Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра мультимедийной дидактики и информационных технологий обучения

Выпускная квалификационная работа

Реализация системы интерактивных моделей по теме «Основы теории вероятности» в среде разработки Unity

Работу выполнил:
студент 843 группы
направления подготовки
09.03.02 Информационные системы и технологии,
профиль «Информационные технологии в образовании»
Левченков Максим Алексеевич

____
(подпись)

«Допущена к защите в ГЭК»
Зав.кафедрой МД и ИТО:

____
(подпись)

«14 » июня 2018 г.

Руководитель:
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры МД и ИТО
Евгений Александрович Еремин

____
(подпись)

ПЕРМЬ

2018

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей - раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними [10]. Теория вероятностей является одним из классических разделов математики. Она имеет длительную историю. Вероятностные и статистические методы в настоящее время глубоко проникли в приложения. Они используются в физике, технике, экономке, биологии и медицине. Особенно возросла их роль в связи с развитием вычислительной техники. Например, для изучения физических явлений раньше производили наблюдения или опыты, но в реалиях современного мира во всех технических областях науки и в некоторых гуманитарных стали появляться моделирующие системы. Они в первую очередь служат для облегчения изучения реального мира, а также снижение материальных затрат. Но их создание очень трудоёмкое и занимает продолжительное время, поскольку они должны соответствовать реальному миру. Их результаты обычно регистрируют в виде значений некоторых наблюдаемых величин; при многократном повторении опытов мы обнаруживаем разброс их результатов. Например, повторяя измерения одной и той же величины одним и тем же прибором при сохранении определенных условий (температура, влажность и т.п.), мы получаем результаты, которые хоть немного, но все же отличаются друг от друга. Даже многократные измерения не дают возможности точно предсказать результат следующего измерения, но со временем мы сможем дать приблизительный ответ исходя из полученной ранее информации, которую можно назвать статистикой. В этом смысле говорят, что результат измерения есть величина случайная, для его моделирования как раз таки и используют вероятность.

Случайности - с ними мы встречаемся повседневно: случайная встреча, случайная поломка, случайная находки, случайная ошибка. Этот ряд можно продолжать бесконечно. Казалось бы, тут нет места для математики. Но и здесь наука обнаружила интересные закономерности, они позволяют человеку уверенно чувствовать себя при встрече со случайными событиями.

Как наука теория вероятности зародилась в 17веке. Возникновение понятия вероятности было связано как с потребностями страхования, получившего значительное распространение в ту эпоху, когда заметно росли торговые связи и морские путешествия, так и в связи с запросами азартных игр. Слово «азарт», под которым обычно понимается сильное увлечение, горячность, является транскрипцией французского слова hazard, буквально означающего «случай», «риск» [5].

Азартными называют те игры, а которых выигрыш зависит главным образом не от умения игрока, а от случайности. Схема азартных игр была очень проста и могла быть подвергнута всестороннему логическому анализу. Первые попытки этого рода связаны с именами известных учёных алгебраистов Джероламо Кардана (1501- 1576) и Галилео Галилея (1564-1642). Однако честь открытия этой теории, которая не только даёт возможность сравнивать случайные величины, но и производить с ними определенные математические операции, принадлежит двум выдающимися ученым Блезу Паскалю (1623-1662) и Пьеру Ферма. Ещё в древности было замечено, что имеются явления, которые обладают особенностью: при малом числе наблюдений над ними не наблюдается никакой правильности, но по мере увеличения числа наблюдений всё яснее проявляется определенная закономерность.

Всё началось с игры в кости [4]. Было замечено, что при многократном бросании однородного кубика, число очков от 1 до 6 выпадают в среднем одинаково часто, иными словами, выражаясь языком математики, выпадение определённого числа очков имеет вероятность, равную 1/6.

Один из представителей французской знати того времени, страстный игрок де Мере написал одному из крупнейших учёных того времени Блезу Паскалю письмо, в котором просил ответить на ряд вопросов, возникших у него в связи с игрой к кости. Эта задача кавалера де Мере заставила Паскаля заняться изучением случайных событий. А в переписке Блеза Паскаля и Пьера Ферма впервые стали упоминаться понятия теории вероятностей [13].

Отсюда не следует, конечно, заключать, что основоположником теории вероятности рассматривали азартные игры как единственный или главный предмет разрабатывавшейся ими новой отрасли науки. На развитие теории вероятностей оказали влияние более серьёзные потребности науки и запросы практики, в первую очередь страховое дело, начатое в некоторых странах ещё в 16веке. Азартные игры были для ученых только удобной моделью для решения задач и анализа понятий теории вероятности. Об этом заметил ещё Гюйгенс в своей книге “О расчётах в азартной игре” (1657), которая была первой книгой в мире по теории вероятностей.

В наши дни теория вероятности применяется в различных областях наук. Она обслуживает внутренние потребности самой математики, статистическую физику, теорию информации, теорию случайных процессов, астрономию, биологию, генетику, и т.д. Её изучают различные ученые, например; В.И. Романовский и Н.В. Смирнов известны своими работами в области математической статистики, Е.Е. Слуцкий - в теории случайных процессов, Б.В. Гнеденко - в области теории массового обслуживания, Е.Б. Дынкин - в области Марковских случайных процессов, В.С. Пугачев - в области случайных процессов в применении к задачам автоматического управления.

Развитие зарубежной теории вероятностей в настоящее время также идет усиленными темпами в связи с настоятельными требованиями практики. Преимущественным вниманием пользуются, как и у нас, вопросы, относящиеся к случайным процессам. Значительные работы в этой области принадлежат Н. Винеру, В. Феллеру, Д. Дубу. Важные работы по теории вероятностей и математической статистике принадлежат Р. Фишеру, Д. Нейману и Г. Крамеру.

Цель работы - разработка образовательных модулей по базовым понятиям теории вероятности.

Достижение поставленной цели предполагает решение следующих**задач**:

- изучение среды разработкиUnity;

- анализактуальности разработки многоуровневых интерактивных заданий по теории вероятности;

- Разработка учебных интерактивных заданий по теории вероятности из курса высшей математики на тему "Комбинаторика", "Формула Бернулли, Пуассона,Байеса", "Теорема Муавра — Лапласа";

Объект исследования–методика преподавания теории вероятности с помощью компьютера.

Предмет исследования – Разработка компьютерного приложения для студентов в среде разработки Unity по теории вероятности;

Гипотеза исследования: модуль будет разработано грамотно, если:

- будет учтена специфика теории вероятности;

- определены специфические особенности данной модели;

- принято во внимание,что в школе уделяют мало времени на теорию вероятности;

Методы исследования:

Теоретические: анализ педагогической и методической литературы, разнообразных задачников и разбор простых задач.

Эмпирические: Разработка компьютерного приложения для студентов в среде разработки Unity.

Работа имеет как теоретическое, так и практическое значение, так как в ней рассмотрена слабая сторона алгебраической школьной программы.

ГЛАВА 1. АНАЛИЗ СОДЕРЖАНИЯ КУРСА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ И НАХОЖДЕНИЕ МАТЕРИАЛА ДЛЯ ИНТЕРАКТИВНОГО ИЗУЧЕНИЯ НА КОМПЬЮТЕРЕ

1.1. Анализ интерактивных моделей по теме «Теория вероятности»

Анализ интерактивных моделей по теме «Теория вероятности» Современные тенденции развития образования отражают появление новых форм и технологий обучения, к числу которых относятся и мультимедийные образовательные технологии [6].

Одним из инновационных направлений в развитии системы образования на сегодняшний день является организация обучения средствами виртуальной образовательной среды. В последние годы, происходит активное развитие виртуальной модели образования. Благодаря дистанционным технологиям увеличивается доступность образования для удалённых учащихся, преподавателей и специалистов. Такие современные средства дополняются компьютерными программами типа мультимедиа, которые замещают печатные тексты, аудио- и видеоролики [там же].

Для эффективной подготовки учащихся необходимо создание качественных программных продуктов, максимально имитирующих реальные объекты, например – физические эксперименты. Существует большое разнообразие различных технологических средств, нацеленных на разработку электронных средств обучения. Среди них различные мультимедийные средства обучения, презентации, интерактивные образовательные web-ресурсы и пр. На образовательном рынке представлено небольшое количество моделей, посвящённых теме «Теория вероятности» Во многом это вязано со сложной технической реализацией моделей, а также со сложностями в разработке «сценария» лабораторных работ. Однако, несмотря на все сложности поиска, удалось найти и выполнить сравнительный анализ нескольких из них, а именно: «Теория вероятностей» «Вычисление вероятности события»

Большинство моделей представлено в Единой коллекции образовательных Ресурсов. Модели являются бесплатными и основаны на учебной программе федеральных учебников.

1. Модуль «Теория вероятностей»

Модуль «Теория вероятностей» предназначен для слабой группы учащихся гуманитарного профиля. Модуль состоит из 6 слайдов, все слайды содержат тщательно подготовленную теорию Изложение теоретического материала логически грамотное и доступное для восприятия учащимися (рис. 1).

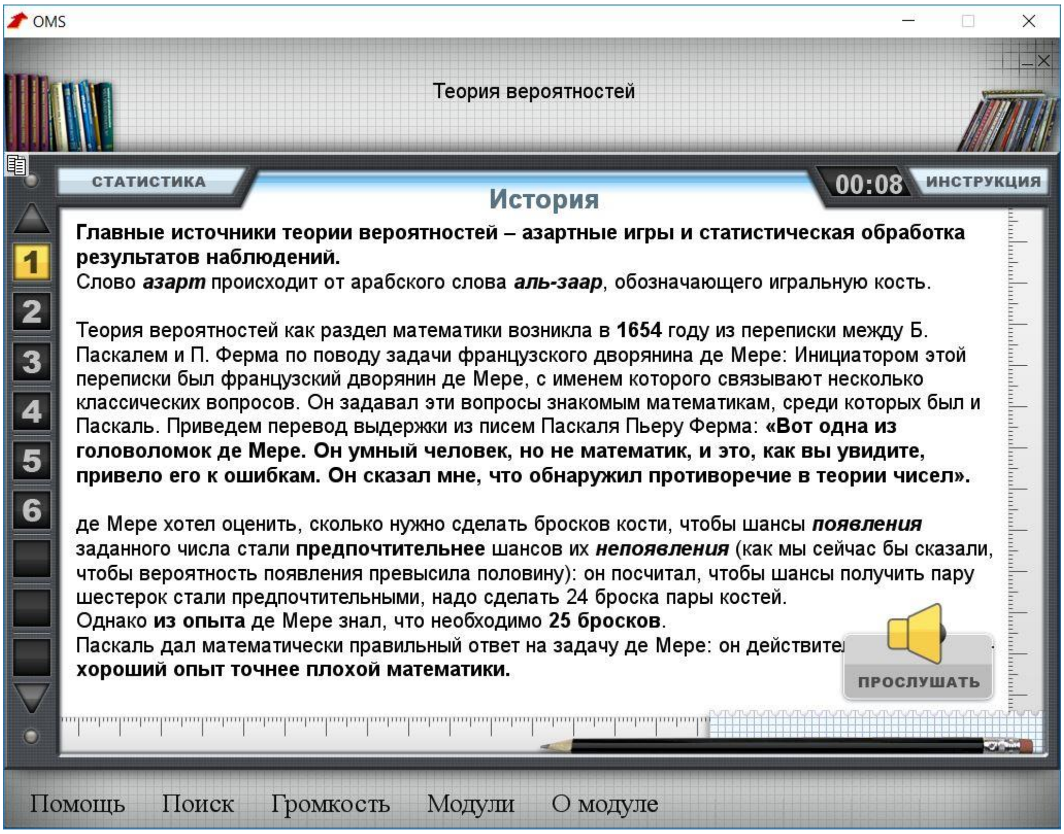

Рис. 1. Учебный модуль «Теория вероятности» [17]

Интерфейс учебного модуля интуитивно понятный и не вызывает дополнительных вопросов в управлении. А приятным бонусом будет полностью озвученный текст слайда.

2.Модуль «Вычисление вероятности события»

Рассматриваемый модуль представляет собой решение простой, но усложняющейся со временем задачи, без каких- либо других блоков (рис. 2).

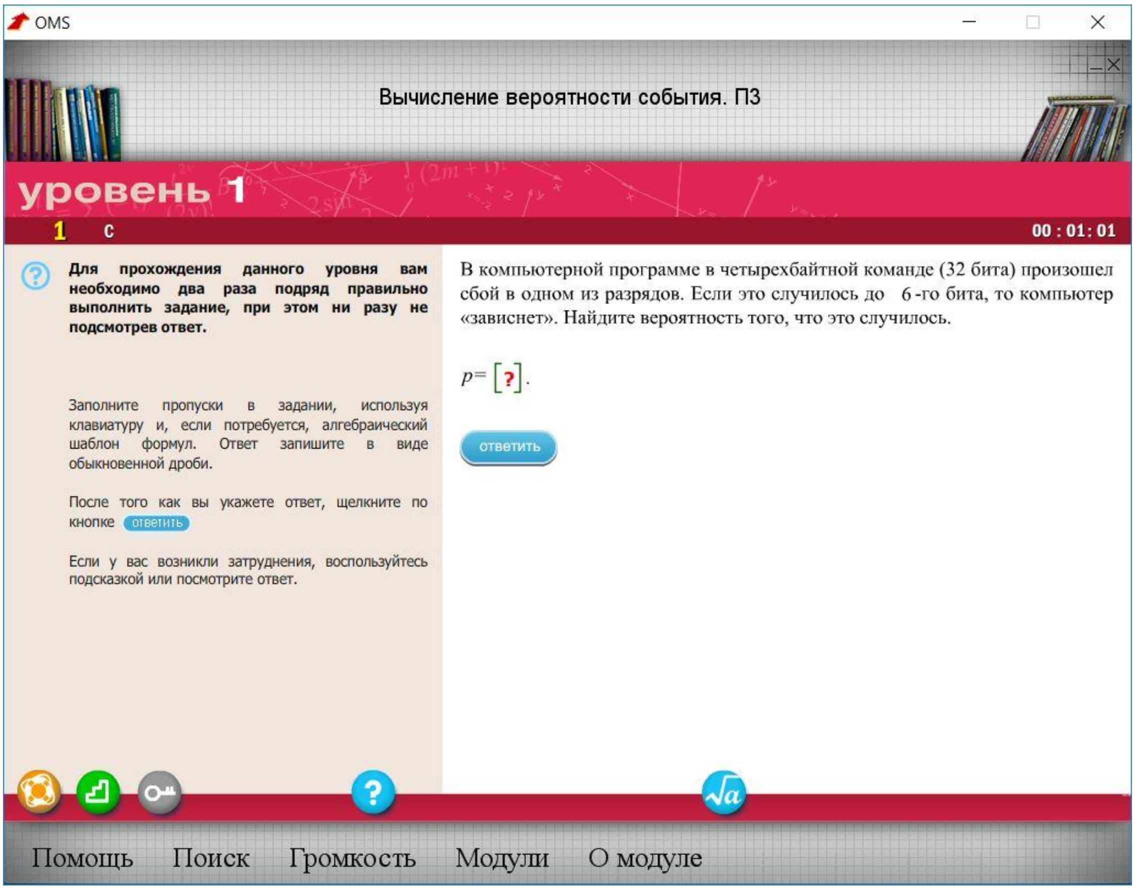

Рис. 2. Учебный модуль «Вычисление вероятности события» [18]

Интерфейс учебного модуля интуитивно понятный и не вызывает дополнительных вопросов в управлении. Также стоит отметить очень приятную и нужную вещь как подсказки, в данной модели они двух уровневые (рис. 3), но если ученик не справляется, то можно посмотреть ответ, однако данная задача не будет засчитана.

Анализ представленных выше модулей позволяет сделать следующие выводы: Количество модулей по теме «Теория вероятности» сильно ограничено, все рассмотренные ресурсы бесплатны и находятся в свободном доступе, а из рассмотренных в свободном доступе модулей нет ни одной интерактивной модели. Основными типами цоров по теории вероятности являются полностью теоретические или же полностью практические (направленные на решение задач) также встречаются их смеси. Цоров другого характера найти не удалось.

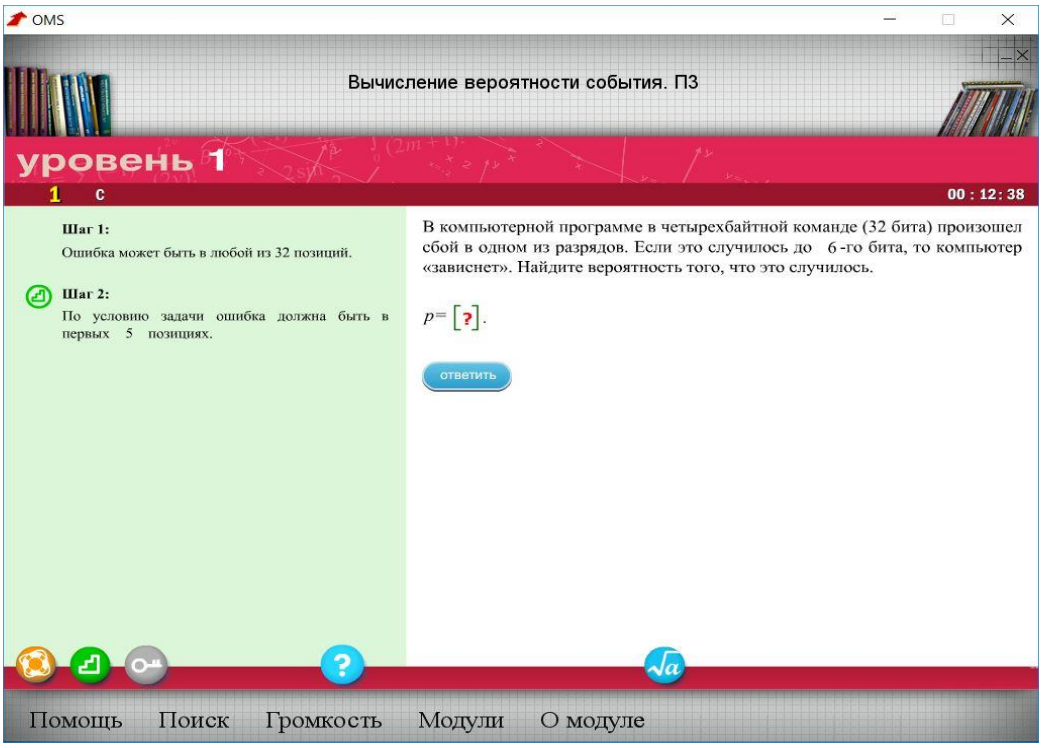

Рис. 3. Учебный модуль «Вычисление вероятности события» [там же]

1.2. Основные понятия и темы, выбранные для учебной темы «Основы теории вероятности»

Теория вероятности возникла как наука из убеждения, что в основе массовых случайных событий лежат закономерности. Теория вероятности изучает данные закономерности.

Например; определить однозначно результат выпадения “орла” или “решки” в результате подбрасывания монеты нельзя, но при многократном подбрасывании выпадает примерно одинаковое число “орлов” и “решек”.

Испытанием называется реализация определенного комплекса условий, который может воспроизводиться неограниченное число раз. При этом комплекс условий включает в себя случайные факторы, реализация которых в каждом испытании приводит к неоднозначности исхода испытания.

Примером может служить уже упоминавшееся ранее испытания - подбрасывания монеты.

Результатом испытания является *событие*. События бывают:

- достоверное (всегда происходит в результате испытания);

- невозможное (никогда не происходит);

- случайное (в результате испытания может произойти или не произойти).

Например: при подбрасывании кубика достоверное событие - кубик упадет, на какую либо грань, невозможное событие - кубик станет на ребро, случайное событие - выпадение какой либо грани.

В результате испытания происходят только элементарные события. Конкретный результат испытания называется элементарным событием. Совокупность всех возможных, различных исходов испытаний называется *пространством элементарных событий* [3].

1.1.1 Элементы комбинаторики

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

Правила суммы и произведения

Правило суммы. Если некоторый объект А может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект В может быть выбран n способами, то выбрать либо А, либо В можно $m+n$ способами.

Правило произведения. Если объект А можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект В можно выбрать n способами, то пара объектов (А,В) в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами [9].

Пример. Наряд студентки состоит из блузки, юбки и туфель. Девушка имеет в своем гардеробе семь блузок, четыре юбки и пять туфель. Сколько нарядов может иметь студентка?

Решение. Пусть сначала студентка выбирает блузку. Этот выбор может быть совершен семью способами, так как студентка имеет семь блузок, затем четырьмя способами произойдет выбор юбки и пятью способами выбор туфель. По принципу умножения получается 7*4*5=140 комбинаций нарядов.

Размещением из n элементов множества X по k элементам назовем любой упорядоченный набор (x_i1,x_i2,...,x_ik) элементов множества X.

Если выбор элементов множества Y из X происходит с возвращением, т.е. каждый элемент множества X может быть выбран несколько раз, то число размещений из n по k находится по формуле n^k (размещения с повторениями).

Если же выбор делается без возвращения, т.е. каждый элемент множества X можно выбирать только один раз, то количество размещений из n по k обозначается A_n^k и определяется равенством

$$A_n^k=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=n!/(n-k)!.$$

(размещения без повторений).

Пример. Пусть даны шесть цифр: 1; 2; 3; 4; 5; 6. Определить сколько трехзначных чисел можно составить, из этих цифр.

Решение. Если цифры не повторяются, то m= A_6^3=6·5·4=120. Если цифры могут повторяться, то количество трехзначных чисел будет m=n^k=6^3=216.

Пример. Студенты института изучают в каждом семестре по десять дисциплин. В расписание занятий включаются по 3 дисциплины каждый день. Сколько диспетчерская может составить различных расписаний?

Решение. Расписание на каждый день может отличаться либо порядком расположения предметов, либо предметами, поэтому имеем размещения: A_{10}^3=10·9·8=720.

Перестановки

Частный случай размещения при n=k называется *перестановкой* из n элементов. Число всех перестановок из n элементов равно A_n^n=A_n=n!.

Сочетания

Сочетаниями из n элементов по k называются подмножества из k элементов, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом. Общее число всех сочетаний из n по k обозначается C_n^k и равно C_n^k=$\frac{A_n^k}{k!}$=n!/(n−k)!·k!=n·(n−1)·…·(n−k+1)k!.

Пример. В группе из 27 студентов нужно выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно это сделать?

Решение. Так как порядок студентов не важен, используем формулу для числа сочетаний:

C_{27}^3=27!/(24!·3!)=(27·26·25)/(1·2·3)=2925.

1.1.2. Классическое определение вероятности

Основным понятием теории вероятностей является понятие случайного события. *Случайным событием* называется событие, которое при осуществлении некоторых условий может произойти или не произойти. Например, попадание в некоторый объект или промах при стрельбе по этому объекту из данного орудия является случайным событием.

Событие называется *достоверным*, если в результате испытания оно обязательно происходит. *Невозможным* называется событие, которое в результате испытания произойти не может.

Случайные события называются *несовместными в данном испытании*, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Случайные события образуют *полную группу*, если при каждом испытании может появиться любое из них и не может появиться какое-либо иное событие, несовместное с ними.

Рассмотрим полную группу равновозможных несовместных случайных событий. Такие события будем называть *исходами*. Исход называется *благоприятствующим* появлению события А, если появление этого события влечет за собой появление события А.

Пример. В урне находится 8 пронумерованных шаров (на каждом шаре поставлено по одной цифре от 1 до 8). Шары с цифрами 1, 2, 3 красные, остальные – черные. Появление шара с цифрой 1 (или цифрой 2 или цифрой 3) есть событие, благоприятствующее появлению красного шара. Появление шара с цифрой 4 (или цифрой 5, 6, 7, 8) есть событие, благоприятствующее появлению черного шара.

Вероятностью события А называют отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу

$$\mathbf{P(A)=m/n}$$

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству $0 \le P(A) \le 1$.

Пример. Из колоды в 36 карт вынимается одна карта. Какова вероятность появления карты червовой масти?

Решение. Количество элементарных исходов (количество карт) n=36. Назовём появление карты червовой масти событием А. Число случаев, благоприятствующих появлению события А, равно 9. Следовательно,

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

1.1.3. Сложение и умножение вероятностей

Событие А называется *частным случаем* события В, если при наступлении А наступает и В. То, что А является частным случаем В, ем$A \subset B$.

События А и В называются *равными,* если каждое из них является частным случаем другого. Равенство событий А и В записываем А = В.

Суммой событий А и В называется событие А + В, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий: А или В.

Теорема о сложении вероятностей. Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Заметим, что сформулированная теорема справедлива для любого числа несовместных событий.

Если случайные события$A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то имеет место равенство.

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

Произведением событий А и В называется событие АВ, которое наступает тогда и только тогда, когда наступают оба события: А и В одновременно.

Случайные события А и В называются совместными, если при данном испытании могут произойти оба эти события.

Теорема о сложении вероятностей№2. Вероятность суммы совместных событий вычисляется по формуле

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$.

События А и В называются *независимыми*, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. Событие А называется *зависимым* от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

Теорема об умножении вероятностей. Вероятность произведения независимых событий А и В вычисляется по формуле:

$$.P(AB) + P(A) \cdot P(B)$$

Вероятность произведения зависимых событий вычисляется по формуле условной вероятности.

Пример. В первом ящике 1 белый и 5 черных шаров, во втором 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой – черный.

Решение:

Обозначим события: А – вынули белый шар из первого ящика.

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$\bar{A}$ - вынули черный шар из первого ящика.

$$P(\bar{A}) = \frac{5}{6}$$

В – белый шар из второго ящика.

$$P(B) = \frac{2}{3}$$

$\bar{B}$ - черный шар из второго ящика.

$$P(\bar{B}) = \frac{1}{3}$$

Нам нужно, чтобы произошло одно из событий $\bar{A}B$ или $A\bar{B}$. По теореме об умножении вероятностей

$$P(A\overline{B}) = \frac{1}{18} \quad P(\overline{A}B) = \frac{10}{18}$$

Тогда искомая вероятность по теореме сложения будет

$$P = P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = \frac{11}{18}$$

Пусть в результате испытания могут появиться n событий, независимых в совокупности, либо некоторые из них (в частности, только одно или ни одного), причем вероятности появления каждого из событий известны. Как найти вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий? Например, если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из этих событий означает наступление либо одного, либо двух, либо трех событий. Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из тий $A_1, A_2, \dots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot \ldots \cdot P\left(\overline{A_n}\right) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$$

Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ имеют одинаковую вероятность p, то формула принимает простой вид:

$$P(A) = 1 - (1 - p)^n = 1 - q^n$$

Пример. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: p1 = 0,8; p2 = 0,7; p3 = 0,9. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие А) при одном залпе из всех орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1 (попадание первого орудия), A_2 (попадание второго орудия) и A_3 (попадание третьего орудия) независимы в совокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2 и A_3 (т. е. вероятности промахов), соответственно равны:

$q_1 = 1 - p_1 = 0,2$, $q_2 = 1 - p_2 = 0,3$, $q_3 = 1 - p_3 = 0,1$

Тогда искомая вероятность

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,994$$

1.1.4. Условная вероятность

Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме условий эксперимента, не налагается, то такую вероятность называют *безусловной*; если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность события называют *условной*. Например, часто вычисляют вероятность события В при дополнительном условии, что произошло событие А.

Условной вероятностью P_A(B)=P(B|A) (два обозначения) называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что первое событие произошло, т.е.

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)=P(A)\cdot P(B|A)$$

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)=P(A)\cdot P(B|A).$$

В частности, отсюда получаем формулы для условной вероятности:

$$P(A|B)=P(AB)P(B)$$

$$P(B|A)=P(AB)P(A).$$

Пример. В трамвайном парке имеются 15 трамваев маршрута №1 и 10 трамваев маршрута №2. Какова вероятность того, что вторым по счету на линию выйдет трамвай маршрута №1?

Решение. Пусть A - событие, состоящее в том, что на линию вышел трамвай маршрута №1, B- маршрута №2.

Рассмотрим все события, которые могут при этом быть (в условиях нашей задачи): AA, AB, BA, BB. Из них нас будут интересовать только первое и третье, когда вторым выйдет трамвай маршрута №1.

Так как все эти события совместны, то:

$$P(AA) = P(A) \cdot P(A \mid A) = \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24};$$

$$P(BA) = P(B)P(A \mid B) = \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24};$$

отсюда искомая вероятность

$$P = P(AA) + P(BA) = \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} + \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24} = 0,6$$

1.1.5. Формула полной вероятности и формула Байеса

Если событие A может произойти только при выполнении одного из событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A) = P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + \dots + P(B_n)P(A \mid B_n).$$

Эта формула называется *формулой полной вероятности* [14].

Вновь рассмотрим полную группу несовместных тий $B_1, B_2, \dots, B_n$, вероятности появления которых

$$P(\, B_1), P(B_2), \dots, P(B_n).$$

Событие A может произойти только вместе с каким-либо из тий $B_1, B_2, \dots, B_n$, которые будем называть гипотезами. Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + \dots + P(B_n)P(A \mid B_n)$$

Если событие A произошло, то это может изменить вероятности

гипотез $P(\, B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$

По теореме умножения вероятностей

$$P(AB_1) = P(B_1)P(A|B_1) = P(A)P(B|A),$$

откуда

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}.$$

Аналогично, для остальных гипотез

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)},\ i = 1,\dots,n.$$

Полученная формула называется формулой Байеса (формулой Бейеса). Вероятности гипотез$P(B_i|A)$ $P(B_i|A)$ называются *апостериорными* вероятностями, тогда как $P(B_i)$ - *априорными* вероятностями [13].

Пример. На трех станках-автоматах обрабатываются однотипные детали, поступающие после обработки на общий конвейер. Первый станок дает 2% брака, второй – 7%, третий – 10%. Производительность первого станка в 3 раза больше производительности второго, а третьего – в 2 раза меньше, чем второго[14].

а) Каков процент брака на конвейере?

б) Каковы доли деталей каждого станка среди бракованных деталей на конвейере?

Решение. Возьмем с конвейера наудачу одну деталь и рассмотрим событие А – деталь бракованная. Оно связано с гипотезами относительно того, где была обработана эта деталь: H_k – взятая наудачу деталь обработана на К-ом станке[13].

Условные вероятности (в условии задачи они даны в форме процентов):

$$P(A|H_1) = 0,02,\ P(A|H_2) = 0,07,\ P(A|H_3) = 0,1.$$

Зависимости между производительностями станков означают следующее:

$$P(H_1)=3P(H_2),\ P(H_3)=0,5P(H_2)$$

А так как гипотезы образуют полную группу, то

$$P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=1$$

Решив полученную систему уравнений, найдем:

$$P(H_1)=6/9,\ P(H_2)=2/9,\ P(H_3)=1/9$$

а) Полная вероятность того, что взятая наудачу с конвейера деталь – бракованная:

$$P(A)=\sum P(A|H_i)P(H_i)=\frac{6}{9}0,02+\frac{2}{9}0,07+\frac{1}{9}0,1=0,04$$

Другими словами, в массе деталей, сходящих с конвейера, брак составляет 4%.

б) Пусть известно, что взятая наудачу деталь – бракованная. Пользуясь формулой Байеса, найдем условные вероятности гипотез:

$$P(H_1|A)=\frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)}=\frac{6/9\cdot 0,02}{0,04}=0,33$$

$$P(H_2|A)=\frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)}=\frac{2/9\cdot 0,07}{0,04}=0,39$$

$$P(H_3|A)=\frac{P(A|H_3)P(H_3)}{P(A)}=\frac{1/9\cdot 0,1}{0,04}=0,28$$

Таким образом, в общей массе бракованных деталей на конвейере доля первого станка составляет 33%, второго – 39%, третьего – 28%.

1.1.6. Независимые испытания. Формула Бернулли

При решении вероятностных задач часто приходится сталкиваться с ситуациями, в которых одно и тоже испытание повторяется многократно и исход каждого испытания независим от исходов других. Такой эксперимент еще называется *схемой повторных независимых испытаний* или схемой Бернулли[16].

Примеры повторных испытаний:

1) многократное извлечение из мешка одного шара при условии, что вынутый шар после регистрации его цвета кладется обратно в мешок и перемешивается;

2) повторение одним стрелком выстрелов по одной и той же мишени при условии, что вероятность удачного попадания при каждом выстреле не меняется (пристрелка игнорируется).

Итак, пусть в результате испытания возможны два исхода: либо появится событие А, либо противоположное ему событие. Проведем n испытаний Бернулли. Это означает, что все n испытаний независимы; вероятность появления события А в каждом отдельно взятом или единичном испытании постоянна и от испытания к испытанию не изменяется (т.е. испытания проводятся в одинаковых условиях). Обозначим вероятность появления события А в единичном испытании буквой р, т.е. $p=P(A)$, а вероятность противоположного события (событие А не наступило) - буквой $q=P(\overline{A})=1-p$.

Тогда вероятность того, что событие А появится в этих n испытаниях ровно k раз, выражается формулой Бернулли

$$P_n(k) = C_N^K \times p^k \times q^{n-k}, q = 1 - p$$

Распределение числа успехов (появлений события) носит название биномиального распределения.

Пример. В урне 20 чёрных и 10 белых шаров. Вынули 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Найти вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется 2 чёрных.

Решение. Событие А – достали чёрный шар. Тогда вероятности. $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(\overline{A})=\frac{1}{3}$.

По формуле Бернулли требуемая вероятность равна

$$P_4(2)=C_4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}.$$

1.1.7. Наивероятнейшее число успехов

Биномиальное распределение (распределение по схеме Бернулли) позволяет, в частности, установить, какое число появлений события А наиболее вероятно. Формула для наиболее вероятного числа успехов k (появлений события) имеет вид: $np-q\leq k\leq np+p, q=1-p$[15].

Так как $np-q=np+p-1$, то эти границы отличаются на 1. Поэтому k, являющееся целым числом, может принимать либо одно значение, когда np целое число ($k=np$) , то есть когда $np+p$ (а отсюда и $np-q$) нецелое число, либо два значения, когда $np-q$ целое число[там же].

Пример. Данные проверки качества выпускаемых стандартных деталей показали, что брак в среднем составляет 7,5%. Определить наиболее вероятное число вполне исправных деталей в партии из 39 штук.

Решение. Обозначая вероятность выпуска исправной детали через p, будем иметь $q=1-p=0,075$ и $p=1-q=0,925$ (получение бракованной детали и получение исправной детали — события противоположные). Так как здесь n=39, то искомое число можно найти из неравенств:

$$39\cdot 0,925-0,075\leq k\leq 39\cdot 0,925+0,925,$$
$$36\leq k\leq 37.$$

Отсюда наивероятнейшее число исправных деталей равно 36 или 37.

1.1.8. Формула Пуассона

При большом числе испытаний n и малой вероятности p формулой Бернулли пользоваться неудобно, например, $0{,}97^{999}$ вычислить трудно. В этом случае для вычисления вероятности того, что в n испытаниях (n – велико) событие произойдет k раз, используют формулу Пуассона:

среднее число появлений события в n испытаниях.

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ \lambda = np$$

Эта формула дает удовлетворительное приближение для $p \le 0{,}1$ и $np \le 10$. При больших np рекомендуется применять формулы Лапласа (Муавра-Лапласа). События, для которых применима формула Пуассона, называют *редкими*, так как вероятность их осуществления очень мала (обычно порядка 0,001-0,0001).

Пример. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течении времени Т равна 0,002. Найти вероятность того, что за время Т откажут ровно три элемента.

Решение.

По условию дано:

$$n = 1000, \ p = 0{,}002, \lambda = np = 2, k = 3$$

Искомая вероятность

$$P_{1000}(3) = \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = \frac{2^3}{3!} e^{-2} = \frac{8}{6} e^{-2} \approx 0{,}18.$$

1.1.9. Теоремы Муавра-Лапласа

Пусть в каждом из n независимых испытаний событие А может произойти с вероятностью p . Обозначим как и раньше, через $P_n(k)$ вероятность ровно k появлений события А в n испытаниях. кроме того, пусть $P_n(k_1; k_2)$ – вероятность того, что число появлений события А находится между k_1 и k_2.

Локальная теорема Лапласа.

Если n – велико, а p – отлично от 0 и 1, то

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

- функция Гаусса (функция табулирована)

Функции Гаусса и Лапласа обладают свойствами, которые необходимо знать при использовании таблиц значений этих функций[4]:

а) $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$

б) при больших *x* верно $\varphi(x) \approx 0,\ \Phi(x) \approx 0,5$.

Теоремы Лапласа дают удовлетворительное приближение при $npq \geq 9$. При чем ближе значения q, p к 0,5, тем точнее данные формулы. При больших или малых значениях вероятности (близких к 0 или 1) формула дает серьёзную погрешность погрешность (по сравнению с исходной формулой Бернулли) [19].

ГЛАВА 2. СРЕДА UNITY КАК ИНСТРУМЕНТ РАЗРАБОТКИ ИНТЕРАКТИВНЫХ УЧЕБНЫХ ЗАДАНИЙ

2.1. Направления использования среды разработки Unity

Unity — межплатформенная среда, изначально предназначенная для разработки компьютерных игр[1]. Unity позволяет создавать приложения, работающие под более чем 20 различными операционными системами, включающими персональные компьютеры, игровые консоли, мобильные устройства и другие [2].

Первая версия Unity появилась в 2005 году, когда игровой движок был анонсирован на Worldwide Developers Conference. Изначально Unity предназначался исключительно для компьютеров Mac, а в августе вышло обновление, позволяющее работать под Windows. В следующих версиях постепенно добавлялись новые платформы и развёртывания: межплатформенный веб-плеер в 2006-м, iPhone в 2008-м, Android в 2010-м, и далее на игровых консолях Xbox и Playstation [2]. Кроме того есть возможность создавать приложения для запуска в браузерах с помощью специального подключаемого модуля Unity (Unity Web Player), а также с помощью реализации технологии WebGL. Ранее была экспериментальная поддержка реализации проектов в рамках модуля Adobe Flash Player [8], но позже команда разработчиков Unity приняла сложное решение по отказу [9] от этого.

В декабре 2009 года Gamasutra (веб-сайт, посвящённый разработке компьютерных игр). Назвал Unity одним из самых значительных участников на рынке игровых компаний. На Unity написаны тысячи игр, приложений и симуляций, которые охватывают множество платформ и жанров. При этом Unity используется как крупными разработчиками, так независимыми студиями.

На Unity написаны сотни игр, приложений и симуляций [5], Unity используется как крупными разработчиками (например, Blizzard [20] Hearthstone), так в создании инди-игр (созданы одним человеком или маленькой группой), но её возможности достаточны для создания программного обеспечения другого назначения. Компьютерные игры на Unity охватывают множество платформ и жанров, характерными примерами которых являются [7]:

GunsofIcarusOnline, GoneHome — шутер от первого лица и квест от первого лица, созданные независимыми студиями — для персональных компьютеров;

DeadTrigger, BadPiggies, TyrantUnleashed — шутер от первого лица, головоломка и коллекционная карточная игра — для мобильных устройств;

AssaultAndroidCactus, TheGolfClub. — аркадный шутер и спортивный симулятор — для игровых консолей.

Помимо бесплатной, существуют четыре сборки — стандартная Unity, UnityiOSPro (для разработки игр под iOS), AndroidProи командная лицензия[11]. Они отличаются стоимостью и функциональностью.

Бесплатная версия имеет некоторые ограничения, однако возможность распространять своё программное обеспечение имеется, при условии, что ежегодный доход не превышает 100 000$ [12]. С выходом Unity 5 многие ограничения Free версии были убраны.

Сравнение с конкурирующими продуктами.

Конкурентов у программы немного, и среди них можно выделить UDK и CryENGIN. Эти представителя достойны внимания, но каждый из них имеет уникальные стороны. UDK получает преимущество из-за использования в нём уникального языка программирования. В некоторых случаях это улучшает работу со скриптами.

CryENGINE больше рассчитан на платформы нового поколения, что обеспечит невероятную графику. Однако такая адаптация не позволяет ему быть универсальным.

Unity позволяет разрабатывать достойные продукты под любые платформы. Все эти среды разработки имеют свои сильные стороны, и выбрать лучший экземпляр невозможно. Однако именно Unity стремительно развивается, и у него есть все шансы в будущем занять первое место среди конкурентов.

Если планируется создание масштабного проекта, то лучше всего использовать собственную среду разработки. Для всех остальных случаев игровой движок Unity прекрасно подойдёт. Вряд ли он поможет с реализацией большого проекта, над которым работают десятки людей. Но вероятность того, что такая команда будет использовать общедоступную среду разработки, крайне мала.

Unity был создан для проектов среднего и малого масштаба. Для одного или пары разработчиков он предоставит широкие возможности и поможет реализовать любую идею.

Среди всех платформ сегодня крайне привлекательной является веб-среда, и покорить её можно без особых проблем. Широкие возможности, удобные инструменты, гибкая настройка рабочего пространства и все остальные особенности воплотят в жизнь любые идеи! Unity покажет высокую скорость разработки и максимальное удобство.

Неигровое применение Unity3D

1. Архитектурные визуализации, моделирование интерьеров

На Unity 3D реализовано уже два крупных проекта известных в России (Планоплан (рис. 4), Planner 5D (рис. 5)).Есть еще интересный проект в Беларуси (Beladeco — на Unity), еще десяток проектов можно насчитать в Европе и США. В основном это публичные проекты, доступные через интернет, делятся они на два подвида:

Рис. 4. онлайн-планировщик квартир Планоплан

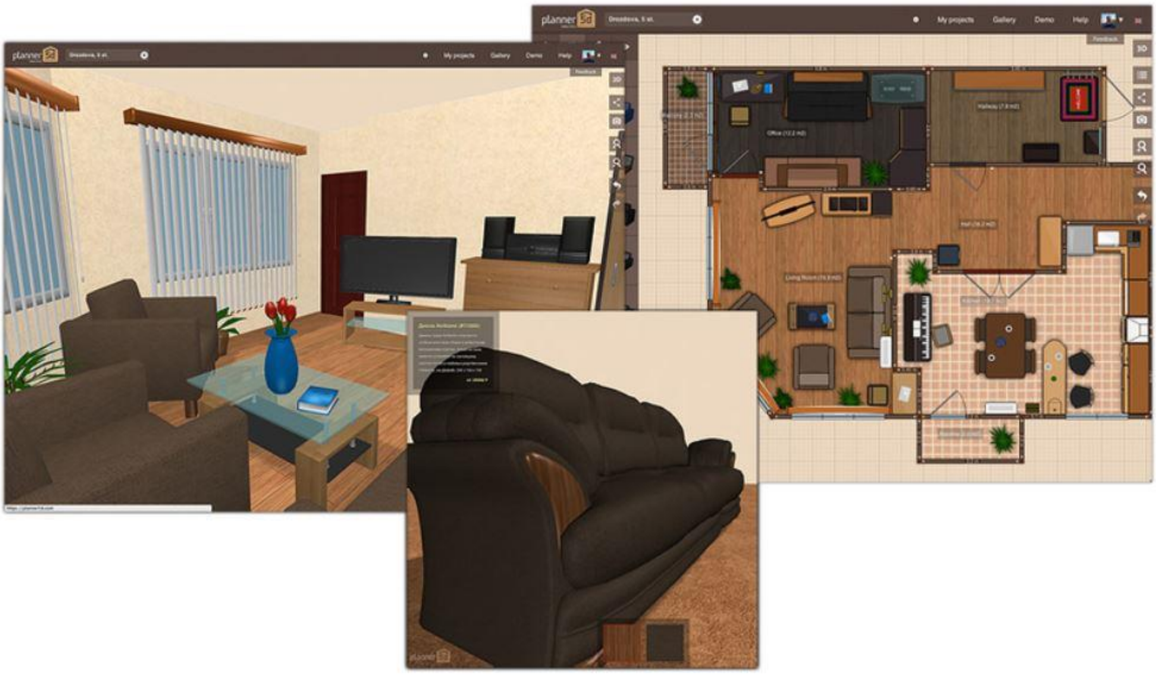

Рис. 5. онлайн-планировщик квартир Planner 5D

1.1. Конструкторы интерьеров

Это относительно простые конструкторы трехмерной модели интерьеров. Надо всего-то а) план помещения (пол-потолок-стены-углы-двери-окна) б) отделка (нанести декоративные материалы на все получившиеся в результате планировки поверхности) в) обстановка (мебель, техника, аксессуары — объемные предметы). Такие конструкторы могут быть с абстрактным наполнением декоративных материалов и объемных предметов — тогда это мало чем отличается от компьютерной игры.

1.2. Демонстрация интерьеров в строящихся объектах

Подобные продукты (а именно на них ссылается видеоролик Unity) разработаны в основном в США и Канаде. Дело в том, что самостоятельно придумывать интерьер или ремонт в Северной Америке не принято — у них хватает архитекторов и дизайнеров в избытке, и работают они на совесть. Типовые варианты отделки максимально продуманы, просчитаны и оптимизированы по цене за счет централизации закупок и проработке технологий инсталляции (в результате этого любая самостоятельность обходится новосёлу геморроем, потерей времени и денег). Типовых вариантов достаточно — обычно 5-6, +- на любой вкус и кошелёк (исходя из стоимости и целевой аудитории самого помещения).

2. Конфигураторы и аниматоры продуктов

Еще одна особенность из темы «TryBeforeYouBuy», применима, кстати, и к интерьерным товарам (особенно мебели) и входит в состав некоторых продуктов предыдущего семейства.

“Фишки” Unity тут применимы во всей красе — крути продукт (3D-модель) как хочешь, приближай, удаляй, свет разный включай, одевай поверхности в разные материалы (кожа, ткань, дерево в салоне автомобиля, например). Когда вариантов отделки элементов много — есть задача совместимости (может быть заранее проработана, то есть предлагаются совместимые комплексы отделки).

К конфигуратору может быть пристроено комплектование (что часто объединяется) — подобрать к умывальнику смеситель.

Система анимации тоже то, что нужно покупателю — как трансформируется салон авто, или как раскладывается диван — имея 3D-модель.

Эти “фишки” в итоге способствуют если не покупке, то предварительному выбору продуктов в Интернете.

3. Тренинг-симуляторы

Обновление технологического оборудования, спецтехники, медицинской/лабораторной техники и пр. потребует предварительной теоретической и практической профессиональной переподготовки персонала — технологов, диспетчеров, операторов, сервисных инженеров и пр… Обычно приходится для этого отправлять людей на курсы к производителю оборудования, потом закупать и создавать учебные образцы — всё это необходимо, но долго и дорого для заказчика. К тому же всегда есть риски и стрессы от внедрения новшеств — будет ли оно работать, легко ли его испортить и т.п.

Разработка симулятора может быть очень разумным решением: а) потребитель сможет уменьшить стресс внедрения новшеств, освоившись с новой техникой сначала в виртуальной среде б) на симуляторе можно отобрать самых способных, которых потом отправить на дальнейшее дорогое обучение. Симулятор может быть адаптирован к условиям и особенностям каждого технологического процесса, что с реальными учебными образцами не всегда достижимо.

Работа может быть связана с опасностью и тренинги, соответственно, тоже. Например, устранение нештатных и чрезвычайных ситуаций, аварий, профилактика мер безопасности. Симулятор в данном случае может быть реалистичнее реальной учебной модели, поскольку создание некоторых обстоятельств в реальности невозможно в принципе, либо нерационально дорого, либо подвергает чрезмерному риску обучаемых и окружающую среду.

4. Образование

Если дополнить скучные учебники с невыразительными иллюстрациями живыми интерактивными трехмерными моделями то и намного больше учеников и студентов пойдут на свои уроки с энтузиазмом — не у всех хорошо развито пространственное воображение, проблемы с учебой часто на этой почве. А многие книги могли бы обрести вторую жизнь и распространиться далеко за пределы скучных академических аудиторий.

5. Визуализация бизнес-данных

Никого уже не удивишь технологией drill-down "Углубление в данные". (Кощей Бессмертный смерть на конце иголки, иголка в яйце, яйцо в утке, утка в зайце, заяц в сундуке, и т.д.).

Но вот представьте себе Drill-Down управленческого баланса до уровня трехмерных моделей - кликнул на строку собственность, появился сначала список с цифрами, потом кликнул на «фрезерный станок» появилась модель станка, где можно включить-выключить, посмотреть, как работает, оценить степень износа (рендеринг может состаривать текстуры поверхностей в зависимости от показанной в отчете степени амортизации)

2.2. Анализ возможностей среды разработки Unity в создании учебных интерактивных заданий

Unity — это мульти платформенный инструмент для разработки двух- и трёхмерных приложений и игр, работающий под операционными системами Windows и OS X. Созданные с помощью Unity приложения работают под операционными системами Windows, OS X, Android, AppleiOS, Linux, а также на игровых приставках Wii, PlayStation 3 и Xbox 360. Есть возможность создавать интернет-приложения с помощью специального подключаемого модуля к браузеру Unity, а также с помощью экспериментальной реализации в рамках модуля AdobeFlashPlayer. Позже от поддержки Flash отказались. Приложения, созданные с помощью Unity, поддерживают DirectX и OpenGL. [12]

Unity характеризуется следующими возможностями:

- сценарии на C#, JavaScript (модификация) и Boo;
- движок полностью увязан со средой разработки. Это позволяет прямо в редакторе испытывать программный продукт;
- работа с ресурсами возможна через Drag&Drop.
- интерфейс редактора настраиваемый;
- осуществлена система наследования объектов;
- поддержка импорта из очень большого количества форматов;

– встроенная поддержка сети;
– есть решение для совместной разработки — AssetServer;
– также можно использовать подходящий пользователю способ контроля версий. К примеру, Tortoise SVN или SourceGear;
– полностью настраиваемый и доступный большинству людей интерфейс;
– кроссплатформенность;
– гибкость и расширяемость;
– гибкая ценовая политика;
– AssetsStore, так называемый магазин компонентов.

Основной концепцией Unity3d является использование в сцене легко управляемых объектов(GameObject) – это фундаментальный строительный блок в Unity. Это контейнер для разных частей функциональности, называемых Компонентами. Компоненты это строительные блоки GameObjects. Без них GameObject не мог бы сделать ничего интересного.

Компонент может представлять видимые объекты, такие, как меши, материалы, данные о ландшафте или систему частиц. Другие типы компонентов более абстрактны, например Камеры или Источники Освещения, которые не имеют представления физической модели вовсе.

Ресурсы (Assets) проекта – это строительные/составные блоки всех проектов Unity, в качестве которых могут быть использованы файлы изображений (текстур), 3D-моделей, звуковые файлы, которые будут использоваться при создании в качестве ресурсов. Поэтому в любой папке проекта Unity всегда существует подкаталог с именем Assets, где хранятся все файлы ресурсов.

Шаблон (Prefab) – это Ресурс (Asset), который был определен, как эталонный. Для Unity это все равно, что шаблонный документ для текстового редактора. Когда вы размещаете Шаблон в вашей Сцене, на панели HierarchyUnity размещает лишь ссылку на Шаблон, но не полную копию.

Если вы щелкните на Шаблон и отрегулируете его настройки, вы обнаружите, что все эти изменения немедленно отразились на всех клонах этого Шаблона в вашей Сцене. Это делает Шаблоны идеальными для многократного использования элементов

Для обеспечения интерактивности различных 3D-приложений в Unity3d используются скрипты, которые также рассматриваются средой как компоненты. Помимо JavaScript, Unity3d также предоставляет возможность использовать для написания скриптов языка C#. Для написания скриптов можно воспользоваться встроенным редактором Unity3d MonoDevelop.

Оба языка используют в качестве синтаксической основы язык программирования С.

Всё это приводит к тому, что программы на JavaScript и C# внешне на первый взгляд выглядят чрезвычайно похоже на С-программы. В обоих языках сделаны однотипные расширения и дополнения по отношению к С (или С++), в частности, расширен алфавит и введён собственный синтаксис, поддерживающий пакеты, импорт описаний, определение единиц компиляции.

JavaScript старше, чем C# и построен на большой и активной пользовательской базе. JavaScript доминирует в курсах программирования американских университетов и колледжей, и литературы по JavaScript сегодня намного больше, чем по C#.

C#, в свою очередь, развивается быстрее, гораздо слабее ограничивая себя в добавлении новых проблемно-ориентированных возможностей. Особенно эта тенденция проявилась в версии C# 3.0, в которой, например, появились SQL-подобные запросы. Новые возможности при этом строятся так, чтобы язык оставался языком общего назначения.

Unity имеет множество достоинств, которые превращают его в замечательный инструмент для разработки приложений, но он также не лишен недостатков. В частности, сочетание визуального редактора со сложным кодом, несмотря на его эффективность в рамках компонентной системы Unity, является нетипичным и может вызвать затруднения. В сложных сценах можно потерять из виду некоторые из присоединенных компонентов. В Unity присутствует функция поиска, которая позволяет обнаруживать присоединенные сценарии, но она не является достаточно надежной – иногда возникают ситуации, когда для поиска связанных сценариев приходится вручную просматривать все элементы сцены. Такое происходит не так часто, однако этой кропотливой и трудоемкой работы хотелось бы вообще избежать.

Еще одним неожиданным и обескураживающим для опытных программистов недостатком является тот факт, что Unity не поддерживает ссылки на внешние библиотеки кода. Все доступные библиотеки, которые планируется использовать, необходимо вручную скопировать в проект, вместо того чтобы просто дать ссылку на одну папку общего доступа. Отсутствие единой папки с библиотеками затрудняет совместное использование функционала разными проектами. Это неудобство можно обойти, рационально применяя системы контроля версий, но готовое решение данной проблемы в Unity отсутствует.

Третий недостаток связан с использованием шаблонов экземпляров (prefabs). Шаблоны экземпляров предоставляют гибкий подход к визуальному созданию интерактивных объектов. Эта крайне мощная концепция существует исключительно в Unity (и, естественно, она связана с компонентной системой Unity), но редактирование таких шаблонов иногда оказывается на удивление труднореализуемым.

Таким образом, Unity является очень хорошим конструктором программ небольшого размера и малой сложности благодаря универсальности, низкого порога освоения и многому другому.

ГЛАВА 3. РАЗРАБОТКА УЧЕБНЫХ ИНТЕРАКТИВНЫХ МОДЕЛЕЙ ПО ТЕМЕ «ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ» (НА МЕТЕРИАЛЕ КУРСА МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ)

3.1. Общая структура учебных модулей

В соответствии с целями выпускной квалификационной работы в главе 1 параграф 2 была проведена выборка материала по теории вероятности, который будет включён в электронный ресурс. Этот материал был разбит на несколько модулей, которые были объединены в один программный продукт с общим меню для удобства его использования (рис. 6).

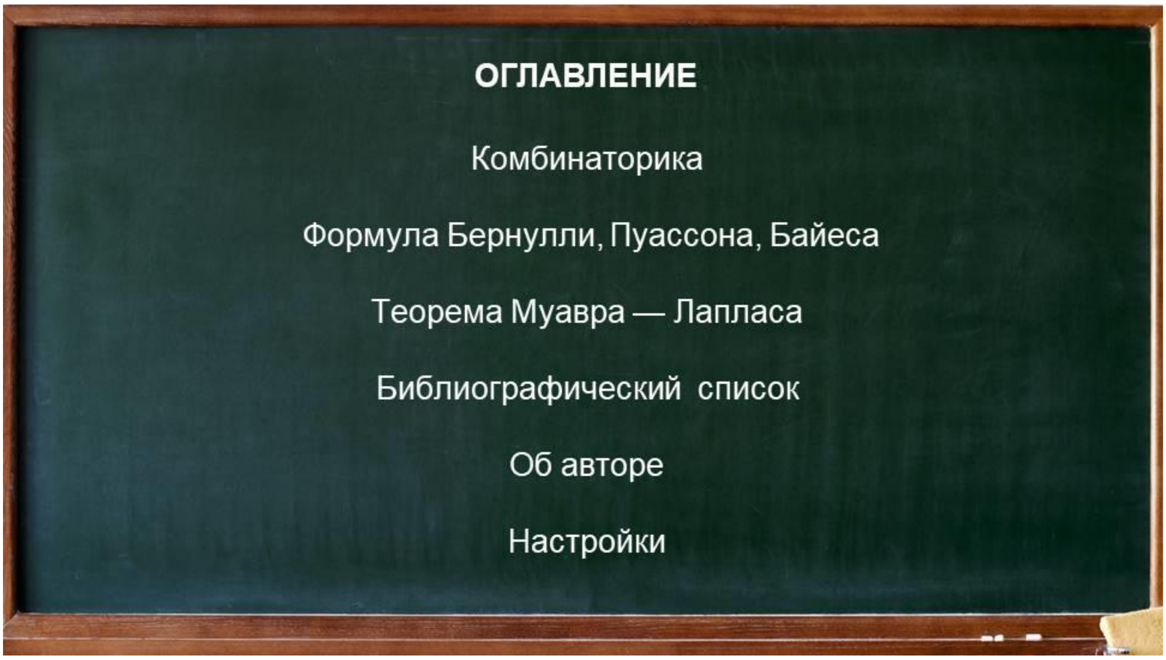

Рис. 6.Главное меню модуля

Три главных пункта основного меню ("Комбинаторика", "Формула Бернулли, Пуассона, Байеса", "теорема Муавра — Лапласа") имеют схожую структуру. Поэтому модули разбиты на маленькие темы, о которых было подробнее рассказано в параграфе 1.2 втором параграфе первой главы. Каждая подобная тема содержит в себе теоретический материал, а также задачи (рис. 7).

Теоретический материал содержит в себе теорию, отобранную для учащегося из различных учебников, в неё входят формулы и определения понятий и терминов входящих в эту тему. Как и в учебнике, изложение теории начинается с небольших определений. Постепенно набирая темп, сложность излагаемого материала возрастает.

Задачи включают в себя решение нескольких типовых задач данной темы. Некоторые модули содержат в себе компьютерные модели.

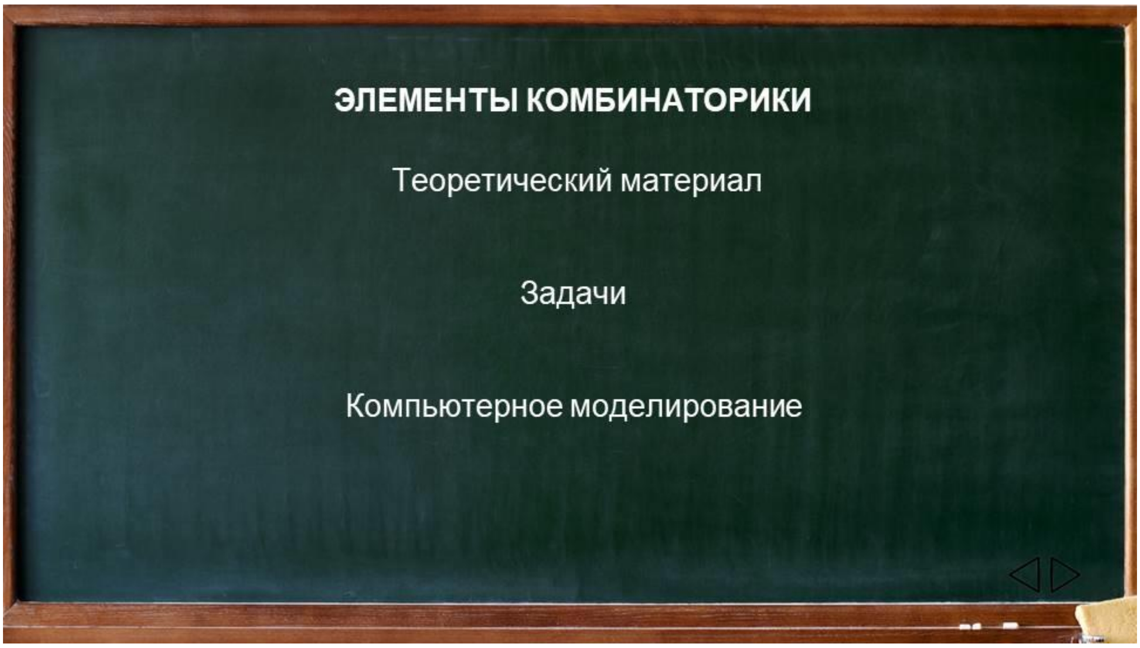

Рис. 7.Подменю модуля Элементы комбинаторики

3.2. Учебный модуль «Комбинаторика»

Учебный модуль комбинаторика состоит из следующих частей (рис. 8).

- элементы комбинаторики;
- классическое определение вероятности;
- сложение и умножение вероятностей;
- условная вероятность.

Рассмотрим подробнее блок “элементы комбинаторики”. Данная тема содержит в себе теоретическую часть, задачи и компьютерное моделирование подбрасывания монеты. Блок теории позволяет ознакомиться с основными понятиями и определениями, которые могут потребоваться. Важно отметить, что в данном разделе все теоретические сведения изложены ёмко и кратко. После прочтения теории, учащийся приобретает необходимые теоретические знания (рис. 9).

Рис. 8.Подменю модуля комбинаторика

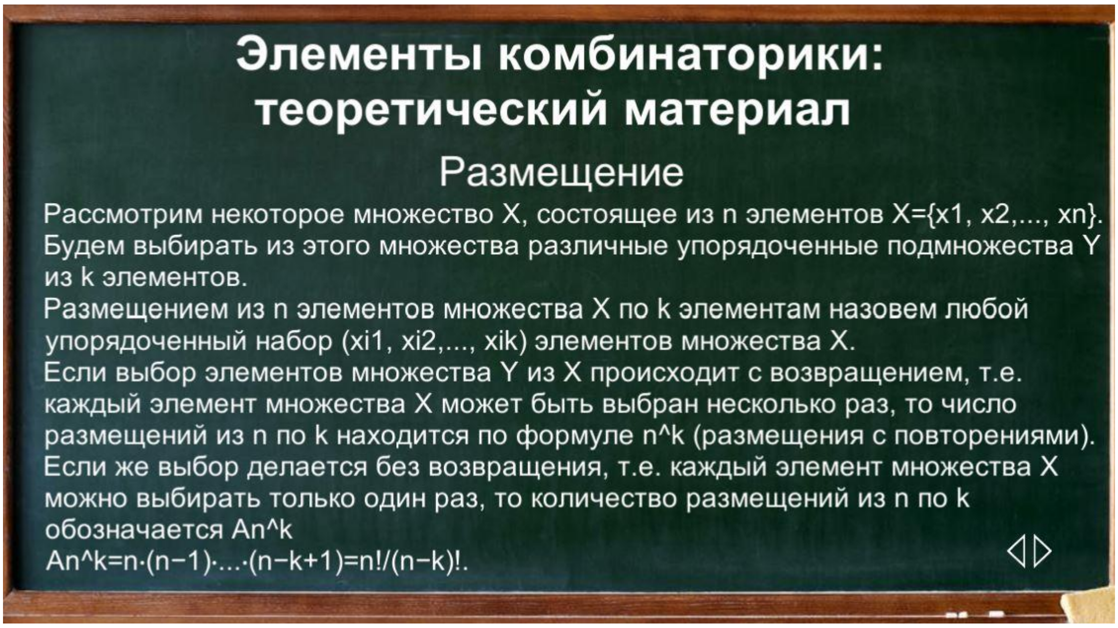

Рис. 9. Теоретический материал модуля комбинаторика

Блок задачи позволяет ознакомиться с наглядным решением типовых задач и попробовать самому их решить. Блок компьютерное моделирование позволяет ознакомиться с действием теории вероятности в реальной жизни, он являться наиболее интересным, поскольку не содержит в себе теории. Ученик может самостоятельно поменять входные параметры и наблюдать изменения рисуемых графиков и следить за выходными значениями (рис. 10).

Рис. 10. Модель подбрасывания монетки

Рассмотрим программные решения реализации модуля в виртуальной среде, отвечающие за его интерактивность. Чтобы не представлять полный листинг столь объёмного проекта, разобьём его на небольшие фрагменты, и прокомментируем каждый из них.

Отображение графиков. Начало работы в модели начинается с в вода значений в специальные поля. Они отвечают за количество экспериментов и их продолжительность. При нажатии на кнопку сброс происходит отчистка графиков и значений в полях, при нажатии на кнопку старт происходит построение графиков и высчитывание выходных данных. Важно сказать, что если данные не были в ведены, модель использует стандартные данные, количество экспериментов равно 10 используется переменная *koll*, а подбрасывания монетки 100используется переменная *kollbros*.

```
if (peremennazglobal.Instance.prov<= koll)
        {
treker = GetComponent<LineRenderer>();
treker.enabled = true;
Vector3[] positions = newVector3[i];

//Данный код  обеспечивает создание компонента отвечающего за  рисование
//линии графика LineRenderer.

for (int g = 0; g <kollbros; g++) { ma[g] = Random.Range(0, 100);
if (ma[g] < 50) { a++; }
else { b++; };
posx = posx + (0.1f*(100.0f/kollbros));
         posy = ((a / j) * 6.0f)-3;
         positions[g] = newVector3(posx, posy, 0);
         }
         treker.positionCount = positions.Length;
treker.SetPositions(positions);

//заполняет массив графика точками и их координатами для визуализации.
```

Цикл с функцией рандома для имитации подбрасывания монетки и подсчёта шанса выпадения. Переменная *a* отвечает за подсчёт количества выпадений орла,*b* соответственно решки. Переменные *posx* и *posy* отвечают за положение следующей точки графика, переменная *g* является номером точки.

Данный скрип является крайне маленьким благодаря Unity поскольку движок позволяет данный скрипт поместить на неотображаемый объект. Более того данный объект отсутвует на сцене, но после нажатия кнопки старт вызывается программное его создание одной строчкой кода, столько раз сколько захотел пользователь. И уже далее идёт рисование графика шанса выпадения одной из стороны монеты. То есть у нас создаться N объектов, которые самостоятельно не зависимо друг от друга рисую график.

Далее происходит передача результирующего результата в глобальную переменную. После передачи всех данных в глобальную переменную идёт расчёт полученного результата. Создаётся текстовое поле, в которое записывается результат полученного моделирования. Высчитываются проценты и среднее количество выпадений одной из стороны монеты.

3.3. Учебный модуль «Формула Бернулли, Пуассона, Байеса»

Учебный модуль Формула Бернулли, Пуассона, Байеса состоит из следующих частей (рис. 11).

- Формула Бернулли;
- Формула Пуассона;
- Формула Байеса.

Рис. 11. Подменю модуля Формула Бернулли, Пуассона, Байеса

Рассмотрим подробнее под блок “Формула Бернулли”. Данная тема содержит в себе теоретическую часть, а также задачи. Блок теории позволяет ознакомиться с основными понятиями и определениями, которые могут потребоваться. Важно отметить, что в данном разделе все теоретические сведения изложены ёмко и кратко. После прочтения теории, учащийся приобретает необходимые теоретические знания (рис. 12).

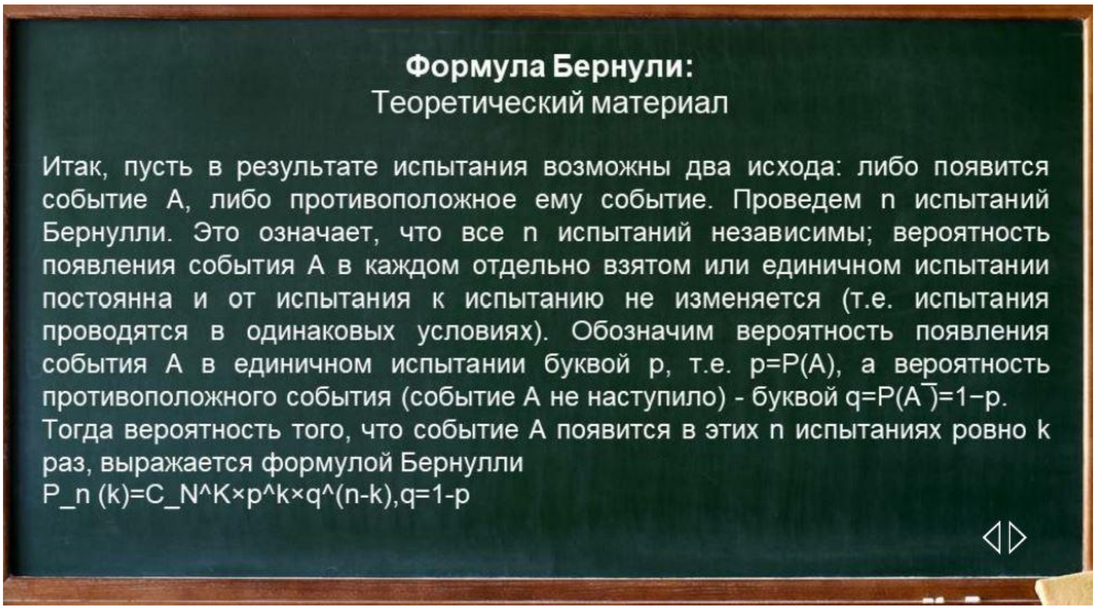

Рис. 12. Теоретический материал модуля Формула Бернулли

Блок задачи позволяет ознакомиться с наглядным решением типовых задач и попробовать самому их решить (рис. 13).

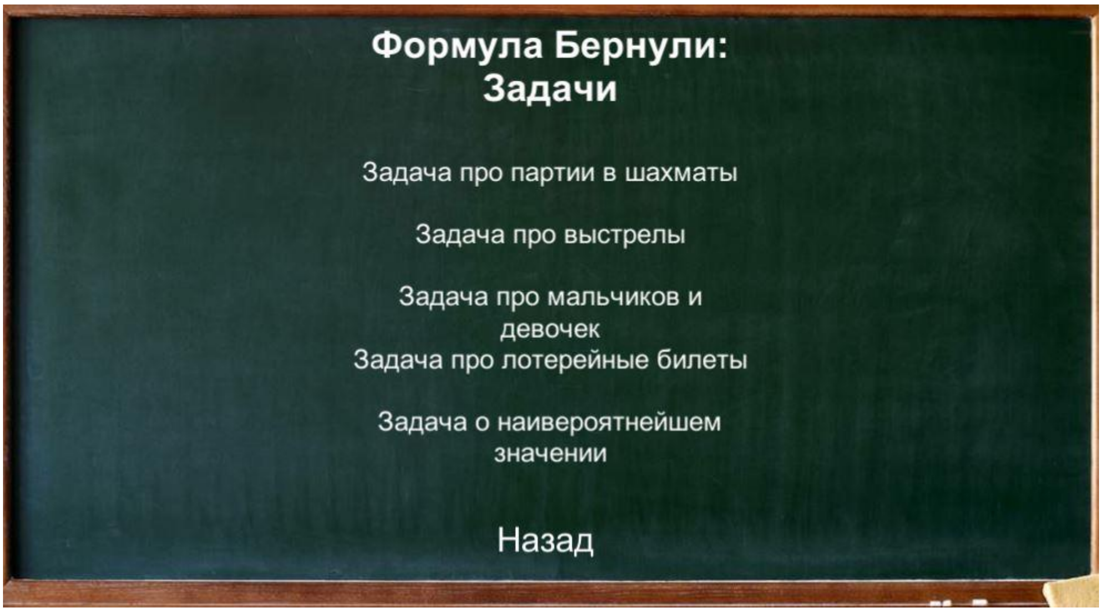

Рис. 13. Задачи модуля Формула Бернулли

Поскольку в данном модуле нет блока связанного с компьютерным моделированием, подробнее рассмотрим реализацию задач. Задача про лотерейные билеты (рис. 14).

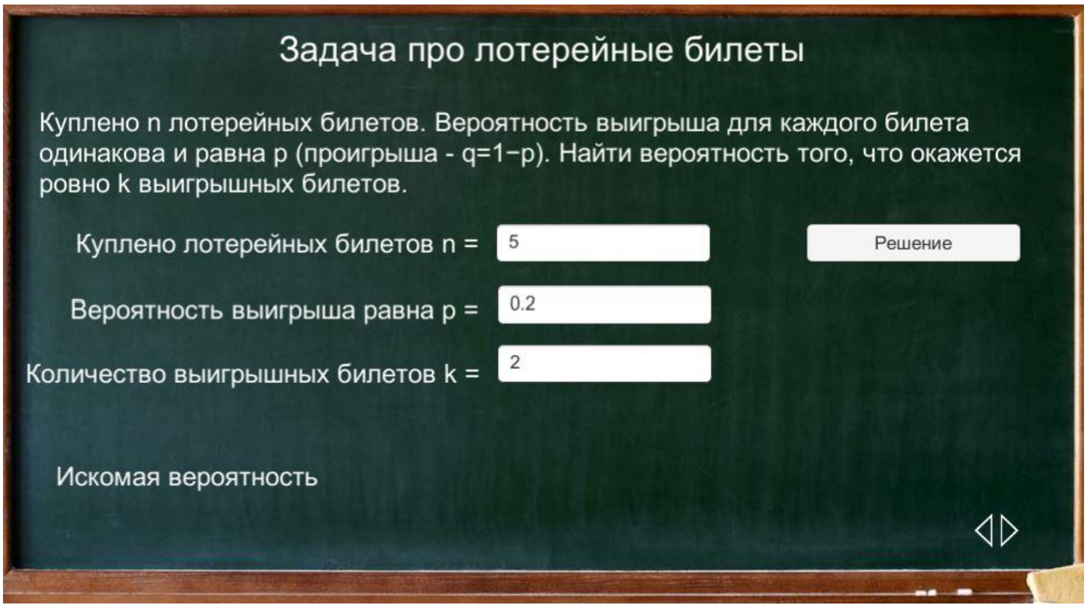

Рис. 14. Задача модуля Формула Бернулли (лотерейные билеты)

Данная задача представлена кратким описанием её основного вопроса, есть несколько полей ввода, они служат для заполнения данных задачи, таких как вероятность выигрыша в каждом билете, общее количество билетов, а также желаемое количество выигрышных билетов. При нажатии на кнопку “решение” компьютер пересчитает по специальным формулам вероятность выигрыша и выведет её на экран. Далее будет представлен код данных процессов.

```
        go1 = enemy.GetComponentInChildren<InputField>().text;
        go2 = enemy2.GetComponentInChildren<InputField>().text;
        go3 = enemy3.GetComponentInChildren<InputField>().text;
//ввод переменных
        bln1 = int.Parse(go1);
        bln2 = float.Parse(go2);
        bln3 = int.Parse(go3);
//преобразование в нужные типы данных
```

```
for (int a = 1; a <= bln1; a++)
    ck = ck * a;
for (int b = 1; b <= bln3; b++)
    ck1 = ck1 * b;
for (int b = 1; b <= (bln1-bln3); b++)
    ck2 = ck2 * b;
otvet1 = (ck / (ck1 * ck2));
otvet1 = otvet1 * Mathf.Pow(bln2, bln3) * Mathf.Pow((1 - bln2) , (bln1 - bln3));
//Решение задачи
enemy4.GetComponentInChildren<Text>().text = "Искомая вероятность =  " + otvet1;
// вывод данных на экран
```

После успешного решения компьютером задачи уже пользователю данным программным продуктом предлагается самостоятельно решить подобную задачу (рис. 15).

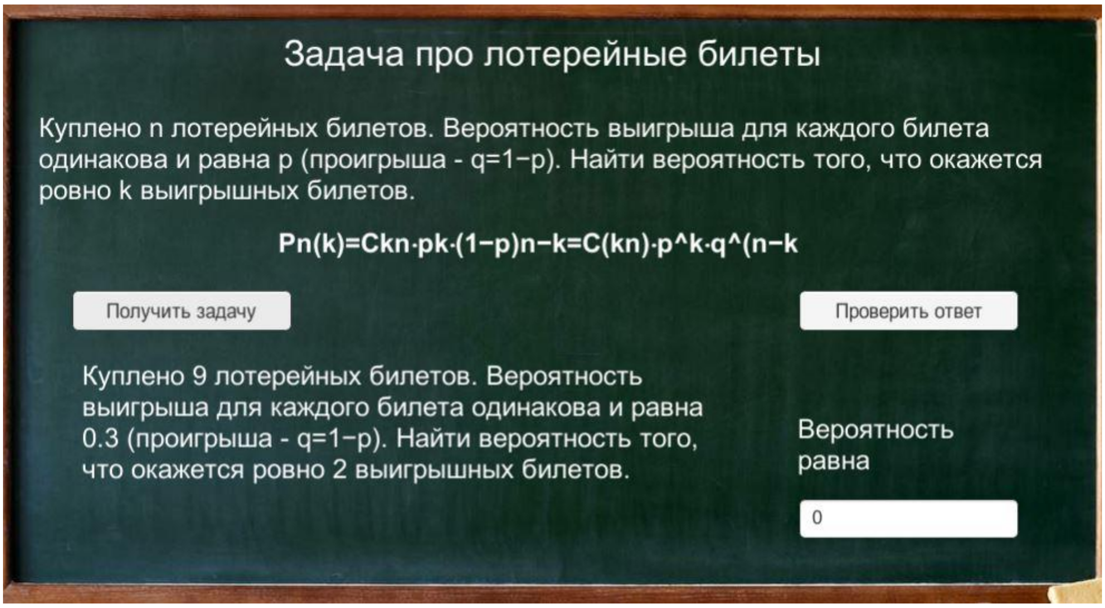

Рис. 15. Задача модуля Формула Бернулли (лотерейные билеты)

На данной странице находиться одно поле для ввода ответа, и две кнопки. Кнопка "Получить задачу” меняет начальные данные задачи, “Проверить ” ответ проверяет ответ на правильность, если он не правильный пользователь об этом увидит также в качестве напоминания на слайде присутствует формула для помощи пользователю с нахождением ответа.

Код кнопки "Получить задачу”

```
bln1 = Random.Range(5, 15);
        bln2 = Random.Range(1, 9) ;
        bln2 = bln2 * 0.1f;
        bln3 = Random.Range(1, 5);
// Рандомные значения для переменных
        enemy.GetComponentInChildren<Text>().text = "Куплено "+ bln1 + " лотерейных билетов. Вероятность выигрыша для каждого билета одинакова и равна "+ bln2 +" (проигрыша - q=1−p). Найти вероятность того, что окажется ровно "+ bln3 +" выигрышных билетов.";
// вывод задачи
        for (int a = 1; a <= bln1; a++)
            ck = ck * a;
        for (int b = 1; b <= bln3; b++)
            ck1 = ck1 * b;
        for (int b = 1; b <= (bln1 - bln3); b++)
            ck2 = ck2 * b;
        otvet1 = (ck / (ck1 * ck2));
            otvet1 = otvet1 * Mathf.Pow(bln2, bln3) * Mathf.Pow((1 - bln2), (bln1 - bln3));
//решение задачи с данными переменными
```

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения настоящей выпускной квалификационной работы получены следующие результаты.

1. Выполнен анализ учебников и задачников по теории вероятности и математической статистике. В ходе анализа материала были выбраны основные начальные темы по теории вероятности. Текст учебников переработан и преобразован в более удобный вид для понимания. Выбранные темы являются базовыми по данной науке и помогут учащемуся изучить, повторить, восполнить пробелы в знаниях.

2. Разработаны модули, каждый из которых содержат в себе теоретический материал, типовые решённые задачи, интерактивную модель задачи или же модель близкую по теме.

3. В инструментальной среде Unity3D создан интерактивный модуль по визуализации основных закономерностей теории вероятности. Данный модуль может применяться в учебном процессе по курсу математики средней общеобразовательной школы или в качестве напоминания для студентов начальных курсов. Реализованный проект можно использовать как для проведения урока, так и в качестве домашнего задания.

Библиографический список:

1. Баврин И.И., Матросов В.Л. Краткий курс теории вероятностей и математическая статистика, 1989 г. - 136 с.
2. База движков [Электронный ресурс] - URL: http://engine-base.ru/publ/o_dvizhkakh/unreal_engine(Дата обращения 11.05.2018).
3. Баяндин Д.В. Динамические интерактивные модели для поддержки познавательной деятельности учащихся [Электронный ресурс]. – URL:https://cyberleninka.ru/article/n/dinamicheskie-interaktivnye-modeli-dlyapodderzhki-poznavatelnoy-deyatelnosti-uchaschihsya(Дата обращения15.02.18).
4. Виртуальная реальность сегодня: дань моде или необходимость? [Электронный ресурс]. – URL: https://sites.google.com/site/arxistyles/home/informacionnye-razdely/istoria-razvitia-virtualnoj-realnosti (Дата обращения 10.04.2018).
5. Высшая математика [Электронный ресурс] - URL: http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html(Дата обращения 30.04.2018).Герасимов B. Unity 3.xScripting. – PacktPublishing, 2011.
6. Джозеф Хокинг. Unity в действии. Мультиплатформенная разработка на C#:—СПБ. : Питер, 2016. — 336 с.
7. Калмыков Д. А., Хачатуров Л. А. Опыт реализации виртуальных образовательных сред. Школьные технологии №2, 2002.
8. официальный сайт Unity [Электронный ресурс] - URL:unity3d.com (Дата обращения 12.05.2018).
9. Прохоров А.В. Ушаков В.Г. Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: практикум. — М. : Наука, 1986. – 283с.
10. Самойленко Н.И., Кузнецов, А.И., Костенко, А.Б. Теория вероятностей: Учебник.– Х.: Издательство «НТМТ», 2009. – 200 с.
11. Торн Алан. Искусство создания сценариев в Unity : [рус.]. - СПб : ДМК, 2016. - 362 с.
12. Ульянов Р. С., Прокопьев С. В., Делибалтов В. В. Моделирование технических систем в среде Unity 3D - СПб : ДМК, 2014. - 155 с.

13. Молодой ученый. — 2015. — №11. — С. 452-455. — URL https://moluch.ru/archive/91/19865/ (дата обращения: 15.05.2018).
14. Тутубалин, В.Н. Теория вероятностей и случайных процессов: Учебное пособие для вузов.— М. :Academia, 1992. — 408 с.
15. Тюрин Ю.Н. Теория вероятностей и статистика, 2004 г. - 256 с
16. Учебник по теории вероятности онлайн [Электронный ресурс] - URL: https://www.matburo.ru/tv_book.php(Дата обращения 30.04.2018).
17. Учебный модуль «Теория вероятности» [Электронный ресурс]. – URL: http://fcior.edu.ru/card/28206/teoriya-veroyatnostey.html (Дата обращения17.02.18).
18. Учебный модуль «Теория вероятности» [Электронный ресурс]. – URL: http://fcior.edu.ru/card/10985/vychislenie-veroyatnosti-sobytiya-p3.html (Дата обращения17.02.18).
19. Черненко, В.Д. Высшая математика в примерах и задачах: Учебное пособие для вузов. В 3 томах. Том 3.— СПб. : Политехника, 2003.— 476 с.
20. Even Hearthstone runs on Unity — and that's why it's already on iPad [Электронныйресурс] - URL:https://venturebeat.com/2014/04/24/even-hearthstone-runs-on-unity-and-thats-why-its-already-on-ipad/ (Датаобращения 3.05.2018).