} x - 5 > 0, \\ \log_3(x-5) > 0, \\ 9x - 8 - x^2 \ge 0, \\ x - 8 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5, \\ x - 5 > 1, \\ (8-x)(x-1) \ge 0, \\ x \ge 8; \end{cases} \Leftrightarrow x = 8.$$

Это значит, что областью определения данного уравнения является одно число $x = 8$. Проверим, является ли оно корнем уравнения.

$$\log_{\frac{1}{3}}(\log_3(8-5)) - \sqrt{9\cdot 8-8-8^2} + \sqrt{8-8} = 0$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 1 - \sqrt{72-8-64} = 0$$

$$0 \neq 2$$

Ответ: корней нет.

***Пример* 26**. Решить уравнение

$$\sqrt{2^{2x} - 2^{x+1} + 4} \cdot \log_x x^2 \cdot \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{3-x} = 0$$

Решение. Найдем область определения данного уравнения:

$$\begin{cases} 2^{2x} - 2^{x+1} + 4 \geq 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x+2 \geq 0, \\ 3-x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x} - 2\cdot 2^x + 4 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \geq -2, \\ x \leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \geq -2, \\ x \leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ 1 < x \leq 3 \end{array}\right.$$

Далее, решая уравнение, приравниваем каждое из произведений к нулю. Однако произведение функций в данном уравнении может быть равно нулю только при $x = 3$.

Ответ: 3.

***Пример* 27.** Решить уравнение

$$x^2 + |x| + \sqrt{x} + 2x - 3 = 27$$

Решение. Выполним некоторые преобразования:

$$\begin{cases} x^2 + x + \sqrt{x} + 2x - 3 = 27, \\ x \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \sqrt{x} + 3x - 30 = 0, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Правая часть уравнения (5) представляет собой сумму возрастающих функций. Следовательно, $f(x) = x^2 + \sqrt{x} + 3x - 30$ – функция, возрастающая (см. 1^0 с. 27) и число **0** принадлежит области значения данной функции, следовательно, данное уравнение имеет не более одного корня (см. след.1 с. 29). Находим корень: $x = 4$. При его подстановке в уравнение получаем верное числовое равенство

$$4^2+\sqrt{4}+3\cdot 4-30=0$$
$$16+2+12-30=0$$

Ответ: 4.

Замечание. В данном случае корень уравнения легко угадать. Однако если это сделать проблематично, то стоит применять другие методы решения.

***Пример* 28.** Решить уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2+2x-2\right)=\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2+2x-3\right)$$

Комментарий. Поскольку под знаком логарифма стоят квадратные трехчлены с положительным старшим коэффициентом, ни о какой монотонности в таком виде не может быть и речи. С другой стороны, эти трехчлены, а также основания логарифмов очень «похожи», как-то связаны друг с другом, так что попробуем преобразовать основания и сделать хорошую замену переменной. Затем мы получим монотонную функцию [7, с. 53].

Решение. Во-первых, очевидно, что $x^2+2x-2=(x^2+2x-3)+1$, так что, если обозначить x^2+2x-3 через t, то $x^2+2x-2=t+1$.

Во-вторых, заметим, что

$$2\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{1+\left(7+4\sqrt{3}\right)}=\sqrt{1+\left(4+2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+3\right)}=\sqrt{1+\left(2+\sqrt{3}\right)^2},$$

поэтому, если обозначить $7+4\sqrt{3}$ через a, можно провести следующую цепочку равносильных в области определения преобразований данного уравнения с учетом введенных обозначений:

$$\log_{\sqrt{1+a}}\left(t+1\right)=\log_{\sqrt{a}} t$$
$$2\log_{\sqrt{a+1}}\left(t+1\right)=2\log_a t$$
$$\log_{a+1}\left(t+1\right)=\log_a t$$

Заметим, что $a=7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2>1, t>0$ (иначе не существует логарифм в правой части уравнения, поэтому $t+1>1$, но тогда $t>1$; в противном случае левая часть уравнения положительна, а правая – отрицательна). Следовательно, имеем $t>1,\ a>1$.

Теперь перейдем к новому основанию логарифмов, например, к основанию 2:

$$\frac{\log_2(t+1)}{\log_2(a+1)}=\frac{\log_2 t}{\log_2 a}$$

$$\frac{\log_2(t+1)}{\log_2 t}=\frac{\log_2(a+1)}{\log_2 a}$$

Если обозначить через $f(z)$ функцию $\frac{\log_2(z+1)}{\log_2 z}$, то уравнение можно записать в виде: $f(t)=f(a)$

Это уравнение имеет, очевидно, корень $t=a$. Если нам удастся доказать, что функция $y=f(z)$ монотонна при $z>1$, из этого будет следовать (см. след.1 с. 29), что других решений нет. Докажем это.

Для этого достаточно заметить, что при всех k, кроме нуля, выполняется равенство $k+1=k\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Поэтому при всех допустимых в нашей задаче значениях z (то есть при $z>1$)

$$f(z)=\frac{\log_2(z+1)}{\log_2 z}=\frac{\log_2\left(z\left(1+\frac{1}{z}\right)\right)}{\log_2 z}=\frac{\log_2 z+\log_2\left(1+\frac{1}{z}\right)}{\log_2 z}=1+\frac{\log_2\left(1+\frac{1}{z}\right)}{\log_2 z}.$$

При $z>1$ сумма $1+\frac{1}{z}$, очевидно, убывает; логарифм по основанию 2 – возрастающая функция, то есть числитель последней дроби в последнем равенстве убывает, а знаменатель возрастает. А так как они при этом еще и положительны, эта дробь убывает с ростом z.

Таким образом, функция $y=f(z)$ убывает при $z>1$, и данное уравнение имеет единственное решение $t=a$. Осталось найти корни исходного уравнения:

$$x^2+2x-3=7+4\sqrt{3}$$
$$x^2+2x-10-4\sqrt{3}=0$$
$$D=4-4\cdot1\cdot\left(-10-4\sqrt{3}\right)=44+16\sqrt{3}=4\cdot\left(11+4\sqrt{3}\right)$$
$$x_1=\frac{-2+2\sqrt{11+4\sqrt{3}}}{2}=-1+\sqrt{11+4\sqrt{3}}$$
$$x_2=\frac{-2-2\sqrt{11+4\sqrt{3}}}{2}=-1-\sqrt{11+4\sqrt{3}}.$$

Ответ: $-1+\sqrt{11+4\sqrt{3}};\ -1-\sqrt{11+4\sqrt{3}}.$

***Пример* 29.** Решить уравнение

$$\sqrt{x\cdot(x+7)}+\sqrt{(x+7)(x+17)}+\sqrt{(x+17)(x+24)}=4\cdot\log_2 8+17\sqrt{2}$$

Решение. Если записать первое подкоренное выражение в виде $(x+0)(x+7)$ и нанести на числовую ось четыре числа, которые суммируются с неизвестной величиной во всех скобках левой части, то увидим, что эта система из четырех точек имеет центр симметрии – точку 12 (рис. 12) (относительно нее симметрична пара чисел 0 и 24, а также пара 7 и 17).

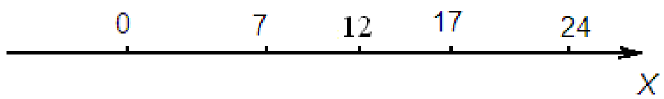


Рис. 12

Поэтому замена переменной $t=x+12$ (откуда $x=t-12$) симметризует левую часть уравнения, которое примет вид

$$\sqrt{(t-12)(t-5)}+\sqrt{(t-5)(t+5)}+\sqrt{(t+5)(t+12)}=12+17\sqrt{2}.$$

Обозначим левую часть через $f(t)$. Заметим, что функция $f(t)$ определена в симметричной относительно нуля области

$$\begin{cases}(t-12)(t-5)\ge 0\\(t-5)(t+5)\ge 0\\(t+5)(t+12)\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t\le 5,\\t\ge 12\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}t\le -5,\\t\ge 5\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}t\le -12,\\t\ge -5\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t\le -12,\\t\ge 12\end{array}\right.$$

и обладает свойством $f(-t)=f(t)$, то есть является четной. Поэтому достаточно решить уравнение для $t\ge 12$. Но при этих значениях t каждый из трех трехчленов, стоящих под знаком радикала в левой части, возрастает, значит, возрастают и квадратные корни из этих трехчленов (см. 4^0 (а) с. 28). Поэтому, применив 1^0 (с. 27), получим, что при $t\ge 12$ левая часть уравнения – возрастающая функция и, значит, уравнение имеет не более одного корня (см. след.1 с. 29). Находим подбором, что $t=13$ – корень. Подставив это значение t в левую часть уравнения, получим:

$$\sqrt{8}+\sqrt{144}+\sqrt{450}=2\sqrt{2}+12+15\sqrt{2}=12+17\sqrt{2},$$

что равно правой части.

Итак, $t=13$, откуда $x=1$. Поскольку $f(-t)=f(t)$, то есть является четная, то $t=-13$ – тоже решение уравнения, получаем и второй корень исходного уравнения, $x=-25$.

Ответ: $1;\ -25$.

***Пример* 30**. Решить уравнение $\log_2\left(1+\sqrt{x}\right)=\log_3 x$

Решение. Обозначим $t=\log_3 x$. Тогда $x=3^t$, $\sqrt{x}=\left(\sqrt{3}\right)^t$, и заданное уравнение можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \log_2\left(1+\left(\sqrt{3}\right)^t\right)=t, \\ 1+\sqrt{x}>0, \\ x>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2\left(1+\left(\sqrt{3}\right)^t\right)=t, \\ \sqrt{x}>-1, \\ x>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2\left(1+\left(\sqrt{3}\right)^t\right)=t, \\ x>1. \end{cases}$$

откуда $1+\left(\sqrt{3}\right)^t=2^t$. Это уравнение имеет очевидный корень $t=2$, но утверждать, что это единственный корень уравнения, мы не можем, потому что как левая, так и правая часть уравнения – возрастающая функция. Но если обе части уравнения разделить почленно на $\left(\sqrt{3}\right)^t$, то получим:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t+1=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^t.$$

Теперь левая часть уравнения, то есть показательная функция $y=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t+1$, убывает (основание $\frac{1}{\sqrt{3}}<1$), а правая часть уравнения, то есть показательная функция $y=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^t$, возрастает (т.к. основание $\frac{2}{\sqrt{3}}>1$). Значит, $t=2$ – единственный корень уравнения (см. след.2 с. 33).

Поскольку $t=\log_3 x$, то из уравнения $\log_3 x=2$ находим $x=9$ – единственный корень заданного уравнения.

Ответ: 9.

***Пример* 31.** Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-7}+\left(\sqrt{x-5{,}3}\right)^2+13{,}3=\frac{x^2-2x+1}{x-3}+x.$$

Решение. Выполнив преобразования, получим:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-7} + x - 5{,}3 + 13{,}3 = \dfrac{(x-1)^2}{x-3} + x, \\ x - 3 \neq 0, \\ x - 5{,}3 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-7} + 8 = \dfrac{(x-1)^2}{x-3}, \\ x \geq 5{,}3. \end{cases}$$

Замечаем, что это уравнение имеет корень $x = 7$. Докажем, что других корней нет.

Функция $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-7} + 8$ убывает. Если окажется, что функция $y = \dfrac{(x-1)^2}{x-3}$ возрастает в области определения заданного уравнения, то есть на луче $[5{,}3; +\infty)$, то можно будет сделать вывод о том, что $x = 7$ – единственный корень уравнения (см. след. 2 с. 33).

Найдем производную функции $y = \dfrac{(x-1)^2}{x-3}$.

Получим $y' = \dfrac{2(x-1)(x-3) - (x-1)^2}{(x-3)^2} = \dfrac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$.

Если $x \geq 5{,}3$, то $y' > 0$, то есть функция $y = \dfrac{(x-1)^2}{x-3}$ возрастает на луче $[5{,}3; +\infty)$, что и требовалось доказать.

Итак, $x = 7$ – единственный корень уравнения.

Ответ: 7.

***Пример* 32.** Решить уравнение $(tg\, x)^{\sin x} = (ctg\, x)^{\cos x}$.

Решение. Сначала рассмотрим это уравнение как показательно-степенное: $(tg\, x)^{\sin x} = (tg\, x)^{-\cos x}$ (6)

Это уравнение вида $\left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(f(x)\right)^{h(x)}$. Таким уравнениям соответствуют пять случаев:

1. $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = h(x). \end{cases}$ 2. $\begin{cases} f(x) < 0, \\ f(x) \neq -1, \\ g(x) = h(x). \end{cases}$ 3. $f(x) = 1$; 4. $f(x) = 0$; 5. $f(x) = -1$.

В последних трех случаях обязательна проверка.

Теперь надо рассмотреть это уравнение в каждом из случаев:

$$\begin{cases} tg\,x < 0, \\ tg\,x \neq -1; \end{cases} \quad tg\,x = -1; \quad tg\,x = 0; \begin{cases} tg\,x > 0, \\ tg\,x \neq 1; \end{cases} \quad tg\,x = 1.$$

Если $tg\,x < 0$, но $tg\,x \neq -1$, то из уравнения (6), приравняв показатели, получим $\sin x = -\cos x$, откуда $tg\,x = -1$. Это уравнение несовместимо с условием $tg\,x \neq -1$.

Если $tg\,x = -1$, то $|\sin x| = |\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Это значит, что в уравнении (6) отрицательное число возводится в иррациональные степени, что не имеет смысла.

Если $tg\,x = 0$, то есть $x = \pi n$, то $\sin x = 0$. Значит, левая часть уравнения (6) принимает вид 0^0, что не имеет смысла.

Если $tg\,x > 0$, но $tg\,x \neq 1$, то из уравнения (6), приравняв показатели, получим $\sin x = -\cos x$, то есть $tg\,x = -1$, что противоречит условию $tg\,x > 0$.

Наконец, если $tg\,x = 1$, то уравнение (6) примет вид:

$$1^{\sin x} = 1^{-\cos x}, \text{ то есть } 1 = 1$$

Итак, уравнение (6) сводится к уравнению $tg\,x = 1$, откуда находим $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

***Пример* 33.** Решить уравнение

$$\left|10\sin\frac{x}{2} - 6 + \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|^{\sqrt{11x - x^2 - 10}} = 1. \quad (7)$$

Решение. Пусть $t=\sin\dfrac{x}{2}$ и $u=\left|10t-6+\dfrac{1}{t}\right|$. Тогда нам нужно рассмотреть уравнение (7) в каждом из случаев (см. пример 32):

$$u=0;\quad \begin{cases} u>0, \\ u\neq 1; \end{cases}\quad u=1.$$

Пусть $u=0$, то есть $10t-6+\dfrac{1}{t}=0$ или $10t^2-6t+1=0$. Это уравнение не имеет действительных корней.

Пусть $u=1$, то есть $10t-6+\dfrac{1}{t}=1$ или $10t-6+\dfrac{1}{t}=-1$. Первое из этих уравнений преобразуется в уравнение $10t^2-7t+1=0$, а второе – в $10t^2-5t+1=0$. Первое уравнение имеет корни $t_1=\dfrac{1}{2}$, $t_2=\dfrac{1}{5}$, второе не имеет действительных корней.

Мы пришли к совокупности тригонометрических уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}, \\ \sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{5}. \end{array}\right.$$

Из нее находим $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\ x=(-1)^n 2\arcsin\dfrac{1}{5}+2\pi n;\ k,n\in Z$. При этих значениях уравнение (7) принимает вид $1^{\sqrt{11x-x^2-10}}=1$. Это – верное равенство при условии $11x-x^2-10\geq 0$, то есть $1\leq x\leq 10$. Значит, из найденных решений совокупности тригонометрических уравнений надо отобрать те, которые принадлежат отрезку $[1;10]$.

Рассмотрим сначала серию $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$. Если $k=0$, то $x=\dfrac{\pi}{3}\in[1;10]$. Если $k=1$, то $x=\dfrac{5\pi}{3}\in[1;10]$. Если $k=2$, то $x=\dfrac{13\pi}{3}\notin[1;10]$.

Аналогично не принадлежат отрезку $[1;10]$ те значения x, которые получаются при других значениях k.

Рассмотрим серию $x=(-1)^n 2\arcsin\frac{1}{5}+2\pi n, n\in Z$. Для облегчения последующих рассуждений вычислим $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{5}\right)$. Имеем:

$$\sin\left(2\arcsin\frac{1}{5}\right)=2\sin\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)}=\frac{2}{5}\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{4\sqrt{6}}{25}.$$

Значит, $2\arcsin\frac{1}{5}=\arcsin\frac{4\sqrt{6}}{25}$. Но $\frac{4\sqrt{6}}{25}<\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому $\arcsin\frac{4\sqrt{6}}{25}<\frac{\pi}{4}<1$.

Зная, что $2\arcsin\frac{1}{5}<1$, отберем корни из серии $x=(-1)^n 2\arcsin\frac{1}{5}+2\pi n, n\in Z$.

Если $n=0$, то $x=2\arcsin\frac{1}{5}\notin[1;10]$. Если $n=1$, то $x=\left(2\pi-2\arcsin\frac{1}{5}\right)\in[1;10]$.

Если $n=2$, то $\left(2\arcsin\frac{1}{5}+4\pi\right)\notin[1;10]$. При других значениях параметра n получающиеся значения x не принадлежат отрезку $[1;10]$.

Итак, в случае, когда $u=1$, мы получили следующие корни:

$$x_1=\frac{\pi}{3},\ x_2=\frac{5\pi}{3},\ x_3=2\pi-2\arcsin\frac{1}{5}.$$

Осталось рассмотреть случай, когда $u>0$, но $u\neq 1$. В этом случае уравнение (7) равносильно уравнению $\sqrt{11x-x^2-10}=0$, откуда находим $x_4=1$ и $x_5=10$ – еще два корня уравнения (7).

Ответ: $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $2\pi-2\arcsin\frac{1}{5}$; 1; 10.

***Пример* 34.** Решить уравнение $\sin\frac{\pi(x+1)}{2}+2\cdot 2^{\left(x^2-6x+8\right)^2}=1$.

Решение. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\sin\frac{\pi(x+1)}{2}+2^{\left(x^2-6x+8\right)^2+1}=1$$

Степень второго слагаемого $\left(x^2-6x+8\right)^2+1\geq 1$, следовательно, $2^{\left(x^2-6x+8\right)^2+1}\geq 2$. И известно, что $-1\leq\sin\dfrac{\pi(x+1)}{2}\leq 1$. Тогда исходное равенство справедливо тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases}\sin\dfrac{\pi(x+1)}{2}=-1,\\ 2\cdot 2^{\left(x^2-6x+8\right)^2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\pi(x+1)}{2}=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z,\\ x^2-6x+8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2+4n, n\in Z,\\ \left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=4.\end{array}\right.\end{cases}$$

Подставим корни квадратного уравнения в первое уравнение полученной системы. Получаем, что $x=2$ – корень уравнения, при $n=1$, однако, нет таких n, при которых $x=4$ также являлось бы корнем. Значит, $x=2$ – единственный корень.

Ответ: 2.

***Пример* 35.** Решить уравнение $\cos^2(x+1)\cdot\lg\left(9-2x-x^2\right)=1$.

Решение. Пусть $x+1=t$, тогда $\cos^2 t\cdot\lg\left(10-t^2\right)=1$, где $0\leq\cos^2 t\leq 1$ и $\lg\left(10-t^2\right)\leq 1$. Отсюда следует система:

$$\begin{cases}10-t^2>0,\\ \cos^2 t=1,\\ \lg\left(10-t^2\right)=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{10}<t<\sqrt{10},\\ \cos^2 t=1,\\ \lg\left(10-t^2\right)=1.\end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $t=0$. Сделаем обратную замену:

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

Ответ: -1.

***Пример* 36.** Решить уравнение

$$\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot\left(1+tg^2 2y\right)\cdot\left(3+\sin 3z\right)=4.$$

Решение. Очевидно, что $\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\ge 2$ (см. п.5 с.34), $1+tg^2 2y\ge 1$ и $2\le 3+\sin 3z\le 4$. Равенство $\left(\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot\left(1+tg^2 2y\right)\cdot\left(3+\sin 3z\right)=4$ выполняется тогда и только тогда, когда $\begin{cases}\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}=2,\\ 1+tg^2 2y=1,\\ 3+\sin 3z=2.\end{cases}$

Решая эту систему, получим $\begin{cases}\cos^2 x=1,\\ tg^2 2y=0,\\ \sin 3z=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pi n,\\ y=\dfrac{\pi k}{2},\\ z=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi l}{3}\end{cases}$ где $n,k,l\in Z.$

Ответ: $\pi n,\ y=\dfrac{\pi k}{2},\ z=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi l}{3}$, где $n,k,l\in Z.$

***Пример* 37.** Решить уравнение $x^2-6x+y-4\sqrt{y}+13=0$.

Решение. Выделим квадраты двучленов:

$$(x^2-6x+9)+(y-4\sqrt{y}+4)=0$$
$$(x-3)^2+\left(\sqrt{y}-2\right)^2=0$$

Но сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из них равно нулю.

$$\begin{cases}(x-3)^2=0,\\ \left(\sqrt{y}-2\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3,\\ y=4\end{cases}$$

Ответ: 3; 4.

***Пример* 38.** Решить уравнение

$$\left(tg\frac{\pi}{x-3}-x^3+4x^2+x-4\right)^2+\left(4^x-18\cdot 2^x+32\right)^4=0.$$

Решение. Имеем два неотрицательных выражения, сумма которых равна нулю (см. теорему 10 с.42). Значит, справедлива система:

$$\begin{cases} tg\dfrac{\pi}{x-3} - x^3 + 4x^2 + x - 4 = 0, \\ 4^x - 18\cdot 2^x + 32 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы $4^x - 18\cdot 2^x + 32 = 0$. Пусть $t = 2^x$, тогда $t^2 - 18t + 32 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = 16,\ t_2 = 2$. Значит, $2^x = 16,\ 2^x = 2$. Следовательно, $\left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = 1. \end{array}\right.$ Подставим полученные корни в первое уравнение системы: при $x = 4$ равенство выполняется:

$$tg\pi - 64 + 64 + 4 - 4 = 0$$

$$tg\pi = 0,$$

но при $x = 1$ оно не верно:

$$tg\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 1 + 4 + 1 - 4 = 0$$

$$-1 \neq 0.$$

Ответ: 4.

***Пример* 39.** Решить уравнение $2^{|x|} = \sin\left(x^2\right)$

Решение. Оценим обе части уравнения. При всех значениях x верны неравенства: $2^{|x|} \geq 1$ и $\sin\left(x^2\right) \leq 1$. Следовательно, данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2^{|x|} = 1, \\ \sin\left(x^2\right) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ \sin\left(x^2\right) = 1. \end{cases}$$

Полученная система не имеет решений, так как $x = 0$ не удовлетворяет второму уравнению.

Выясним как ведут себя графики функций данного уравнения (рис.13).

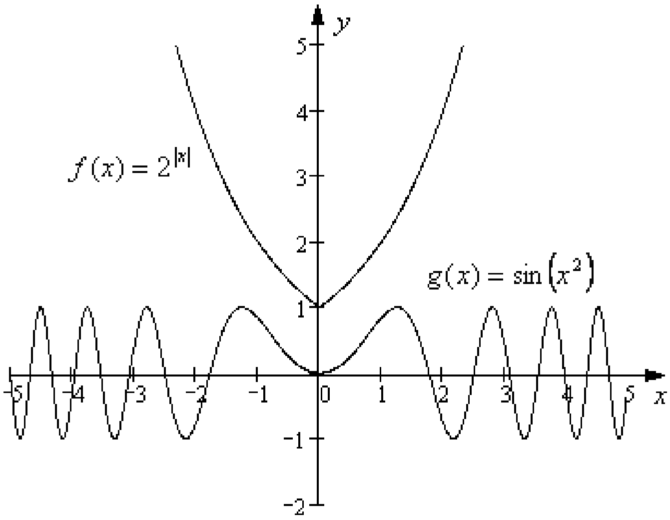


Рис.13

Графики не пересеклись, то есть функции не имеют общего множества значений, и уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

***Пример* 40.** Решить уравнение $8\sin x = x^2 - 10x + 33$.

Решение. Проанализируем сначала правую часть уравнения. Рассмотрим квадратичную функцию $y = x^2 - 10x + 33$, ее графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

Найдем координаты вершины данной параболы: (5;8). Тогда область значений этой квадратичной функции $[8;+\infty]$, причем значение 8 она принимает только один раз при $x = 5$.

В левой части уравнения находится функция $y = 8\sin x$. Ее область значений $[-8;8]$.

Значит, если графики этих функций имеют общую точку, то ее ордината может быть только 8.

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 8\sin x = 8, \\ x^2 - 10x + 33 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ x^2 - 10x + 25 = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение системы имеет единственный корень 5, но при выполнении проверки первого уравнения получаем неверное равенством $\sin 5 = 1$, из чего делаем вывод, что система, а значит, и исходное уравнение, не имеет решений.

Ответ: нет корней.

***Пример* 41.** Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = -\sin^2\left(\frac{\pi x^2}{25}\right)$.

Решение. Функция $f(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 25}$ имеет область значений $E(f) = [0;+\infty)$, а функция $g(x) = -\sin^2\left(\frac{\pi x^2}{25}\right)$ имеет $E(g) = [-1;0]$.

Значит, если графики этих функций имеют общую точку, то ее ордината может быть только 0. Составляем систему:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 10x + 25} = 0, \\ -\sin^2\left(\frac{\pi x^2}{25}\right) = 0 \end{cases}$$

Приходим к квадратному уравнению:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$
$$x = 5$$

Ответ: 5.

***Пример* 42.** Решить уравнение $-\cos(7\pi x) = x^2 - 6x + 10$.

Решение. Проанализируем правую часть уравнения. Рассмотрим квадратичную функцию $y = x^2 - 6x + 10$, графиком которой являться парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты вершины. Координаты вершины параболы – (3;1). Значения этой квадратичной функции больше или равны 1, причем значение 1 функция принимает, только один раз – при $x = 3$. $-1 \le -\cos(7\pi x) \le 1$, то есть значения левой части данного уравнения не превосходят 1.

Равенство между значениями данных функций может достигаться только тогда, когда обе части уравнения принимают значение 1.

Следовательно, данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} -\cos(7\pi x) = 1, \\ x^2 - 6x + 10 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\cos(7\pi x) = 1, \\ x^2 - 6x + 9 = 0 \end{cases}$$

Решив второе уравнение системы, получим $x = 3$.

Проверяем, является ли число 3 корнем первого уравнения системы:

$$-\cos(21\pi) = 1$$
$$1 = 1$$

Равенство – верное. Значит, значение 3 является решением исходного уравнения.

Ответ: 3.

***Пример* 43.** Решить уравнение $\log_2\left(\cos^2(xy) + \frac{1}{\cos^2(xy)}\right) = \frac{1}{y^2 - 2y + 2}$.

Решение.

$$\cos^2(xy) + \frac{1}{\cos^2(xy)} \geq 2 \quad \text{(см. п. 5 с. 36)}$$
$$\log_2\left(\cos^2(xy) + \frac{1}{\cos^2(xy)}\right) \geq 1$$

Тогда значение дроби в правой части не больше 1.

$$y^2 - 2y + 2 = (y-1)^2 + 1 \geq 1$$

Значит, если данное уравнение имеет решение, то только тогда, когда обе части одновременно станут равными 1 при одних и тех же значениях переменных.

$$y = 1$$
$$x = \pi n, n \in Z$$

Ответ: $\pi n, n \in Z$

***Пример* 44.** Решить уравнение $2\cos^2\left(\frac{x^2+x}{6}\right) = 7^x + 7^{-x}$.

Решение.

$0 \le 2\cos^2\left(\frac{x^2+x}{6}\right) \le 2$ (см. п. 9 с. 37)

$7^x + 7^{-x} \ge 2$ (см. п.4 с.36)

$$\begin{cases} 7^x + 7^{-x} = 2, \\ 2\cos^2\left(\frac{x^2+x}{6}\right) = 2 \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{x^2+x}{6}\right) = 1$$

$$\frac{x^2+x}{6} = 0$$
$$x(1+x) = 0$$
$$x = 0 \text{ или } x = -1$$

$x = -1$ – посторонний корень.

Ответ: 0.

***Пример* 45.** Решить систему уравнений: $\begin{cases} tg^2 x + ctg^2 x = 2\sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1 \end{cases}$

Решение. Заметим, что данная система имеет три переменных. И тут снова на помощь приходит метод мажорант.

Рассмотрим первое уравнение системы $tg^2 x + ctg^2 x = 2\sin^2 y$. Оценим левую часть уравнения. Выражение $tg^2 x + ctg^2 x \ge 2$ как сумма двух взаимно обратных положительных чисел (см. п. 4 с. 36).

Оценим правую часть уравнения $0 \le 2\sin^2 y \le 2$ (см. п. 9 с. 37). Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} tg^2 x + ctg^2 x = 2, \\ 2\sin^2 y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg^2 x = 1, \\ \sin^2 y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z, \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z \end{cases}$$

Воспользуемся равенством $\sin^2 y = 1$ для второго уравнения системы.

$$1 + \cos^2 z = 1$$
$$\cos^2 z = 0$$
$$z = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad y = \frac{\pi}{2} + \pi m, \; z = \frac{\pi}{2} + \pi n, \; k, m, n \in Z.$

***Пример* 46.** Решить уравнение $\sqrt{\frac{2x-1}{x^2 - x + 1}} + \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{2x-1}} = \sqrt{4x^2 - x^2}$.

Решение. Пусть $t = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2 - x + 1}} > 0$. Левая часть уравнения, равная $t + \frac{1}{t} \ge 2$ (см. п.4 с.36), а правая часть $\sqrt{4x - x^2} = \sqrt{4 - (x-2)^2} \le 2$.

Поэтому равенство возможно только при $x = 2$. Проверкой убеждаемся, что $x = 2$ – корень.

Ответ: 2.

***Пример* 47.** Найти все решения уравнения $4x^3 + 3x^2 = 6x - \frac{11}{4} + \sin \pi x$, лежащие на отрезке $\left[-\frac{3}{2}; 1\right]$.

Решение. Сначала запишем равносильное уравнение в удобном для нас виде: $4x^3 + 3x^2 - 6x + \frac{11}{4} = \sin \pi x$ (8).

Найдем наименьшее значение функции, стоящей в левой части уравнения, на отрезке $\left[-\frac{3}{2};1\right]$.

$$f'(x)=12x^2+6x-6$$
$$f'(x)=6(2x-1)(x+1)$$

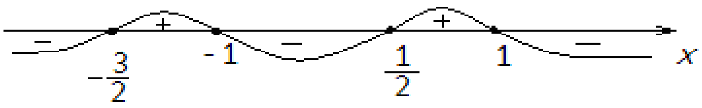


Рис.15

Отсюда видно, что $f(x)$ возрастает на отрезках $\left[-\frac{3}{2};-1\right]$ и $\left[\frac{1}{2};1\right]$, а убывает на отрезке $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$ (рис.15). Значит, наименьшее значение функция $f(x)=4x^3+3x^2-6x-6$ принимает либо в точке $x=-\frac{3}{2}$, либо в точке $x=\frac{1}{2}$.

Но $f\left(-\frac{3}{2}\right)=5$ и $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$. Наименьшим значением функции $f(x)$ на данном отрезке оказалось значение 1.

Итак, левая часть уравнения (8) не меньше 1 на отрезке $\left[-\frac{3}{2};1\right]$, причем значение 1 может достигаться только при $x=\frac{1}{2}$. А значение выражения в правой части уравнения (8) не больше 1. Значит, если значения функций совпадут, то этим значением может быть только 1.

Проверкой убеждаемся, что и правая часть при $x=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

***Пример* 48.** Решить уравнение $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-2}=x^2-6x+11$.

Решение.

$$f(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{x-2}$$

$$D(f):\begin{cases}4-x\ge 0,\\ x-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow D(f)=[2;4]$$

$$g(x)=(x-3)^2+2$$

$$D(g)=R,\ g(x)\ge 2$$

Найдем мажоранту функции $f(x)$ с помощью производной:

$$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$f'(x)=\frac{-\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}{2\sqrt{(4-x)(x-2)}}$$

$$D(f')=(2;4)$$

Найдем критические точки:

$$\sqrt{4-x}-\sqrt{x-2}=0$$

$$4-x=x-2$$

$$x=3$$

3 – внутренняя точка $D(f)$ и $f'(3)=0$, следовательно, 3 – критическая точка.

Непрерывная на данном отрезке функция имеет единственный экстремум, он максимум, значит наибольшее значение функции (рис.16).

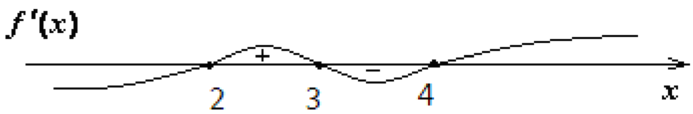


Рис. 16

$$\max_{[2;4]} f(x)=2$$

$$f(x)\le 2.$$

Ответ: 3.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Уравнения, которые составили учащиеся

1) $x^2+2-\frac{4}{x}=0$
2) $-x^2-4+\frac{6}{x}=0$
3) $x^2-x-6=0$
4) $x^2-3x+2=0$
5) $x-2-\frac{3}{x}$
6) $x+2+2x^2=0$
7) $x^2+6x+9=0$
8) $x^2-4x+3=0$
9) $2x^2-4x+3=0$
10) $3x^2-6x+11=0$
11) $x^2-x-6=0$
12) $x^2+x-12=0$
13) $x^2+3-4x=0$
14) $x^2+7x-18=0$
15) $13+\frac{x}{4}=x+1$
16) $25x^2-1=0$
17) $x^2+3-\frac{5}{x}=0$
18) $-x^2-4+\frac{2}{x}=0$
19) $x^5=3-2x$
20) $2x^2-5x-3=0$
21) $4x^2-20x=0$
22) $2x^2-8x+4=0$
23) $-3x^2+12x+2=0$
24) $2x^2+5x+3=0$
25) $3x^2-2x+4=0$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3.

Участие на конференциях

СЕРТИФИКАТ

вручается
студентке 131 группы

Захаровой

Владиславе Александровне

за выступление с докладом

Применение свойств функции при решении уравнений

Декан математического факультета
И.Н. Власова

Математический факультет

осенняя научная сессия

математический
факультет
ПГГПУ

ноябрь, 2015

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

СЕРТИФИКАТ

вручается

студентке 131 группы

Захаровой

Владиславе Александровне

за выступление с докладом

Применение ограниченности

функции при решении уравнений

Декан математического факультета

И.Н. Власова

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет

Математический факультет

весенняя научная сессия

математический

факультет

ПГГПУ

апрель, 2016

Пермский государственный педагогический университет

Математический факультет

СЕРТИФИКАТ

вручается
студентке 141 группы

Захаровой
Владиславе Александровне

за выступление с докладом
«Применение ограниченности функции при решении уравнений»

на Всероссийской студенческой научно-практической конференции

Декан
математического факультета ПГГПУ И.Н. Власова

Пермь Апрель, 2017 г.

СЕРТИФИКАТ

вручается
студентке 151 группы

Захаровой
Владиславе Александровне

за выступление с докладом
Методические особенности темы
«Применение свойств функций при
решении уравнений и неравенств»
в основной школе

на Всероссийской студенческой научно-практической
конференции

Декан
математического факультета ПГГПУ И.Н. Власова

Пермь Апрель, 2018 г.