ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 2
ГЛАВА 1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ 4
1.1. Геометрические задачи на построение 4
1.2. Этапы решения задач на построение 6
1.3. Метод геометрического места точек 7
1.4. Методы геометрических преобразований 10
1.4.1. Метод осевой симметрии 11
1.4.2. Метод параллельного переноса 14
1.4.3. Метод поворота 17
1.4.4. Метод подобия 20
1.4.5. Метод инверсии 22
1.5. Алгебраический метод 25
ГЛАВА 2. РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ В ПРОГРАММЕ «ЖИВАЯ ГЕОМЕТРИЯ» 28
2.1. Геометрические построения в программе «Живая геометрия» 28
2.2. Решение конструктивных задач методом геометрического места точек в программе «Живая геометрия» 31
2.3. Решение конструктивных задач методом геометрических преобразований в программе «Живая геометрия» 35
2.4. Решение конструктивных задач алгебраическим методом в программе «Живая геометрия» 38
2.5. Практическое занятие по теме «Решение задач на построение с использованием программы «Живая геометрия»» 41
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 46
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 48

ВВЕДЕНИЕ

Задачи на построение являются важным средством формирования у учащихся геометрических представлений.

Еще с давних времен ими занимались почти все крупные греческие геометры, такие как Гиппократ Хиосский (V в. до н. э.), Евклид, Архимед, Аполлоний Пергский (III в. до н. э.), Папп Александрийский (III в. н. э.), Платон и многие другие.

На сегодняшний день изучение геометрии нельзя представить без конструктивных задач. Так как задания на построение составляют базу для работы, развивающей навыки построения фигур, способствующей формированию умения читать и понимать чертеж, устанавливать связи между его частями, то недостаточность этой системы обусловливает плохое развитие пространственного и логического мышления ученика, низкий уровень его графической культуры.

Применение компьютерных технологий в обучении – одно из наиболее устойчивых направлений развития образовательного процесса. Использование пакета программ «Живая геометрия» при решении задач на построение позволит не только совершенствовать самоподготовку учащихся, но и повысит интерес к обучению.

Объект выпускной квалификационной работы – процесс обучения геометрии в курсе основной школе.

Предмет исследования – обучение учащихся средней и старшей школы решению конструктивных задач с использованием программы «Живая геометрия».

Цель: исследование функциональных возможностей программы «Живая геометрия» при решении задач на построение.

Задачи исследования:

1) анализ литературы по методам решения задач на построение;

2) систематизация сведений по теории;

3) исследование возможностей применения программы «Живая геометрия» при решении задач на построение различными методами;

4) разработка урока с применением программы «Живая геометрия»;

5) апробирование урока с применением программы «Живая геометрия» в группе учащихся 8 класса в МАОУ «СОШ № 59».

Методы исследования: анализ литературы по методам решения задач на построение, систематизация собранных сведений, описание функциональных возможностей программы «Живая геометрия».

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Во введении представлена актуальность выбранной темы, сформулированы объект, предмет и цель исследования, перечислены задачи, выполненные для достижения цели, названы методы, описана структура работы и дана характеристика каждой из структурных частей.

В первой главе на основании анализа литературы проведена систематизация теоретических сведений по некоторым методам решения конструктивных задач и приведены примеры.

Во второй главе приводится результаты исследования. Возможности программы «Живая геометрия» при выполнении элементарных и основных построений, а так же при решении задач на построение методом геометрического места точек, методом геометрических преобразований и алгебраическим методом. По каждому методу приведены по два примера решения конструктивных задач выполненные совместно с применением программы. Так же предоставлена разработка урока, который был проведен в МАОУ «СОШ № 59».

В заключении приведены итоги работы, перечислены результаты и вытекающие из них выводы.

Список литературы насчитывает 36 наименований.

ГЛАВА 1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

1.1. Геометрические задачи на построение

В конструктивных задачах на построение требуется построить геометрический объект по данным условиям.

Задача называется определенной, если данные условия являются необходимыми и достаточными для определения искомой фигуры. Она может иметь одно и более решений.

Задача является неопределенной, если дано меньше условий, нежели необходимо для определения фигуры.

При решении задач с использованием любых средств построения пользуются следующими аксиомами конструктивной геометрии:

1. Каждая данная фигура F построена.
2. Если построены фигура F_1 и F_2, то построено и объединение этих фигур.
3. Если: F_1 и F_2 построены, то можно установить является ли их пересечение пустым множеством или нет. Если пересечение данных фигур не пусто, то оно построено.
4. Если F_1 и F_2 построены и $F_1 \subset F_2,\ F_1 \neq F_2$, то построено $F_2 \backslash F_1$.
5. Можно построить точку, принадлежащую данной фигуре.
6. Можно построить точку, не принадлежащую данной фигуре (если она не совпадает со всей плоскостью).
7. Если A и B $(A \neq B)$ построены, то можно построить луч AB (аксиома линейки).
8. Если построены точка O и отрезок AB, то можно построить окружность $\omega(O,\ AB)$ (аксиома циркуля).

Решить задачу на построение – значит свести её к совокупности пяти элементарных построений, которые заранее считаются выполнимыми:

1. Если построены две точки A и B, то построена прямая AB, их соединяющая, а также отрезок AB и любой из лучей AB и BA (аксиома линейки).

2. Если построена точка O и отрезок AB, то построена окружность с центром в точке O и радиусом AB, а также любая из дуг этой окружности.

3. Если построены две прямые, то построена точка их пересечения (если она существует).

4. Если построена прямая и окружность, то построена любая из точек их пересечения (если она существует).

5. Если построены две окружности, то построена любая из точек их пересечения (если она существует).

Сведение решения каждой задачи к элементарным построениям делает решение громоздким. Поэтому решение задачи сводят к основным построениям:

- деление данного угла пополам;
- построение отрезка, равного данному;
- построение угла, равного данному;
- построение параллельной прямой;
- построение перпендикулярной прямой;
- деление отрезка в данном отношении;
- построение треугольника по трём сторонам;
- построение треугольника по двум сторонам и углу между ними;
- построение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам;
- построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету.

Решить задачу на построение – значит найти все её решения.

1.2. Этапы решения задач на построение

При решении конструктивных задач в учебных условиях рекомендуется пользоваться известной схемой решения, состоящей из следующих четырех этапов:

1. **Анализ.** Это подготовительный этап решения задачи на построение, который дает ключ к решению задачи. Цель анализа состоит в установлении таких зависимостей между элементами искомой фигуры и элементами данных фигур, которые позволили бы построить искомую фигуру.

2. **Построение.** Данный этап решения состоит в том, чтобы указать последовательность основных построений (или раннее решенных задач), которые достаточно произвести, чтобы искомая фигура была построена.

3. **Доказательство.** Доказательство имеет целью установить, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем поставленным в задаче условиям. Доказательство обычно проводится в предположении, что каждый шаг построения действительно может быть выполнен.

4. **Исследование.** При построении обычно ограничиваются отысканием одного какого–либо решения, причем предполагается, что все шаги построения действительно выполнимы. Для полного решения задачи нужно ещё выяснить следующие вопросы:

1) всегда ли (т.е. при любом ли выборе данных) можно выполнить построение избранным способом;

2) можно ли и как построить искомую фигуру, если избранный способ нельзя применить;

3) сколько решений имеет задача при каждом возможном выборе данных.

Рассмотрение всех этих вопросов и составляет исследование. Таким образом, исследование имеет целью ставить условия разрешимости и определить число решений.

1.3. Метод геометрического места точек

Геометрическим местом точек называется совокупность точек, обладающих свойствами, исключительно им принадлежащими [2].

При решении задачи на построение методом геометрического места точек требуется найти некоторую точку A, удовлетворяющую двум условиям. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть некоторая фигура Φ_1, а геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть фигура Φ_2. Искомая точка A принадлежит фигурам Φ_1 и Φ_2.

Примеры геометрического места точек:

1) геометрическое место точек, отстоящих на расстоянии, равном a, от данной точки M, есть окружность, описанная из центра M радиусом a;

2) геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных точек M и N, есть перпендикуляр, восстановленный к отрезку MN в его середине;

3) геометрическое место точек, отстоящих на данном расстоянии a от прямой AB, составляют две прямые CD и MN, отстоящие от AB на расстоянии a;

4) геометрическое место точек, делящих в данном отношении параллельные отрезки прямых, проведенных в данном угле, есть прямая, проходящая через вершину этого угла и одну из таких точек;

5) геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, составляют две дуги, описанные на данном отрезке и вмещающие данный угол;

6) геометрическое место точек, делящих в известном отношении равные хорды, проведенные в данной окружности, есть концентрическая окружность, радиус которой равен расстоянию данного центра от одной из точек всего геометрического места;

7) точки, из которых данная окружность O видна под данным углом m, составляют концентрическую окружность определенного радиуса;

8) все точки, касательные из которых к данной окружности радиуса r равны данному отрезку a, составляют концентрическую окружность радиуса, равного $\sqrt{a^2 + r^2}$;

9) геометрическое место вершин треугольников, равновеликих данному ΔABC и имеющих общее с ним основание AC, составляют две прямые, проведенные от AC на расстоянии, равном высоте BD треугольника ABC;

10) геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до двух данных точек A и B равна a^2, есть окружность определенного центра и радиуса;

11) геометрическое места точек, разность квадратов расстояний которых до двух данных точек M и N равна a^2, есть перпендикуляр к MN в точке E, определяемой равенством $EM^2 - EN^2 = a^2$;

12) геометрическое место точек, расстояния которых до двух данных точек A и B находятся в данном отношении $m : n$, есть окружность определенного радиуса и центра;

13) геометрическое место точек, из которых касательные к данным двум окружностям равны, есть прямая, перпендикулярная к линии центров в определенной точке;

14) геометрическое место центров окружностей, имеющих данный радиус и пересекающих данную окружность под определенным углом, есть окружность, концентрическая данной окружности [2].

Приведем пример задачи с применением метода геометрического места точек.

Задача 1. Даны три равных окружности. Требуется построить окружность, которая касалась бы всех трех окружностей извне.

Анализ. Предположим, что задач решена и такая окружность построена. Тогда центр искомой окружности и центр окружности описанной около треугольника OO_1O_2 совпадают, где точки O, O_1 и O_2 центры данных равных окружностей. Если радиус окружности описанной около треугольника OO_1O_2 равен r, то радиус искомой окружности равен $r + R$ (рис. 1).

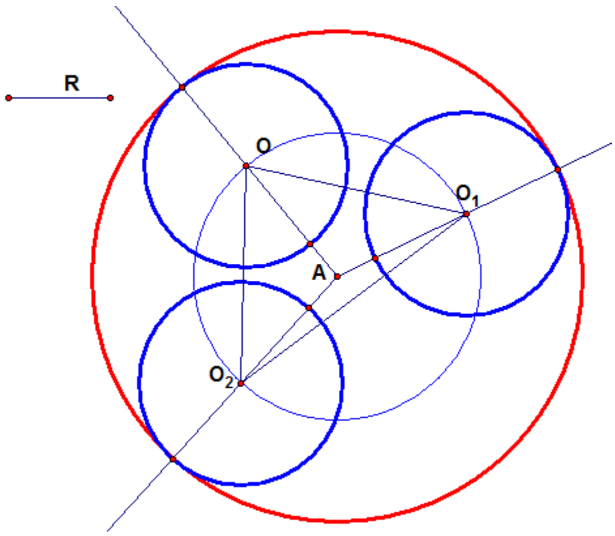


Рис. 1.

Построение.

1. $\Delta\, OO_1O_2$.
2. Серединный перпендикуляр к отрезку O_1O_2.
3. Серединный перпендикуляр к отрезку OO_1.
4. A – точка пересечения серединных перпендикуляров.
5. $[AO)$.
6. $\omega(0;\ R) \cap [AO)$.
7. Строим искомую окружность с центром в точке A и радиусом равный $r + R$, где r – радиус окружности описанной около треугольника OO_1O_2.

Доказательство. Окружность, которая касалась бы трех равных окружностей извне можно построить и его центром будет точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника OO_1O_2, образованного центрами этих трех равных окружностей.

Исследование. Задача может иметь одно решение (рис. 2) или два (рис. 3). Окружность с радиусом $r + R$ и $R - r$.

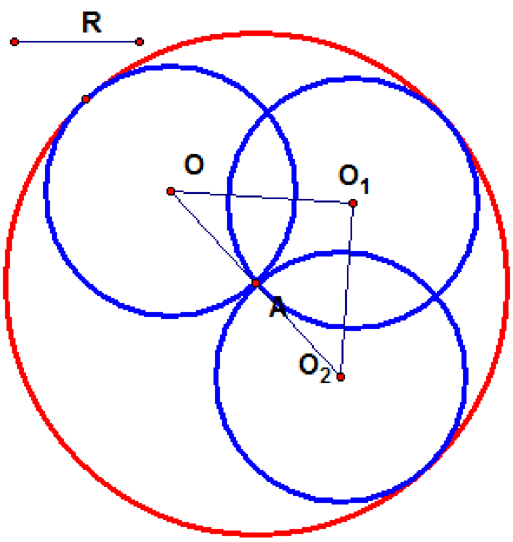


Рис. 2

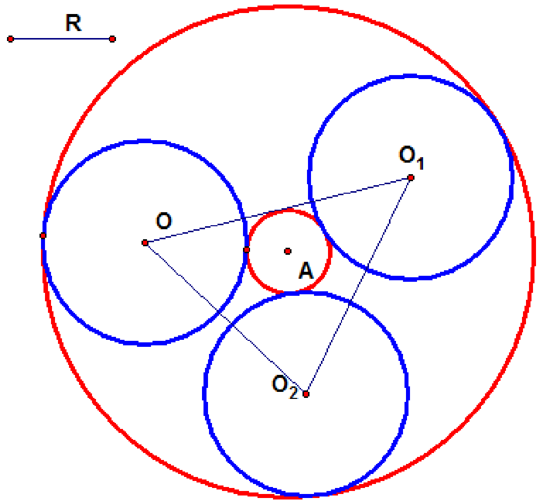


Рис.3

1.4. Методы геометрических преобразований

Пусть Ф – некоторая фигура, расположенная в плоскости. Пусть установлено некоторое правило, в силу которого каждой точке M фигуры Ф ставится в соответствие некоторая определенная точка M' той же плоскости. Тогда говорят, что в плоскости установлено преобразование фигуры Ф. При этом точка M' называется образом точки M, а точку M называют прообразом точки M' [5].

Если каждая точка фигуры – образа имеет только один прообраз, то преобразование фигуры называется взаимно однозначным.

Примером взаимно однозначных преобразований является движения.

Преобразование плоскости, сохраняющее расстояния между точками, называется движением плоскости. Точнее говоря, преобразование f

плоскости называется движением плоскости, если оно всякие две точки A и B отображает на такие две точки A_1 и B_1, что $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 = \mathrm{AB}$.

При решении задач на построение метод геометрических преобразований применяется как средство обоснования некоторых отношений между элементами плоскости. Рассмотрим некоторые виды аффинных преобразований и инверсию.

1.4.1. Метод осевой симметрии

Симметрией плоскости с осью l называется такое преобразование плоскости при котором точки оси l инварианты, а любая другая точка M переходит в такую точку M', что $[MM'] \perp l$ и точка $M_0[MM'] \cap l$ является серединой отрезка $[MM']$.

Основные свойства осевой симметрии:

- осевая симметрия S_l является движением II рода;
- ось симметрии l – инвариантная прямая, состоящая из инвариантных точек;
- любая прямая, перпендикулярная оси симметрии, инвариантна;
- любая прямая, параллельная оси симметрии, переходит в параллельную прямую;
- любая прямая, не параллельная оси симметрии, преобразуется в прямую, пересекающуюся со своим преобразованием в точке, принадлежащей оси l;

Множество осевых симметрий плоскости группы не образует, так как композиция двух осевых симметрий представляет собой либо перенос, либо поворот плоскости.

Применение осевой симметрии к решению задач на построение называют методом осевой симметрии. Метод осевой симметрии состоит в том, что наряду с данными и искомыми фигурами рассматриваются также фигуры, симметричные некоторым из них относительно некоторой оси. При удачном выборе оси и преобразуемой фигуры решение задачи может значительно облегчиться, а в некоторых случаях симметрия непосредственно даёт искомые точки.

Рассмотрим некоторые примеры.

Задача 2. Построить квадрат, две противоположные вершины которого лежат на данной прямой l, а две другие – соответственно на данных окружностях ω_1 и ω_2.

Решение

Анализ. Пусть *ABCD* – квадрат, удовлетворяющий условиям, а именно: вершина $A \in \omega_1$, вершина $C \in \omega_2$, вершины B и D лежат на прямой l. Так как диагональ *BD* квадрата является осью симметрии, то вершина *C* отобразится на вершину *A* при осевой симметрии. Вершина $A \in \omega_1$ и $A \in \omega'_2$, где ω'_2 – образ окружности ω_1 (рис. 4).

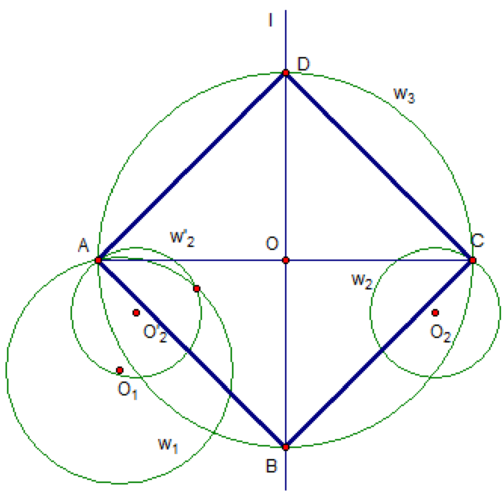


Рис. 4

Построение.

1. Строим окружность $\omega'_2 = S_l(\omega_2)$.
2. $A = \omega_1 \cap \omega'_2$.
3. $C = S_l(A)$.
4. На отрезке AC как на диаметре строим окружность ω_3 и находим вершины B и D.

Доказательство. Так как $(AC) \perp l$, то при симметрии относительно l прямая *(AC)* отображается на себя. Кроме того, окружность ω_2 симметрична окружности ω'_2. Тогда точка $C \in \omega_2$. Отрезок *[AC]* – диаметр окружности ω_3, точка $O = (AC) \cap l$ – центр окружности ω_3, поэтому $|OA| = |OB| = |OC| = |OD|$. Так как далее $|AC| = |BD|, (AC) \perp (BD)$, то *ABCD* – квадрат. Итак, по построению $A \in \omega_1$, $D \in l$, $B \in l$, а по доказанному $C \in \omega_2$ и четырёхугольник *ABCD* - квадрат.

Таким образом, четырёхугольник *ABCD* удовлетворяет всем поставленным условиям, т.е. является искомым квадратом.

Исследование. При выбранном способе построения количество решений зависит от количества точек пересечения окружностей ω_1 и ω'_2 и положения этих точек относительно *(AC)*. Возможны следующие случаи:

1) если окружности ω_1 и ω'_2 пересекаются, то задача либо имеет два решения (рис. 5), либо имеет одно решение (рис. 6);

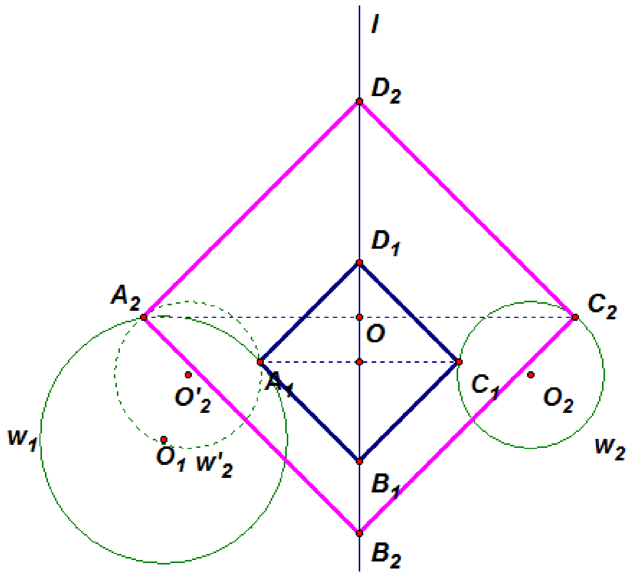


Рис. 5

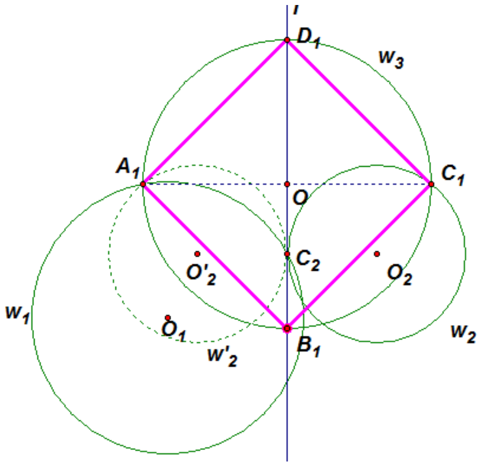


Рис. 6

2) если окружности ω_1 и ω'_2, не имеют общих точек, то решений нет;

3) если окружности ω_1 и ω'_2 совпадают, то решений бесконечное множество.

1.4.2. Метод параллельного переноса

При решении геометрической задачи на построение часто бывает полезно перенести параллельно отдельные части фигуры и тем самым придать ей более удобный для решения вид.

В этом случае применяется параллельный перенос.

Параллельным переносом на вектор $\vec{n}$ называется преобразование плоскости, которое каждую точку A переводит в такую A', что $\overrightarrow{AA'} = \vec{n}$.

Перечислим основные свойства параллельного переноса:

- параллельный перенос является движением I рода;
- при $\vec{n} \neq \vec{0}$ у переноса T_n нет инвариантных точек;
- при $\vec{n} = \vec{0}$ перенос T_n является тождественным преобразованием (т.е. все точки плоскости совпадают со своими образами) $T_n = E$;
- прямые, параллельные вектору $\vec{n}$ переноса, инвариантны;

▪ любая прямая, не параллельная вектору $\vec{n}$, переходит в параллельную прямую;

▪ любой луч при T_n переходит в сонаправленный луч;

▪ параллельный перенос можно представить в виде композиции двух осевых симметрий с параллельными осями;

▪ множество всех параллельных переносов плоскости образует группу, являющуюся подгруппой метрической группы.

Сущность метода параллельного переноса состоит в том, что наряду с данными и искомыми фигурами рассматриваются некоторые другие фигуры, которые получаются из данных или искомых фигур или их частей путём переноса на некоторый вектор.

Задача 3. Даны параллельные прямые a и b, пересекающая их прямая c и отрезок длины m. Построить равносторонний треугольник со стороной данной длины m, так, чтобы его вершины лежали соответственно на данных прямых.

Анализ. Пусть искомый треугольник ΔABC построен: $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $|AB| = |AC| = |BC| = m$. Построить треугольник ΔABC со сторонами данной длины m сможем, причём $A \in a$, $B \in b$, а для того чтобы выполнялось условие $C \in c$ достаточно выполнить параллельный перенос (рис. 7).

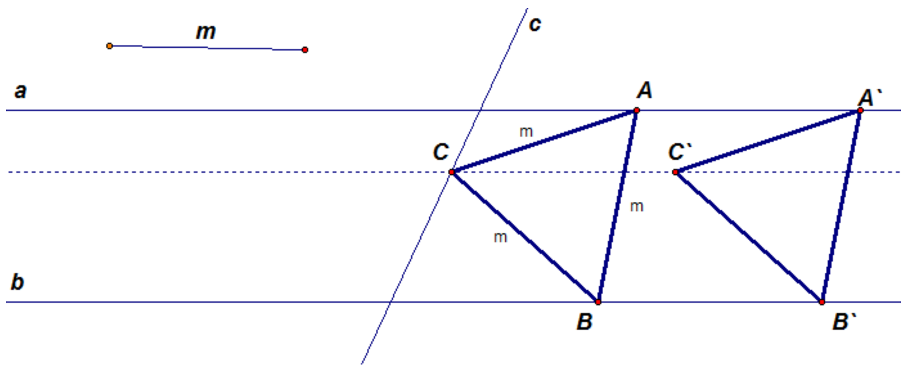


Рис. 7

Построение.

1. Поставим произвольную точку $A' \in a$.

2. Построим окружность $\omega_1 = (A', m)$.

3. $B' = \omega_1 \cap b$.

4. Построим окружность $\omega_2 = (B', m)$.

5. $C' = \omega_1 \cap \omega_2$.

6. Через точку C' проводим прямую k параллельную прямой a $(k \parallel a)$.

7. $C = k \cap a$.

8. Выполним параллельный перенос точек A', B' и C' на вектор $\overrightarrow{C'C}$.

9. Построим треугольник ΔABC.

Доказательство. По построению треугольник $\Delta A'B'C'$ удовлетворяет всем поставленным условиям, кроме условия $C' \in$ c. После параллельного переноса $\overrightarrow{C'C}$ удовлетворяется и это условие. Таким образом, ΔABC – искомый.

Исследование. При выбранном способе построения число решений задачи зависит, прежде всего, от числа точек $B' = \omega_1 \cap b$.

Если радиус m окружности ω_1 больше расстояния h между прямыми a и b, то таких точек две.

Если $m = h$ окружности ω_1 касается прямой b, и тогда точка пересечения одна.

Если же $m < h$, то окружность ω_1 и прямая b не пересекаются.

Итак, возможны три следующих случая:

1) если $m > h$, то задача имеет четыре решения (рис. 8);

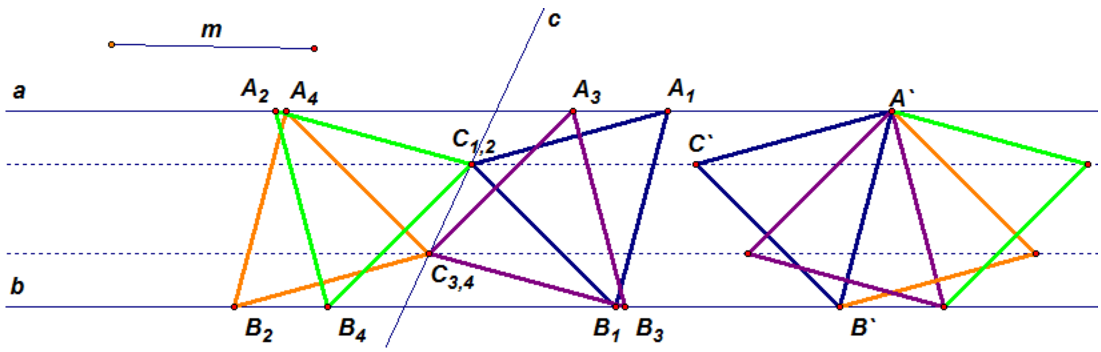


Рис. 8

2) если $m = h$, то задача имеет два решения (рис. 9).

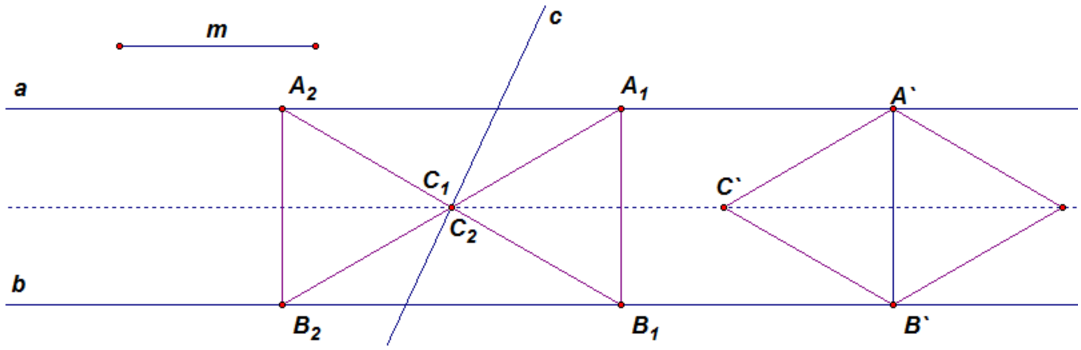


Рис. 9

3) если $m < h$, то задача не имеет решений.

1.4.3. Метод поворота

Поворотом вокруг точки O на угол φ называется преобразование плоскости, переводящее каждую точку A в такую точку A', что $[OA] = [OA']$ и угол между лучами $[OA)$ и $[OA')$ (т. е. угол, отсчитываемый против часовой стрелки от луча $[OA)$ к лучу $[OA')$) равен φ.

Основные свойства поворота:

- поворот является движением I рода;
- центр O поворота – единственная инвариантная точка;
- при $\varphi \neq \pi$ инвариантных прямых не существует;
- любая прямая при повороте на угол φ преобразуется в прямую, образующую со своим прообразом угол, равный φ или $\pi - \varphi$;
- любой поворот плоскости можно представить в виде композиции дух осевых симметрий с пересекающимися осями;
- множество всех поворотов плоскости вокруг одного центра образует группу, являющуюся полугруппой метрической группы;
- центральная симметрия плоскости с центром O – частный случай

поворота (при $\varphi = \pi$).

При решении задач на построение методом поворота достаточно повернуть какую-либо данную или искомую фигуру около целесообразно избранного центра на соответствующий угол так, чтобы облегчить проведение анализа задачи и найти путь построения.

Задача 4. Даны: точка O и прямые a и b, не проходящая через неё. Из точки O, как из центра, провести такую окружность, чтобы дуга её, заключенная между данными прямыми, была видна из точки O под данным острым углом φ.

Анализ. Допустим, что задача решена, ω - искомая окружность, A и B – концы дуги, заключённой между данными прямыми, $\angle AOB = \varphi$. Тогда при повороте около точки O на угол φ точка A преобразуется в точку B. Следовательно, точка B может быть найдена как пересечение образа прямой a с прямой b. После этого легко строится искомая окружность.

Построение.

1. Повернем на угол φ относительно точки O две произвольно выбранные точки принадлежащие прямой a.
2. Построим прямую a'.
3. $B = a' \cap b$.
4. Строим $\omega(O, OB)$ (рис. 10).

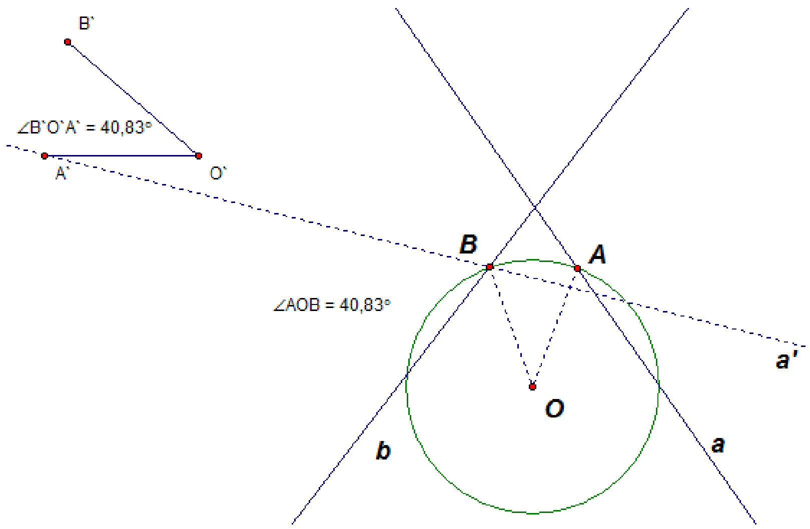


Рис. 10

Доказательство. Допустим, что при построении поворот прямой a проводится в направлении движения часовой стрелки. Повернём точку B около центра O на угол φ в направлении, обратном направлению движения часовой стрелки. Тогда прямая a', а точка B займёт некоторое положение A на прямой a. ясно, что $\angle AOB = \varphi$, и поэтому окружность ω действительно удовлетворяет условиям задачи.

Исследование. Так как условием задачи направление поворота не предусмотрено, то прямую a можно повернуть около точки O на угол φ как по часовой стрелке, так и в противоположном направлении. Поэтому прямая может занять после поворота два различных положения a' и a''. Так как угол φ, по условию, острый, то a' не параллельна a'' (угол между ними $2\ \varphi$). Возможны следующие случаи:

1) a' и a'' пересекают b; задача имеет два решения (рис. 11);
2) a' (или a'') параллельна b; одно решение;
3) a' (или a'') совпадает с b; решений бесконечно много.

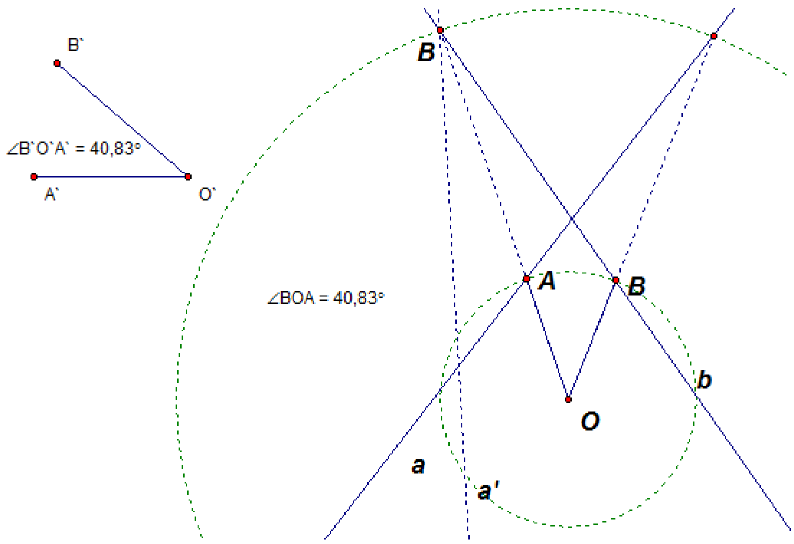


Рис.11

1.4.4. Метод подобия

Основная идея метода подобия состоит в следующем. Сначала строят фигуру, подобную искомой, так, чтобы она удовлетворяла всем условиям задачи, кроме одного. Затем строят уже искомую фигуру, как фигуру подобную построенной и удовлетворяющую опущенному требованию.

Метод подобия находит применение обычно в случаях, когда среди данных лишь одно является отрезком, а все остальные данные – либо углы, либо отношения отрезков.

Обычно целесообразно вспомогательную фигуру строить так, чтобы она была не только подобной искомой, но и подобно расположена ей, успех решения существенно зависит в этих случаях от выбора центра подобия.

При решении задач на построение методом подобия часто полезно воспользоваться следующим замечанием. Если две фигуры подобны, то коэффициент подобия равен отношению любых двух соответствующих отрезков. Если отрезкам $a, b, c, \ldots$ фигуры Ф соответствуют отрезки $a', b', c', \ldots$ подобной фигуры Φ', то коэффициент подобия равен также отношениям $\frac{a'+b'}{a+b}, \frac{a'-b'}{a-b}, \frac{a'+b'-c'}{a+b-c}$ и т. д.

Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом k, отличным от нуля, называется преобразование, переводящее каждую точку A в точку A', лежащую на прямой OA и удовлетворяющую условию $[OA`] = k \cdot [OA]$. При $k > 0$ точки A и A' лежат по одну сторону от точки O, при $k < 0$ по разные стороны.

Задача 5. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и сумме основания с высотой.

Анализ. Искомый треугольник должен удовлетворять трём условиям:

1) он должен быть равнобедренным;
2) угол при вершине должен быть равен данному углу a;
3) сумма основания и соответствующей высоты должна быть равна

данному отрезку l.

Построить треугольник, удовлетворяющий первым двум условиям достаточно просто. Таких треугольников существует бесконечно много. Построим треугольник $\Delta B'AC'$, причём $\angle B'AC' = a$.

Искомый треугольник, удовлетворяющий всем условиям, будет подобным треугольнику $\Delta\, B'AC'$ относительно точки A. Пусть $\Delta\, BAC$ искомый. Ясно, что $BC \parallel B'C'$. Пусть AP' – высота треугольника $\Delta\, B'AC'$, AP – высота треугольника $\Delta\, BAC$, где P – точка пересечения BC и AP'.

По условию дан отрезок l, который равен сумме $BC + AP$. Из построенного треугольника $\Delta\, B'AC'$, сможем построить отрезок l' равный сумме $B'C' + AP'$. Тогда искомый коэффициент гомотетии равен $\frac{BC+AP}{B'C'+AP'} = \frac{l}{l'}$.

Итак, треугольник ΔBAC гомотетичен треугольнику $\Delta\, B'AC'$ относительно центра подобия A, причём коэффициент подобия равен $\frac{l}{l'}$.

По этим данным искомый треугольник ΔBAC может быть построен.

Построение.

1. Построим произвольный равнобедренный треугольник $\Delta\, B'AC'$, у которого угол $\angle\Delta\, B'AC' = a$.
2. Построим высоту AP' треугольника $\Delta\, B'AC'$.
3. На луче AP' откладываем отрезок l', равный сумме $B'C' + AP'$.
4. На луче AP' откладываем отрезок l, равный сумме основания и высоты искомого треугольника $\Delta\, BAC$ (рис. 12).
5. Построим треугольник $\Delta\, BAC$ подобный треугольнику $\Delta\, B'AC'$ (рис. 13).

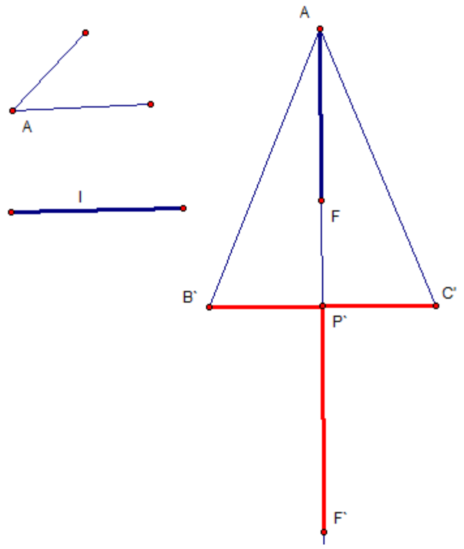


Рис. 12

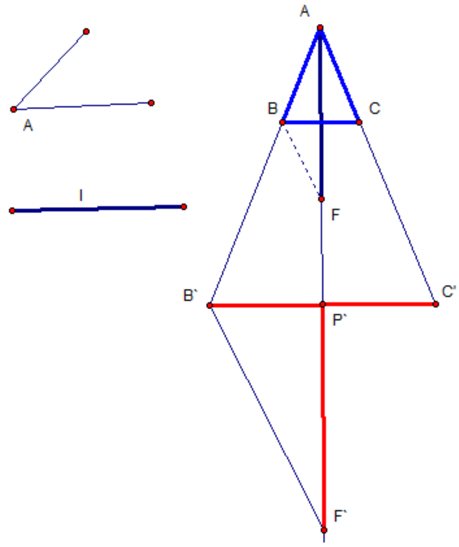


Рис. 13

Доказательство. Так как $\Delta\, BAC$ и $\Delta\, B'AC'$ подобные, то $\frac{AP}{AP'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{AB'} = \frac{AF}{AF'} = \frac{l}{l'}$. Поэтому $\frac{AP+BC}{AP'+B'C'} = \frac{l}{l'}$ и по построению $AP' + B'C' = l'$. Значит, $AP + BC = l$.

Итак, $\Delta\, BAC$ удовлетворяет условию, что сумма основания и соответствующей высоты должна быть равна данному отрезку l. Очевидно, что он удовлетворяет и первым двум условиям.

Исследование. Все шаги проведённого построения однозначно выполнимы. Поэтому данный способ построения даёт единственное решение.

1.4.5. Метод инверсии

Рассмотрим еще одно геометрическое преобразование, которое называется инверсией.

Пусть на плоскости дана некоторая окружность $\omega(O, R)$ и произвольная точка плоскости P отличная от центра O. Сопоставим ей точку P', которая удовлетворяла бы двум условиям:

1) точка P' лежит на луче OP;

2) $OP \cdot OP' = R^2$ (рис. 14).

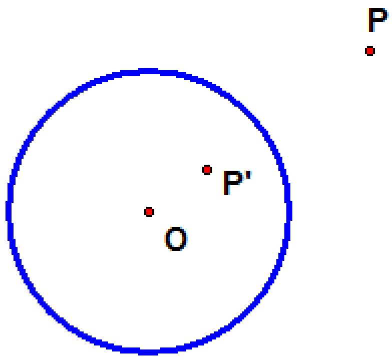


Рис.14

Такую точку P' мы называем инверсной или обратной точке P относительно окружности ω. Окружность ω называется базисной окружностью инверсии, ее центр – центром инверсии, а радиус – радиусом инверсии.

Преобразование, при котором каждой точке некоторой фигуры ставится в соответствие инверсная ей точка, называется инверсией, а фигура, образованная всеми точками, инверсными точками данной фигуры, называется инверсной по отношению к данной фигуре.

Задача 6. Через две данные точки A и B провести окружность, ортогональную данной окружности $\omega(O, r)$.

Анализ. Две окружности, пересекающиеся в точках M и N, с центрами O и O_1, называются ортогональными, если углы $\angle OAO_1$ и $\angle OBO_1$ являются прямыми (рис. 15). Если примем окружность ω за базисную окружность, то при инверсии искомая окружность ω_1 преобразуется в себя, а точки A и B перейдут в точки A' и B' на этой окружности. Но окружность ω_1 вполне определяется, если известны три точки на ней, например A, B и A'. Отсюда вытекает построение.

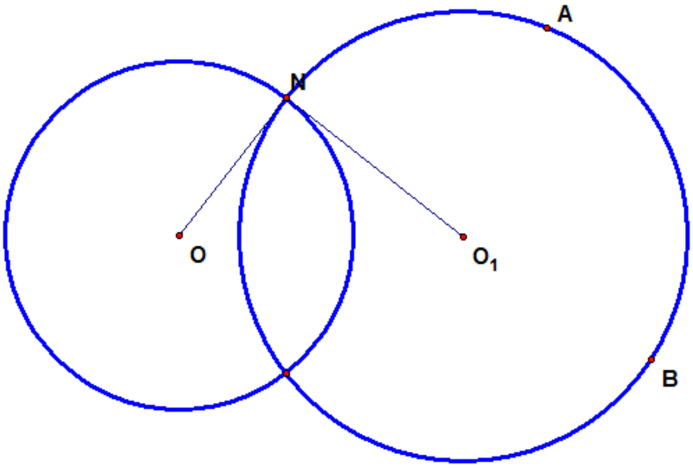


Рис. 15

Построение.

1. Построим точку A', инверсную точке A относительно окружности ω (рис. 16).

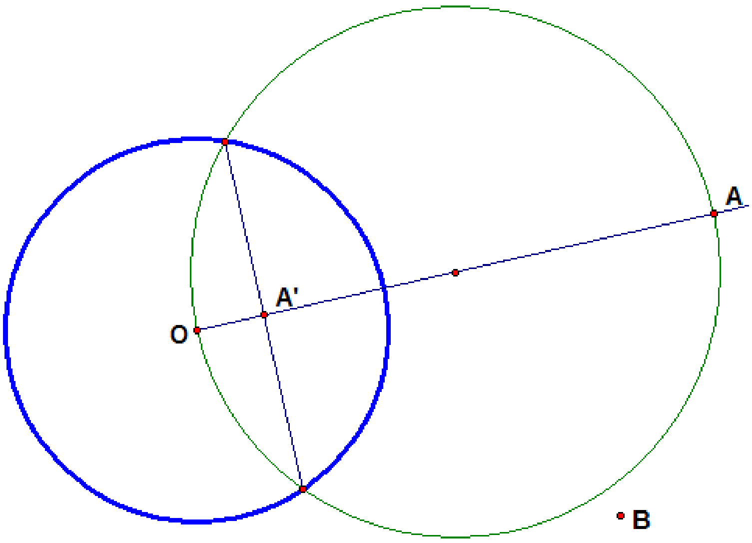


Рис.16

2. Построим окружность ω_1, проходящую через точки A, B и A'. ω_1 – искомая окружность (рис. 17).

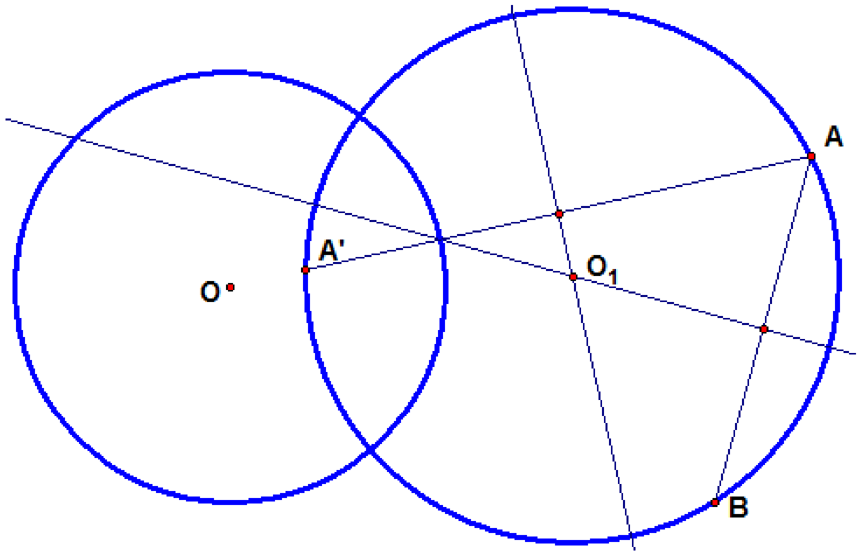


Рис. 17

Если точка A лежит на окружности ω, то точка A' совпадает с точкой A и указанный путь решения непригоден. В этом случае нужно провести аналогичное построение относительно точки B.

Исследование. Задача имеет решение всегда. Если точки A и B инверсны относительно окружности ω, то задача имеет бесконечно много решений: любая окружность, проходящая через точки A и B, ортогональна окружности ω.

1.5. Алгебраический метод

Алгебраический метод решения задач на построение является методом, который демонстрирует тесную взаимосвязь алгебры и геометрии.

При решении задач на построение этим методом:

1) составляют по условию задачи уравнение или систему уравнений, связывающее искомые и данные;

2) решают полученное уравнение или систему и выражают в виде формулы длину искомого отрезка через длины данных;

3) выполняют геометрические построения по полученной формуле.

Для применения алгебраического метода нужно уметь решать следующие элементарные задачи [3].

1. Построить отрезок, длина x которого следующим образом выражается через длины данных отрезков:

a) $x = a + b$;

b) $x = a - b, a > b$;

c) $x = \frac{ab}{c}$;

d) $x = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_{n-1}}$;

e) $x = \sqrt{ab}$;

f) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$;

g) $x = \sqrt{a^2 - b^2}, a > b$.

2. Дан единичный отрезок и отрезки длин a и b. Построить отрезок, длина x которого следующим образом выражается через длины данных отрезков:

a) $x = ab$;

b) $x = \frac{a}{b}$;

c) $x = a^n$.

Приведем пример решения задачи на построение алгебраическим методом.

Задача 7. Построить квадрат, равновеликий данному треугольнику.

Анализ. Равновеликие фигуры – это фигуры, которые имеют одинаковые площади.

Для построения квадрата достаточно узнать длину стороны. Пусть задача решена и построен квадрат $FNMK$, равновеликий данному треугольнику ΔABC. Тогда имеет место равенство $S_{\Delta ABC} = S_{FNMK} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h = FN^2$. Откуда можно выразить отрезок $FN = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot h}$.

Построение.

1. Построим высоту h треугольника $\Delta\, ABC$.
2. Отметим середину отрезка BC точкой F.
3. Построим отрезок FN равный среднему геометрическому отрезков BF и h, т.е. $\sqrt{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot h}$ (рис.18).

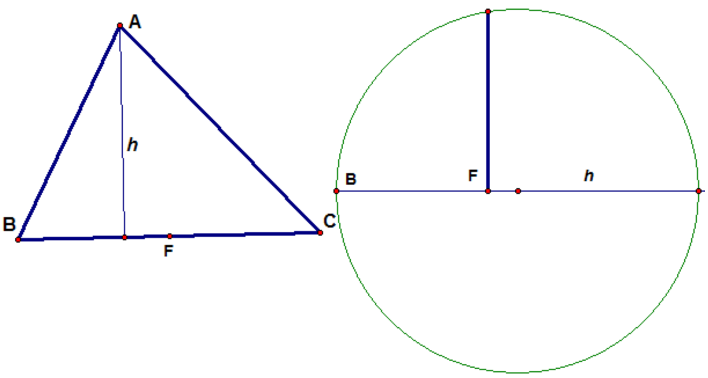


Рис. 18

4. Построим искомый квадрат $FNMK$ по стороне FN (рис. 19).

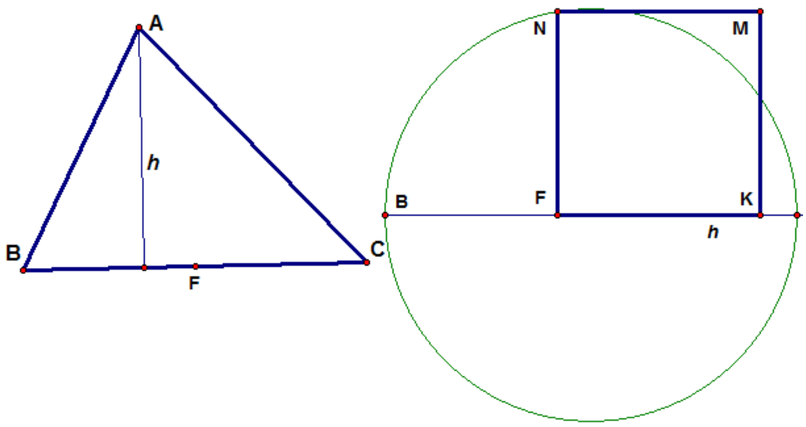


Рис. 19

Доказательство следует из анализа и построения.

Исследование. Задача будет иметь решение всегда и при том единственное.

ГЛАВА 2. РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ В ПРОГРАММЕ «ЖИВАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

2.1. Геометрические построения в программе «Живая геометрия»

«Живая геометрия» (рис. 20) – это набор инструментов, который предоставляет все необходимые средства для построения чертежей и их исследования. Она дает возможность «открывать» и проверять геометрические факты. Программа позволяет «оживлять» чертежи, плавно изменяя положение исходных точек.

«Живая геометрия» относится к программам динамической геометрии или «интерактивным геометрическим системам».

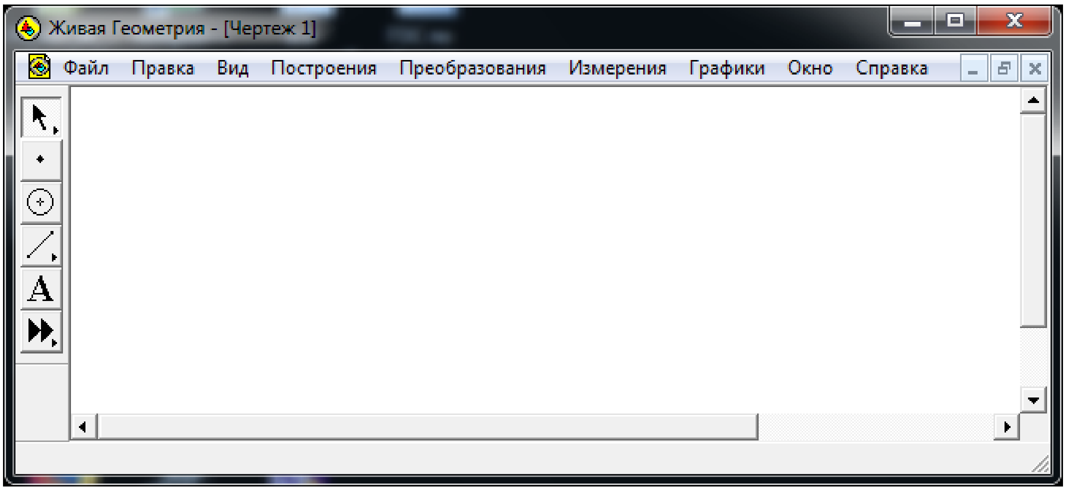
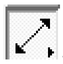


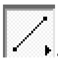
Рис. 20

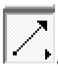
Данная программа распространяется бесплатно, и скачать можно с сайта производителя.

Для выполнения пяти элементарных построений в программе «Живая геометрия» есть определенные команды и инструменты. Опишем эти команды.

1. Если построены две точки A и B, то построена прямая AB, их соединяющая, а также отрезок AB и любой из лучей AB и BA (аксиома линейки).

Для того чтобы построить прямую проходящую через две точки достаточно выделить их, и на панели меню выбрать команду *Построения – Прямая*. Так же прямую можно построить с помощью набора инструментов, которое находится слева от рабочей зоны и обозначается значком .

Для того чтобы построить отрезок достаточно выделить точки конца отрезка и выбрать на панели меню команду *Построения – Отрезок*. Другой способ построения отрезка с помощью инструмента «линейка» со значком .

Для построения луча достаточно выделить начало луча и точку, которая принадлежит лучу, и на панели меню выбрать команду *Построения – Луч*. Так же луч можно построить с помощью инструмента «линейка» со значком .

2. Если построена точка O и отрезок AB, то построена окружность *с* центром в точке O и радиусом AB, а также любая из дуг этой окружности.

Для построения окружности достаточно выделить центр и радиус окружности, и на панели меню выбрать команду *Построения – Окружность по центру и радиусу*. Так же окружность можно построить выделив его центр и одну из точек окружности, и выбрать команду из панели меню *Построения – Окружность по центру и точке*. Построить абсолютно любую окружность можно так же с помощью инструмента «циркуль» со значком .

3. Если построены две прямые, то построена точка их пересечения (если она существует).

Для того чтобы построить пересечение достаточно выделить данные прямые, и выбрать команду *Построения – Пересечение*.

4. Если построена прямая и окружность, то построена любая из точек их пересечения (если она существует).

Для того чтобы построить пересечение прямой и окружности достаточно выделить данные прямую и окружность, и выбрать команду *Построения – Пересечение*.

5. Если построены две окружности, то построена любая из точек их пересечения (если она существует).

Для того чтобы построить пересечение двух окружностей достаточно выделить данные окружности, и выбрать команду *Построения – Пересечение*.

Некоторые основные построения в программе «Живая геометрия» так же можно выполнить с помощью определенных команд.

- Построить луч, делящий данный угол пополам, можно выделив точки последовательно и выбрав команду *Построения – Биссектриса*.
- Для того чтобы построить отрезок, равный данному отрезку, достаточно построить окружность с центром в начале луча и радиусом, равный этому отрезку. Отрезок от начала луча до точки пересечения окружности и луча будет отрезок, равный данному отрезку.
- Для построения угла равного данному, достаточно выполнить следующие действия. Выделить последовательно точки A, B и C, и выбрать команду *Преобразования – Отметить угол*. Затем отмечаете определенную точку центром поворота, двумя щелчками левой кнопкой мыши. Выделите центр и точку, и нажмите на панели меню *Преобразования – Поворот*. В появившемся окне требуется указать «повернуть на отмеченный угол».
- Для построения параллельной прямой достаточно выделить прямую и точку, через которую проходит параллельная прямая, и выбрать на панели меню *Построения – Параллельная прямая*.
- Для построения перпендикулярной прямой достаточно выделить прямую и точку, через которую проходит перпендикулярная прямая, и выбрать на панели меню *Построения – Перпендикуляр*.

2.2. Решение конструктивных задач методом геометрического места точек в программе «Живая геометрия»

При решении задач методом геометрического места точек будем пользоваться основными командами из меню «Построение» и «Вид».

Задача 8. Дан угол ABC и точка M внутри него. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку M[26].

Анализ. Предположим, что задача решена и такая окружность построена (рис. 21). Тогда она удовлетворяет двум условиям:

1) окружность касается сторон угла;
2) окружность проходит через точку M.

Окружность, которая удовлетворяет первому условию можно построить бесконечно много. При том, что центр окружности лежит на биссектрисе угла ABC. Для выполнения второго условия необходимо рассмотреть гомотетию с центром в точке B, которая переводит точку M' в M (рис. 22).

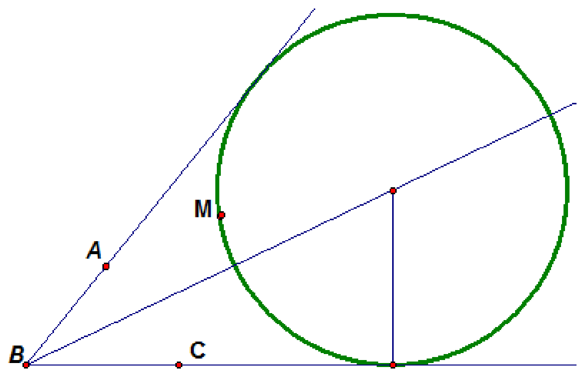


Рис. 21

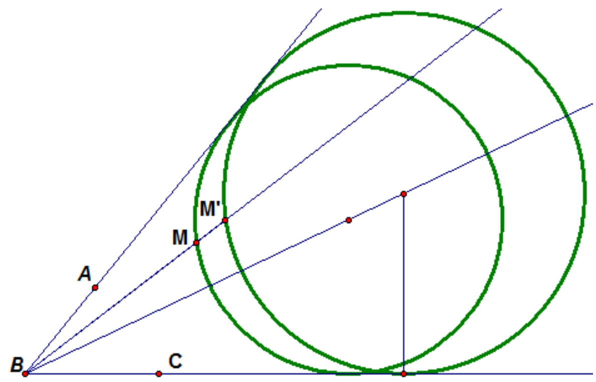


Рис. 22

Построение.

1. Построим окружность ω', которая касается сторон угла ABC.

Для того чтобы построить биссектрису угла ABC выделите по порядку точки A, B и C, и нажмите на панели меню *Построения - Биссектриса*. На биссектрисе отметьте произвольную точку O' - центр окружности ω'.

Определим радиус окружности ω', для этого проведем перпендикуляр к одной из сторон угла ABC. Выделите точку O' и одну из сторон угла, и нажмите на панели меню *Построения – Перпендикуляр*. Выделите точку O' и точку пересечения перпендикуляра и стороны угла ABC, и нажмите на панели меню *Построения – Окружность по центру и точке*.

2. Построим луч BM.

Для того чтобы построить луч достаточно выделить последовательно вершину луча B и точку M, и нажать на панели меню *Построения – Луч*. Выделите луч и окружность ω', и отметьте точки их пересечения, нажав на панели меню *Построения - Пересечение*.

3. Отметим гомотетию с центром в точке B.

Отметьте центр гомотетии B, дважды щелкнув по точке или выделив точку B нажать на панели меню *Преобразования – Отметить центр*. Выделите отрезки BM и BM' нажмите на панели меню *Преобразования – Гомотетия*. В появившемся окне отметьте *«Гомотетия в отмеченном отношении»* и нажмите на кнопку *Гомотетия* (рис. 23).

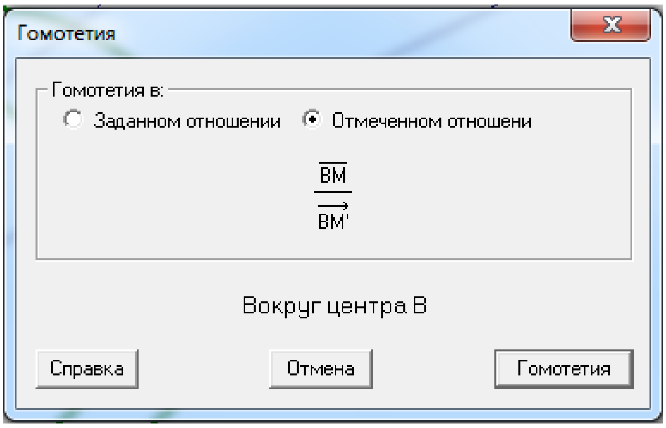


Рис. 23

4. Построим искомую окружность ω по центру O и точке M.

Для того чтобы определить точку O выделите центр O' окружности ω' и нажмите на панели меню *Преобразования – Гомотетия*.

Выделите построенную точку O и данную точку M, и нажмите на панели меню *Построения – Окружность по центру и точке*.

Доказательство. Каждый шаг построения действительно может быть выполнен и построенная окружность удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование. Окружность ω' и луч BM пересекаются в двух точках. Следовательно, задача будет иметь два решения окружности с центрами O_1 и O_2 (рис. 24).

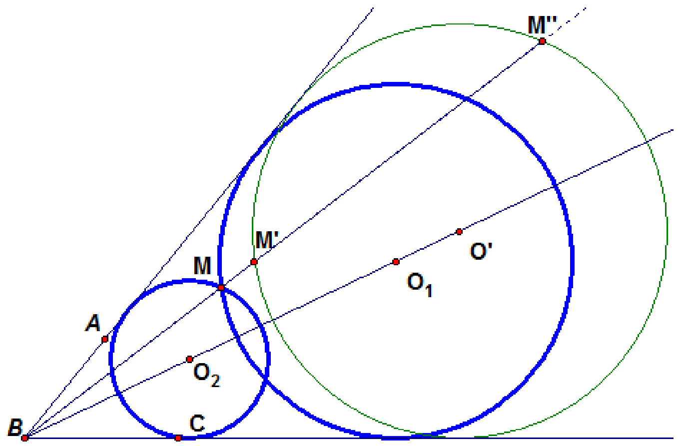


Рис. 24

Задача 9. Впишите в треугольник две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности [26].

Анализ. Из условия задачи следует, что требуется построить две окружности которые должны удовлетворять следующим условиям:

1) окружность ω_1 касается сторон AB и ВС треугольника ABC и касается окружности ω_2;

2) окружность ω_2 касается сторон AC и ВС треугольника ABC и касается окружности ω_1;

3) окружности ω_1 и ω_2 равны.

Построить окружности удовлетворяющие первому условию можем бесконечно много, а для того чтобы выполнялось второе условие достаточно выполнить гомотетию.

Построение.

1. Построим окружность ω'_1 касающуюся сторон треугольника ABC (см. задание 8).

2. Построим окружность ω'_2.

Для того чтобы построить окружность ω'_2 достаточно найти его центр на проведенной через точку O'_1 параллельной прямой к отрезку BC.

3. Построим перпендикуляр к стороне AC через центр O'_2.

4. Построим луч BH.

5. Построим параллельную прямую b к прямой a через точку P (рис. 25).

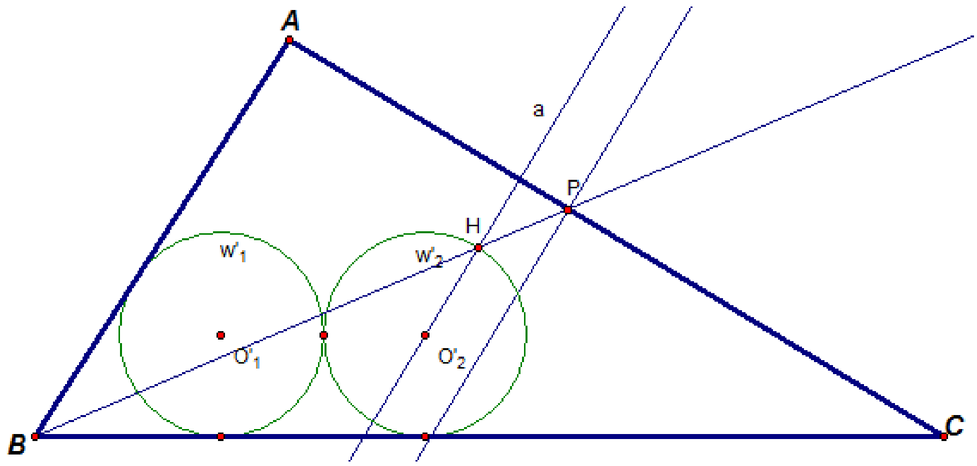


Рис. 25

6. Построим луч BO'_2. Пересечение луча BO'_2 и прямой b является центром O_2 одной из искомых окружностей.

7. Построим окружность по двум точкам O_2 и P.

8. Построим окружность ω_1. Выполняем аналогичные построения, что и на втором шаге (рис. 26).

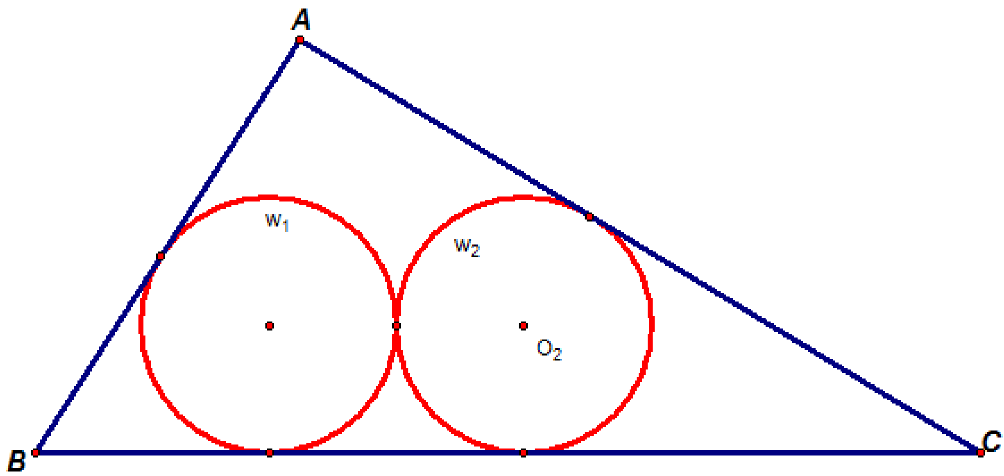


Рис. 26

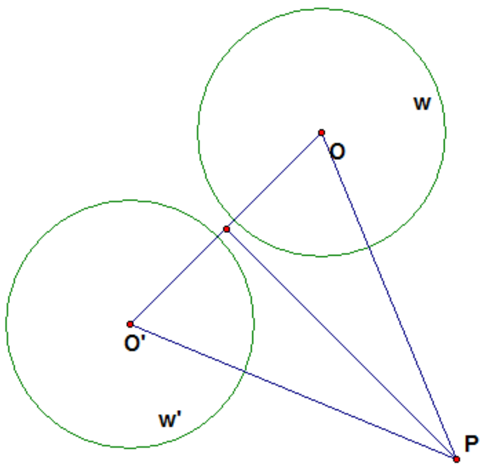
Доказательство. Все шаги построения выполнимы и приводят к решению.

Исследование. Задача имеет единственное решение.

2.3. Решение конструктивных задач методом геометрических преобразований в программе «Живая геометрия»

Задача 10. Даны две равные окружности. Поворотом на 45° одна окружность отображается на другую. Постройте центр поворота [30].

Анализ. Предположим, что задача решена, и центр поворота найден. Тогда при повороте точка O переходит в точку O' и угол $\angle OPO' = 45°$. Задача сводится к построению равнобедренного треугольника с углом при вершине 45° (рис. 27).



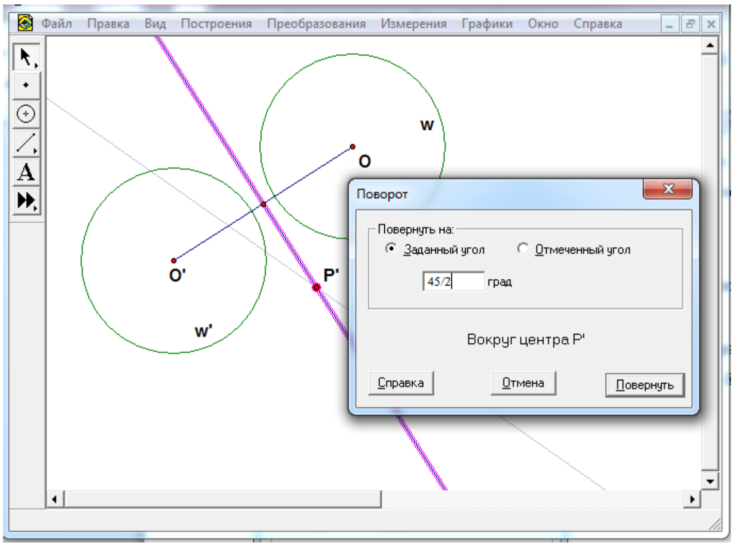


Рис. 27 *Рис. 28*

Построение

1. Построим отрезок OO'.

2. Построим серединный перпендикуляр a к отрезку OO'.

Выделите отрезок OO' и нажмите на панели меню *Построения – Середина*. Выделите точку середины отрезка OO' и сам отрезок, и на панели меню выберите *Построения – Перпендикуляр*.

3. Отметим произвольную точку P' на прямой a.

4. Выполним поворот прямой a относительно центра P' на угол равный половине угла $45°$.

Для того чтобы выполнить поворот достаточно выделить прямую a и центр поворота P', и на панели меню выбрать *Преобразования – Повернуть…*. В появившемся окне «Поворот» задаем угол $45/2$ (рис.28).

5. Через точку O' проведем прямую a'', которая параллельна прямой a'.

Для того чтобы построить параллельную прямую выделите точку O' и прямую a', и на панели меню нажмите на *Построения – Параллельная прямая*.

6. Искомая точка P – точка пересечения прямых a и a''.

Доказательство следует из анализа и построения.

Исследование. Задача имеет решение всегда. Если центры окружностей совпадают, то это будет тождественным преобразованием.

Задача 11. Даны угол и внутри него точки A и B. Постройте параллелограмм, для которого точки A и B – противоположные вершины, а две другие вершины лежат на сторонах угла.

Анализ. Предположим, что задача решена и параллелограмм построен. Тогда центр параллелограмма O является его центром симметрии.

Построение.

1. Построим середину O отрезка AB.

2. Построим прямую a симметричную одной из сторон угла относительно центра O.

Для того чтобы выполнить симметрию достаточно дважды щелкнуть левой кнопкой мыши по центру O и выделив один из лучей выбрать команду *Преобразования – Повернуть*. В появившемся окне указать угол $180°$.

3. Построим точку D симметричную точке C относительно центра O.

Для этого достаточно выделить точку D и выбрать команду *Преобразования – Повернуть*. В появившемся окне указать угол $180°$.

4. Построим параллелограмм $ABCD$ (рис. 29).

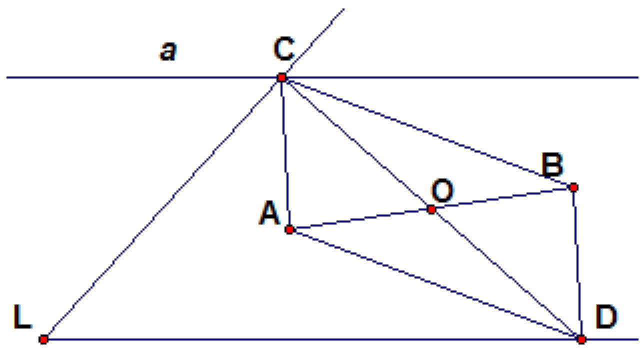


Рис. 29

Доказательство. Все шаги построения выполнимы и приводят к решению задачи.

Исследование. Задача имеет два решения. Может быть построен либо параллелограмм, либо отрезок.

2.4. Решение конструктивных задач алгебраическим методом в программе «Живая геометрия»

Задача 12. Построить круг, площадь которого равна площади кольца между двумя данными концентрическими окружностями [3].

Анализ. Пусть x – радиус искомого круга ω. Предположим, что задача решена и круг построен. Тогда справедливо равенство площадей $\pi x^2 = \pi R_2^2 - \pi R_1^2$, где R_1 и R_2 – радиусы двух данных концентрических окружностей (рис. 27). Откуда выражается радиус круга ω, т.е. $x = \sqrt{R_2^2 - R_1^2}$. Задача сводится к нахождению катета прямоугольного треугольника.

Построение.

1. На произвольной прямой a отметим точку A.
2. Проведем через точку A перпендикуляр b к прямой a.
3. Построим окружность ω_1 с центром в точке A и радиусом R_1 – один из катетов прямоугольного треугольника.
4. Отметим точку B пересечения окружности ω_1 и прямой a.
5. Построим окружность ω_2 с центром в точке B и радиусом R_2 – гипотенуза.
6. Отметим точку С пересечения окружности ω_2 и прямой b.
7. Искомый круг будет иметь радиус равный отрезку AC.

Доказательство каждый шаг построения выполним.

Исследование. Задача имеет единственное решение.

При решении задач на построение алгебраическим методом в программе «Живая геометрия» есть возможность создавать инструменты. Под инструментом подразумевается алгоритм построения того или иного объекта по имеющимся данным. Например, для построения среднего геометрического любых отрезков a и b выполняется определенный алгоритм построения.

Приведем примеры построения таких инструментов.

Пусть нам требуется построить отрезок, длина x которого следующим образом выражается через длины данных отрезков: $x = \sqrt{ab}$.

Анализ. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.

Построение.

1. Построим отрезки AB и KL.

2. Построим луч AB.

3. На луче AB откладываем отрезок KL так, чтобы один конец совпадал с точкой B, а другая точка C лежала не по другую сторону с началом луча (рис.30).

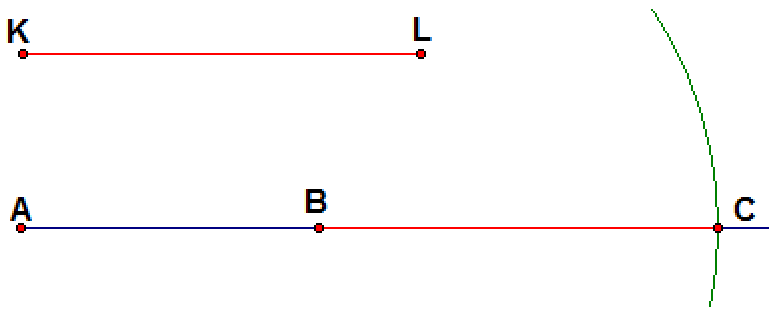


Рис. 30

4. Отмечаем отрезок AC, выделив точки конца отрезка и выбрав команду *Построения – Отрезок*.

5. Отмечаем точку M середины отрезка AC, выделив отрезок и выбрав на панели меню *Построения – Середина*.

6. Построим окружность ω по центру M и точке A, выделив сперва центр затем точку, и выполнив команду *Построения – Окружность по центру и точке*.

7. Через точку B проведем перпендикуляр b к отрезку AC.

8. Отрезок с концами в точках B и одной из точек пересечения перпендикуляра b и окружности ω (рис. 31).

9. Создадим инструмент среднее геометрическое двух отрезков.

Для того чтобы создать инструмент достаточно выделить все построенные объекты и нажать на кнопку «создать новый инструмент» который имеет вид (рис. 32)

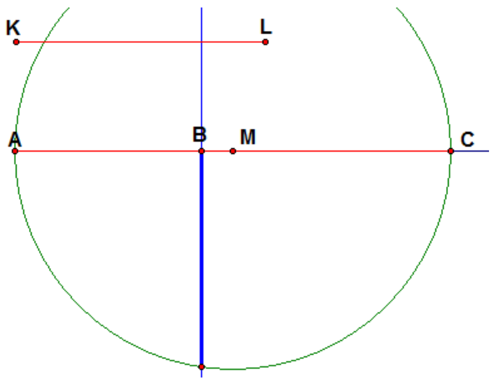


Рис. 31

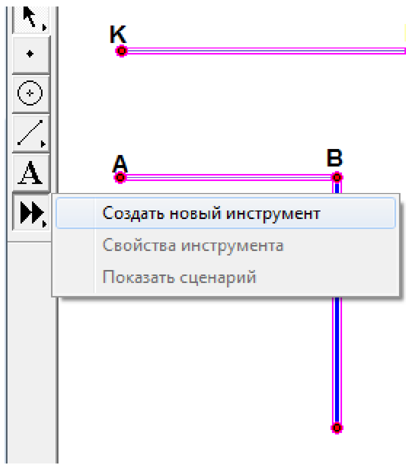


Рис. 32

Создание инструментов, которые заменяют некоторый алгоритм построения, позволяет сэкономить время. Инструменты целесообразно создавать лишь тогда, когда отработано умение выполнять построение того или иного объекта.

Задача 13. Построить квадрат, равновеликий данному параллелограмму.

Анализ. Пусть x – сторона квадрата, тогда его площадь равна $S = x^2$. Площадь параллелограмма равна $S = ah$, где a – основание, а h - высота проведенная к стороне a. По условию задачи $x^2 = ah$, откуда x выражается $x = \sqrt{ah}$, как среднее геометрическое двух отрезков.

Построение.

1. Построим высоту параллелограмма.

Выделите сторону параллелограмма и одну из вершин лежащих против нее, и выполните построение перпендикуляра.

2. Построим среднее геометрическое.

Для того чтобы построить среднее геометрическое достаточно выбрать созданный инструмент и выделить отрезки a и h (рис. 33).

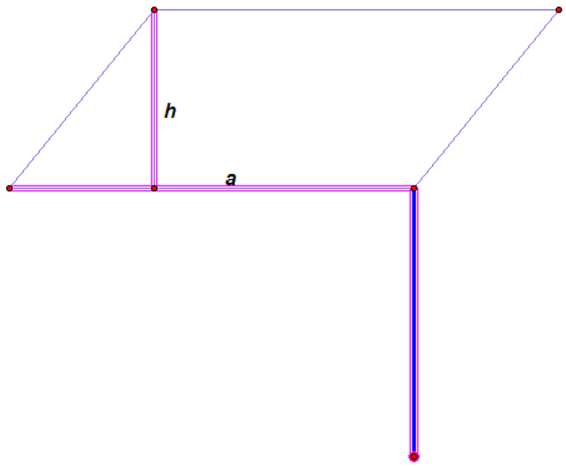


Рис. 33

3. Построим искомый квадрат по стороне.

Доказательство. Каждый шаг построения выполняется однозначно.

Исследование. Задача имеет единственное решение.

2.5. Практическое занятие по теме «Решение задач на построение с использованием программы «Живая геометрия»»

<u>Тема</u>: «Центральная симметрия»

<u>Класс</u>: 8

Учебник: Геометрия. 7 – 9 классы: учебник для общеобразовательных организаций / А.В.Погорелов. – 2-е изд. – М. : Просвещение, 2014. – 240 с.

Технология: системно-деятельностный подход.

Тип урока: открытие нового знания.

Цели:

Образовательная: создать условия для усвоения учащимися понятия симметрия относительно точки, применение центральной симметрии при решении задач на построение.

Развивающая: развитие мыслительной деятельности, культуры математической речи, мотивации практической значимости данной темы, умения сравнивать, выдвигать гипотезы, вести поисковую деятельность и делать выводы.

Воспитательная: воспитание умения слушать и вступать в диалог, работать в группе, творческого отношения к изучаемому предмету.

Оборудование и материалы: компьютер, проектор, программа «Живая геометрия», презентация, линейка, циркуль.

Сценарий урока представлен в таблице.

Сценарий урока

Этапы урока (время)	**Деятельность учителя**	**Деятельность ученика**
1.Мотивация к учебной деятельности (организационный момент) (1-2 мин)	Приветствует учащихся, предлагает проверить готовность рабочего места, наличие чертежных инструментов, организует внимание детей. Обсуждение вопроса: значимость движения (как пример мотивации к деятельности).	Приветствуют учителя, проверяют готовность к уроку, эмоциональный настрой на урок.
2.Актуализация и пробное учебное действие (5 мин)	Организует актуализацию опыта учащихся: предлагает вспомнить свойства движения. Предлагает попытаться доказать, что при движении прямоугольник перейдет в прямоугольник. Предлагает выполнить задание достроить пятиугольник.	Самостоятельно доказывают, что при движении прямоугольник перейдет в прямоугольник.
3.Выявление места и причины затруднения (1 мин)	Организует коммуникативную деятельность учеников по исследованию возникшей проблемной ситуации в форме беседы и подводит учащихся к выявлению места и причины затруднения.	Сталкиваются с затруднением, поскольку не знают как построить симметрию относительно точки.
4.Формулировка проблемы. Постановка учебной задачи (цели урока). Планирование деятельности. (1 мин)	Обеспечивает принятие учащимися целей урока: предлагает сформулировать тему и цели урока.	Формулируют проблему. Формулируют тему урока, ставят цель урока.
5. Открытие новых знаний и способов действия (15 мин)	Предлагает работу в парах. Дает готовый раздаточный материал. Предлагает найти центры симметрии данных фигур. Подводит учащихся к тому, что гипотеза верна, посредством сравнения результатов микрогрупп. Просит доказать данную теорему. Организует обсуждение получившихся доказательств. Просит открыть учебники и сравнить свое доказательство с доказательством из учебника.	Выполняют работу в парах. Находят центры симметрии. Приходят к выводу, что симметрия относительно точки является движением. Доказывают теорему. Доказательство оформляют в

		тетради. Обсуждают доказательство. Сравнивают свое доказательство с доказательством, представленным в учебнике.
6.Воспроизведение изученного и его применение в стандартных ситуациях с проговариванием во внешней речи, первичное закрепление (7 мин)	Организует усвоение учениками нового способа действий с проговариванием, путем решения задач.	Выполняют задания сначала фронтально с проговариванием алгоритма вслух, затем в парах.
7.Самостоятельное выполнение заданий с самопроверкой по эталону (5 мин)	Дает набор задач для решения. Затем после выполнения показывает решение задач, для самопроверки учащимся.	Решают самостоятельно задания, затем каждый самостоятельно сверяет свою работу с эталоном, предложенным учителем.
8. Включение в систему знаний и повторение (7 мин)	Организует обсуждение. Учащимся предлагается сначала решить задачу, которая решается с использованием симметрии относительно точки (прямое использование), а затем задача, в которых нужна изученная тема совместно с ранее изученным материалом.	Ученики под руководством учителя устанавливают, в каких типах заданий симметрия относительно точки может быть использована.
9. Рефлексия учеником своих действий и самооценка (своих действий, интереса к изучаемому, отношение к виду учебной деятельности) (3 мин)	Рефлексия содержания, деятельности. Дает качественную оценку работы класса и отдельных учащихся. Проводит рефлексию с учащимися на предмет содержания, деятельности. Взаимодействия с учителем и одноклассниками на уроке.	Отвечают на поставленные вопросы, оценивают свою работу на уроке, проводят рефлексию.

Примеры задач:

1. Постройте отрезок $A'B'$, симметричный отрезку AB относительно точки C.

2. Постройте угол $A'O'B'$, симметричный углу AOB относительно точки C.

3. Постройте центр поворота, если треугольник $A'B'C'$ симметричен треугольнику ABC.

4. Даны четыре попарно не параллельные прямые и не принадлежащая им точка O. Постройте параллелограмм с центром O, вершины которого лежат по одной из данных прямых.

5. В данную окружность ω вписать прямоугольник так, чтобы прямые, содержащие две его стороны (смежные или противоположные) проходили через две данные точки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Геометрические построения играют серьезную роль в математической подготовке школьника, поскольку они развивают у них пространственное воображение. Так же конструктивные задачи являются хорошим средством подготовки к усвоению понятия алгоритма, который является широко распространенным в современной математике.

В выпускной квалификационной работе представлены сведения о различных методах решения задач на построение, рассмотрены примеры решения конструктивных задач и рассмотрены возможности применения программы «Живая геометрия» при решении задач на построение.

На основе анализа учебно-методической литературы в первой главе представлены краткие сведения о геометрических задачах на построение, об этапах решения конструктивных задач и о следующих методах решения задач на построение:

1) метод геометрического места точек;
2) методы геометрических преобразований;
3) алгебраический метод.

Во второй главе рассмотрены аналоги циркуля и линейки и возможности выполнения элементарных и основных построений в программе «Живая геометрия», а также рассмотрены возможности программы при решении конструктивных задач методом геометрического места точек, методом геометрических преобразований и алгебраическим методом. Так же во второй главе представлена разработка урока открытия новых знаний с применением программы «Живая геометрия».

Таким образом, задачи данной работы были выполнены и цель достигнута. Рассмотрены функциональные возможности применения программы «Живая геометрия» при решении конструктивных задач.

По теме выпускной квалификационной работы были написаны курсовые работы на темы: «Методы решения задач на построение», «Применение программы «Живая геометрия» при решении задач на построение методом геометрических преобразований», «Применение программы «Живая геометрия» при решении задач на построение методом инверсии». Принято участие на Всероссийской научно-практической конференции на темы: «Методы решения задач на построение в программе «Живая геометрия»», «Применение алгебраического метода при решении задач на построение в программе «Живая геометрия»». Так же по результатам исследования опубликованы две статьи [7, 8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адлер А. Теория геометрических построений / А. Адлер. – М.: Учпедгиз, 1940. – 232 с.
2. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение с решениями: пособие для учителей средней школы / И.И. Александров. – 19-е изд. – М: Учпедгиз, 1954. – 175 с.
3. Андреева З.И. Практикум по геометрическим построениям: учеб. пособие для студентов пединститута / З.И. Андреева. – М.: ПГПИ, 1992. – 58 с.
4. Аргунов Б.И. Задачник-практикум по геометрии : учеб. пособие. / Б.И. Аргунов, И.Н. Демидова, В.Н. Литвиненко. – М.: Просвещение, 1979. – Ч. I. – 122 с.
5. Аргунов Б.И. Геометрические построения на плоскости: пособие для студентов пединститута / Б.И. Аргунов, М.Б. Балк. – М.: Учпедгиз, 1957. – 268 с.
6. Аргунов Б.И. Задачник-практикум по геометрии : учеб. пособие. / Б.И. Аргунов, И.Н. Демидова, В.Н. Литвиненко. – М.: Просвещение, 1979. – Ч. II. – 90 с.
7. Ахмарова И.Н. Методы решения задач на построение в программе «Живая геометрия» / И.Н. Ахмарова // VI Русановские чтения: Всероссийская научно-практическая конференция имени В.Н. Русанова (г. Оса, 20 октября 2016 г.). [Электронный ресурс]. Вып. 6 / под общей редакцией Т.В. Сапожниковой. – МБОУ ДПО «Осинский методический центр». – СПб.: Изд-во «Маматов», 2016. – 56,9 М.
8. Ахмарова И.Н. Решение задач на построение методом инверсии с использованием программы «Живая геометрия» / И.Н. Ахмарова // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: мастер. всерос. науч.-практ. конф. студентов

матем. фак-тов / ред. кол.: И.В. Косолапова; А.Ю. Скорнякова, под общ. ред. А.Ю. Скорняковой; ПГГПУ – Пермь, 2018. – Вып. 11. – 80 с.

9. Бакельман И.Я. Инверсия / И.Я. Бакельман. – М.: Наука, 1966. – 80 с.

10. Блинков А.Д. Геометрические задачи на построение / А.Д. Блинков, Ю.А. Блинков. – М.: МЦНМО, 2010. – 152 с.

11. Геометрия: учеб. для 7–9 кл. общеобразоват.учреждений / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 1995. – 319 с.

12. Заславский А.А. Геометрические преобразования / А.А. Заславский. – М.: МЦНМО, 2004. – 86 с.

13. Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика» / С.Г. Иванов, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2013. – 144 с.

14. Капленко Э.Ф. Сборник задач по геометрии: учеб. пособие / Э.Ф. Капленко, С.Г. Маркова. – Воронеж: ВГПУ, 2010. – Ч. III. Геометрические преобразования плоскости. Метод преобразований решения геометрических задач. – 80 с.

15. Колекция интерактивных задач по геометрии [Электронный ресурс] / М. Коротаев, В. Мищук, С. Поднебесный. – Режим доступа : https://www.euclidea.xyz. (дата обращения: 11 июня 2018 г.)

16. Кошкаров Р. Библиотека Российской академии наук и МЦНМО [Электронный ресурс] / Р. Кошкаров, А. Налогин, Д. Хуторной. – Режим доступа : http://www.math.ru. (дата обращения: 15 июня 2018 г.)

17. Моденов П.С. Геометрические преобразования / П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. – М.: МГУ, 1961. – 230 с.

18. Певзнер С.Л. Движение. Подобие : учеб. пособие для студентов ФМФ / С.Л. Певзнер. – М.: Просвещение, 2001. – 136 с.

19. Певзнер С. Л. Инверсия и ее приложения / С.Л. Певзнер. – М.: Просвещение, 1988. – 81 с.

20. Певзнер С.Л. Аффинные преобразования и методы изображений / С.Л. Певзнер. – М.: Просвещение, 1994. – 75 с.

21. Перепелкин Д.И. Курс элементарной геометрии / Д.И. Перепелкин. – М.: Гостехиздат, 1949. – Ч. II. – 340 с.

22. Перепелкин Д.И. Курс элементарной геометрии / Д.И. Перепелкин. – М.: Гостехиздат, 1948. – Ч. I. – 343 с.

23. Пестерева В.Л. Методика обучения и воспитания (математика): учеб. пособие для организации самостоят. раб. студентов заоч. отд. мат. фак. высш. учеб. заведений, обучающихся по направлению 44.03.01.62 «Пед. образование», профиль «Математика» / В.Л. Пестерева, И.Н. Власова. – Пермь: ПГГПУ, 2015. – 163 с.

24. Погорелов А.В. Геометрия: учеб. для 7–9 кл. общеобразоват. учреждений / А.В. Погорелов. – М.: Просвещение, 2000. – 383 с.

25. Понарин Я.П. Элементарная геометрия: в двух томах / Я.П. Понарин. – Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. – М.: МЦНМО, 2004. – 312 с.

26. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии / В.В. Прасолов. – М.: Наука, 1991. – Ч. I. – 301 с.

27. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии / В.В. Прасолов. – М.: Наука, 1991. – Ч. II.– 212 с.

28. Примерная программа общеобразовательных учреждений по геометрии 7–9 кл., к учебному комплексу для 7–9 кл. / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.В. Кадомцев и др.; сост. Т.А. Бурмистрова – М.: Просвещение, 2008. – 28-29 с.

29. Сборник задач по элементарной геометрии : пособие для пед. ин-ов / Л.С. Атанасян, М.В. Васильева, Г.Б. Гуревич, А.С. Ильин, Т.Л. Козьмина, О.С. Редозубова. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 1970. – 96 с.

30. Ходот Т.Г. Задачи по геометрии : учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / Т.Г. Ходот, И.Д. Захарченко, А.Б. Михайлова. – М.: Академия, 2006. – 256 с.

31. Ченцов Н. Н. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (планиметрия) / Н.Н. Ченцов, Д.О. Шклярский, И.М. Яглом. – М.: Учпедгиз, 1954. – Ч. II. – 267 с.

32. Ченцов Н.Н. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (планиметрия) / Н.Н. Ченцов, Д.О. Шклярский, И.М. Яглом. – М.: Учпедгиз, 1952. – Ч. I. – 380 с.

33. Четверухин Н. Ф. Методы геометрических построений : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов. – 2-е изд. – М.: Учпедгиз, 1952. – 147 с.

34. Шеремет Г.Г. Геометрические преобразования и фрактальная геометрия: учебник / Г.Г. Шеремет; ПГГПУ. – Пермь, 2013. – 188 с.

35. Яглом И.М. Геометрические преобразования / И.М. Яглом. – М.: Гостехиздат, 1955. – Т.I. – 282 с.

36. Яглом И.М. Геометрические преобразования / И.М. Яглом. – М.: Гостехиздат, 1956. – Т. II. – 612 с.