

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра высшей математики

Выпускная квалификационная работа

**ПРОГРАММА «ЖИВАЯ ГЕОМЕТРИЯ» ПРИ ИЗУЧЕНИИ ЛИНИЙ
ВТОРОГО ПОРЯДКА**

Работу выполнила:
студентка 151 группы
направления подготовки 44.03.05
«Педагогическое образование»
(с двумя профилями подготовки),
профили «Математика и
Информатика»,
Афанасьева Ульяна
Владимировна

«Допущена к защите в ГЭК»
Зав. кафедрой

подпись

« ____ » _____ 2018 г.

подпись

Руководитель:
канд. пед. наук, доцент кафедры
высшей математики Шеремет
Галина Геннадьевна

подпись

ПЕРМЬ
2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. ПРОГРАММА ЖИВАЯ ГЕОМЕТРИЯ.....	6
1.1. Из истории возникновения	6
1.2. Интерфейс программы The Geometer's Sketchpad	9
1.3. Возможности программы Живая геометрия	13
Выводы по первой главе	15
ГЛАВА 2. ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В РАЗЛИЧНЫХ ГЕОМЕТРИЯХ ПРИ ПОМОЩИ ПРОГРАММЫ THEGEOMETER'S SKETCHPAD	16
2.1. Кривые второго порядка в геометрии Евклида	16
2.1.1. Решение задачи в геометрии Евклида на нахождение площади четырёхугольника ..	19
2.1.2. Решение задачи в геометрии Евклида на составление уравнения эллипса	24
2.2. Кривые второго порядка в проективной геометрии	30
2.2.1. Проективные свойства кривых 2-го порядка.....	33
2.2.2. Решение конструктивной задачи на основе теоремы Бриансона в программе The Geometer's Sketchpad.....	36
2.2.3. Решение конструктивной задачи на основе теоремы Паскаля в программе The Geometer's Sketchpad.....	40
2.3. Кривые второго порядка в геометрии Н.И. Лобачевского	44
2.3.1. Решение задачи в геометрии Н.И. Лобачевского	47
Выводы ко второй главе	49
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	50
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	52

ВВЕДЕНИЕ

Геометрия – это наука, изучающая формы, размеры и взаимное расположение фигур.

Одним из центральных разделов геометрии является теория кривых второго порядка. Практика показывает, что для построения сложного геометрического чертежа с помощью классических инструментов требуется аккуратность, много сил и времени. На основании этого у обучающихся возникает проблема, связанная с решением задач на построения кривых второго порядка.

Для её решения целесообразно использовать ИКТ. А в частности различные прикладные программы. На сегодняшний день их спектр очень широк: «Cosinor Ellipse 2006», «Компас-3D», «Живая геометрия» и т.д. В педагогических целях, наиболее приемлемо использовать программу «Живая геометрия».

The Geometer's Sketchpad (Живая геометрия) – это набор инструментов для построения чертежей и их исследования. Эта программа дает возможность “открывать” и проверять геометрические факты.

Объектом исследования является применение программы The Geometer's Sketchpad (Живая геометрия) в процессе изучения вузовского курса геометрии, а **предметом** исследования – кривые второго порядка в различных геометриях: проективной, евклидовой и Н. И. Лобачевского.

Цель работы – исследование возможностей применения программы «Живая геометрия» при изучении раздела «Кривые второго порядка» в вузовском курсе геометрии.

Задачи:

1. Изучить историю возникновения и развития программы «Живая геометрия».
2. Описать интерфейс и технические возможности программы.

3. Рассмотреть методы построения кривых второго порядка в программе «Живая геометрия» на основе проективных свойств и определений.

4. Продемонстрировать графическое решение задач.

5. Разработать методическое пособие по решению исследовательских задач с линиями второго порядка в программе «Живая геометрия» (Приложение 1).

Методы исследования:

- анализ учебно-методической литературы по данной теме, обобщение и систематизация проанализированной литературы;
- описание интерфейса программы «Живая геометрия»;
- сравнительный анализ методов построения и версий программ.

Практическая значимость исследования заключается в том, что:

Разработан сборник с подробным описанием и решением задач в программе «Живая геометрия», который может быть использован для проведения практических занятий в вузах среди студентов.

Структура выпускной квалификационной работы:

Во *введении* отмечена актуальность работы, указаны цель и задачи для ее достижения, объект и предмет исследования. Дана краткая структура работы.

В *первой главе* описана история создания программы «Живая геометрия». Подробно описан интерфейс и основные возможности. Рассмотрены основные методы построения кривых второго порядка. Кроме этого, представлена сравнительная характеристика версий программы.

Во *второй главе* рассмотрены задачи на способы построения кривых второго порядка в различных геометриях: проективной, евклидовой, Н. И. Лобачевского. В евклидовой геометрии проиллюстрированы задача на вычисление площади четырехугольника, составление уравнения эллипса. Приведены задачи из проективной геометрии и геометрии Н.И. Лобачевского.

В *заключении* подведены итоги выпускной квалификационной работы, перечислены полученные результаты в ходе исследовательской деятельности.

Результаты работы представлены в двадцати публикациях (Приложение 2); докладах на научно-практических конференциях и конкурсах (Приложения 3 – 4); материалах мастер-классов (Приложение 5).

ГЛАВА 1. ПРОГРАММА ЖИВАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1.1. Из истории возникновения

"Технологии – это всего лишь инструмент" –

Билл Гейтс, основатель корпорации Microsoft.

Одним из таких инструментов является информационно-коммуникационные технологии в области образования, в частности геометрии. Стремительную популярность за последние десятилетия набирает динамическая геометрия.

Динамическая геометрия – это программная среда, с помощью которой можно делать геометрические построения на компьютере так, что при движении первоначальных объектов весь чертёж сохраняется. Чертёж, созданный в среде динамической геометрии, – это модель, которая сохраняет результат построения, исходные данные и алгоритм. При этом все данные легко изменить (можно менять значения числовых данных, перемещать точки, варьировать длины отрезков и т. д.), и результат этих изменений сразу отразится на экране компьютера.

Идея динамической геометрии насчитывает уже около 30 лет. «Работа над динамической геометрией началась в 80-х годах с проекта Cabri (Cahier de Brouillon Informatique), который предполагал создание среды для работы с объектами дискретной математики (графами, булевыми функциями). В конце 80-х в США появилась программа The Geometer's Sketchpad» [30]. После этого появились десятки систем динамической геометрии. Наиболее известные из них: Cinderella (автор Ulrich Kortenkamp), Математический Конструктор (разработано 1С), GEONExT (автор Alfred Wassermann), «The Geometer's Sketchpad» (русифицирована Институтом Новых Технологий и распространялась в России вначале под названием «Живая

геометрия», а затем «Живая математика»). В настоящее время таких программ насчитывается более сорока.

Подробнее остановимся на программе «The Geometer's Sketchpad». «Живая геометрия» – это набор инструментов, который предоставляет все необходимые средства для построения чертежей и их исследования. Она дает возможность «открывать» и проверять геометрические факты. Программа позволяет "оживлять" чертежи, плавно изменяя положение исходных точек.

Основы программы Живая Геометрия были заложены в 1963 году Иваном Сазерлендом. Он совершил революцию в развитие компьютерной графики и программ в целом. За что был удостоен премии Тьюринга в 1988 году и в 2012 Киотской. Иван Сазерленд создал «Альбом» (Робот чертёжник). Данная программа считается родоначальником современных систем автоматизированного проектирования (САПР) программ.

На этой платформе в 1980 году создан исследовательский проект в Свартморском колледже под руководством доктора Евгения Клотца и Дорис Шатшнайдера. Проект был направлен на разработку новых визуальных средств в области геометрии. В результате, в 1991 году в школах США была с успехом апробирована данная программа на учащихся. Что дало мощный толчок для постоянного развития и самосовершенствования The Geometer's Sketchpad.

На данный момент существует пять версий программы The Geometer's Sketchpad. Первая версия программы была выпущена Key Curriculum Press для Macintosh. Вторая версия Sketchpad для Microsoft Windows в 1993 году. В 1995 году третья версия расширила область применения программы не только в Евклидовой геометрии, но и в других. Более значительные изменения произошли в 2001 году, когда четвертая версия Sketchpad расширила спектр возможностей и перешла к изучению не только геометрии, но и алгебры. Что дало возможность студентам использовать программу в качестве инструмента для разработки и развития учебной деятельности.

Сегодня Sketchpad является одной из наиболее широко используемых средств в мире. Академические исследования показали, что использование Sketchpad положительно влияет на успеваемость студентов (Battista, 2002; Hollebrands, 2007), концептуальное понимание (Frekering, 1994), мотивацию и вовлеченность (Sinclair, 2006). Крупномасштабная оценка технологических тенденций в американском образовании, проведенная исследователями в Калифорнийском университете, сообщает, что учителя математики по всей стране находят Sketchpad «самым ценным программным обеспечением для студентов».

За пределами США Sketchpad переведен на многие языки и широко используется в Канаде, Китае, Сингапуре, России, Корее и многих других странах, где он часто интегрирован непосредственно в учебную программу.

1.2. Интерфейс программы The Geometer's Sketchpad

Афоризмы - это интерфейсы, по которым передается оценка и понимание.

Алан. Дж. Перлис

Интерфейс программы «Живая геометрия» минимален и удобен в использовании. На данный момент актуальны две версии «Живая геометрия 4.0» и «Живая геометрия 5.0». Возможности последней программы шире, однако, интерфейс программы полностью на английском языке. Для освоения программы достаточно версии 4.0, для построения более сложных чертежей используем версию 5.0.

Разберём подробнее интерфейс программы The Geometer's Sketchpad 5.0. Рабочее окно состоит из боковой и верхней панели. Рассмотрим основные функции боковой панели (табл. 1).

Таблица 1. Инструменты боковой панели

Инструмент	Назначение
Translation Arrow Tool  Инструмент «Стрелка»	Базовый инструмент для работы с объектами, используется для выделения, фиксации, перемещения, вращения и масштабирования объектов в программе. Автоматически инструмент способен определять точки пересечения объектов
Point Tool  Инструмент «Точка»	Инструмент для построения точек на плоскости. Автоматически инструмент способен определять точки пересечения объектов.
Compass Tool  Инструмент «Компас»	Инструмент используется при построении окружностей различного радиуса по центру и точке на окружности.
Segment Straightedge Tool	Данный инструмент используется для построения отрезков, лучей и прямых.

 Инструмент «Прямая кромка сегмента»	
Polygon Tool  Инструмент «Многоугольник»	Используется для построения многоугольников. Данный инструмент позволяет построить контур, внутренность многоугольника или всё вместе.
Text Tool  Инструмент «Текст»	Инструмент используется для написания текста или буквенных обозначений.
Marker Tool  Инструмент «Маркер»	Инструмент для «произвольного» обозначения, написания букв и выделения тех или иных объектов.
Information Tool  Инструмент «Информация»	В процессе выполнения построений, при наведении данного инструмента на объект, позволяет узнать «историю» элемента.
Custom Tool  Пользовательский инструмент	Необходимый инструмент для создания «новых инструментов». Особенно эффективен при построении объектов в геометрии Н.И. Лобачевского.

Кроме боковой панели, существует верхняя панель инструментов. Рассмотрим основные функции (табл. 2).

Таблица 2. Основные функции верхней панели инструментов

Название	Основные функции
<i>File</i> (Файл)	– сохранение документа на диск; – добавление новой рабочей страницы в документ; – открытие файла; – печать документа.
<i>Edit</i> (Редактировать)	– возвращение операции на один или несколько шагов назад; – копирование или удаление объекта; – выделение всех объектов или только частей. – выделение «родителей» (объектно-образующих элементов); – выделение «детей» (элементов образованных на базе уже имеющихся объектов).
<i>Display</i> (Дисплей)	– изменение размеров точки или типа линий; – изменение цвета геометрических объектов; – изменение текста; – анимация точки; – возможность «спрятать» объекты; – возможность «спрятать» все объекты.
<i>Construct</i> (Построения)	– построение параллельных прямых; – построение середины отрезка; – построение перпендикулярных прямых; – построение окружности по центру и точке; – построение окружности по центру и радиусу; – построение дуги по трём точкам; – построение дуги с помощью окружности; – геометрическое место точек (ГМТ).
<i>Transforms</i> (Трансформация)	– задание «центра»; – функция «отразить»; – «угол метки»; – задание коэффициента «отношения»; – задание «вектора»; – функция «вращать объекты»;

	– «итерация (повторения)».
<i>Measure</i> (Мера)	– вычисление длины; – вычисление расстояния; – вычисление периметра фигуры; – вычисление радиуса окружности; – вычисление угла фигуры; – вычисление угла дуги; – вычисление длины дуги; – отношение; – вычисление значения в точке; – вычисление расстояния между координатами; – составление уравнения.
<i>Number</i> (Число)	– введение нового параметра; – калькулятор; – построение новой функции; – добавление данные таблицы; – удаление данные таблицы; – определение производной функции.
<i>Graph</i> (Графики)	– определение координатной системы координат (полярной или прямоугольной систем); – построение пунктирной сетки; – нахождение координат точки; – построение параметрической кривой.
<i>Window</i> (Окно)	– расположение диалогового окна (каскад или плитка) – переключение с одного рабочего листа на другой.
<i>Help</i> (Помощь)	– ссылка на учебный центр; – ссылка на справочный центр; – справка про объекты и инструменты программы; – технические характеристики программы; – «о программе».

Интерфейс программы Живая геометрия прост в использовании и обладает широким рядом функций.

1.3. Возможности программы Живая геометрия

Основными методами построения в программе являются: «Геометрическое место точек» и «След объекта» (табл. 3).

Таблица 3. Сравнение методов построения

Свойство изображения	«След»	ГМТ
Наглядность построения	Каждая из точек, двигаясь, прорисовывает часть или эллипс целиком. Наглядно иллюстрирует построение	ГМТ строится сразу, наглядно изменение положения точки эллипса от изменения положения определяющей точки на отрезке не представлено
Воспроизводимость изображения после сохранения и закрытия файла	Изображение <i>следа</i> не сохраняется. Анимацию определяющей точки следует запускать при каждом открытии файла.	Изображение, выполненное в результате ГМТ, является составляющей чертежа и автоматически сохраняется.
Возможность проведения исследований в зависимости от свойств и начальных данных	Изменение начальных данных приводит к загрязнению чертежа.	Можно исследовать изменение формы математического объекта.
Возможность построения более сложных чертежей, на «базовой» основе.	Нельзя использовать для построения других изображений.	Можно использовать для построения плоских чертежей.

След объекта оптимально использовать для демонстрации построения какого-либо объекта. Во всех остальных случаях эффективнее применять команду «Геометрическое место точек». В результате при графическом решении задач используется ГМТ. Особенности данных методов построения представлены в (табл. 4).

Однако на возможности построения геометрических объектов влияют не только методы, но и версии программы «Живая геометрия». В настоящий момент наиболее популярны две. Сравнительная характеристика представлена в (табл. 5).

Таблица 4. Методы построения эллипса

Построение с помощью "Следа"	Построение эллипса с помощью команды "Геометрическое место точек"

Таблица 5. Сравнительная характеристика 4 и 5 версии программы «Живая геометрия»

	Живая геометрия 4.0	Живая геометрия 5.0
Построение вершин эллипса	Нельзя построить точки пересечения прямой и объекта, являющегося геометрическим местом точек.	Можно построить точки пересечения эллипса с малой осью, но нельзя построить вершины на большой оси, так как эллипс представляет собой две половины.
Построение касательной к эллипсу	Нельзя построить касательную как прямую, параллельную сопряженному диаметру, т. к. нельзя построить точку пересечения прямой и ГМТ, но можно построить касательную как биссектрису внешнего угла, образованного отрезками, соединяющими точку эллипса с его фокусами, если сами фокусы построены.	Можно построить касательные и как прямую, параллельную сопряженному диаметру, и как биссектрису внешнего угла, образованного отрезками, соединяющими точку эллипса с его фокусами.
Построение образов при движениях плоскости	Можно построить образ любой точки, принадлежащей эллипсу, но нельзя применять команды меню «Преобразования» к объектам, построенным с помощью команды «Геометрическое место точек».	

Спектр возможностей в «Живой геометрии 5.0», значительно шире, чем в «Живой геометрии 4.0». Пользуясь преимуществами пятой версии программы, попробуем их реализовать на практике, в частности при исследовании решения задач в различных геометриях.

Выводы по первой главе

На основе выше изложенного материала, можно прийти к выводу, что впервые программа «Живая Геометрия» появилась в США. Её родоначальником является «отец компьютерной графики» Иван Сазерленд. На протяжении нескольких десятилетий The Geometer's Sketchpad претерпевала ряд изменений. В результате чего, по данным на 2018 год существует пять версий программы. Наиболее актуальна – последняя версия программы «Живая геометрия».

Программа популярна не только в США, но и в других странах, в частности в России. Русифицирована Институтом Новых Технологий и распространялась в нашей стране вначале под названием «Живая геометрия», а затем «Живая математика»

The Geometer's Sketchpad обладает простым и удобным интерфейсом. Особенности программы позволяют строить чертежи не только в Евклидовой геометрии, но и в других.

Основными методами построения математических объектов является *След* и *ГМТ* (геометрическое место точек). Наиболее эффективным при графическом решении задач является геометрическое место точек. Далее рассмотрим непосредственное применение данного метода для решения и исследования задач в различных областях геометрии.

ГЛАВА 2. ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В РАЗЛИЧНЫХ ГЕОМЕТРИЯХ ПРИ ПОМОЩИ ПРОГРАММЫ THEGEOMETER'S SKETCHPAD

2.1. Кривые второго порядка в геометрии Евклида

Кривой второго порядка в геометрии Евклида называется множество точек $M(x; y)$ на плоскости xOy , координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где все коэффициенты – действительные числа, и хотя бы одно из чисел A , B или C отлично от нуля [2, с. 75].

К кривым второго порядка относятся: эллипс, гипербола, парабола.

Построить кривую в программе Живая геометрия можно разными способами, рассмотрим на примере *эллипса*.

Первый способ. Выполнить построение с использованием *канонического уравнения*, оно имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Так как программа не работает с функциями неявного вида, то приводим его к следующему виду:

$$y = \pm \sqrt{b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$$

и построим данную кривую.

Второй способ. Построение кривой по определению.

Определение: эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами [2, с. 64].

Для этого используем *геометрическое место точек*: Задаем две точки F_1 и F_2 – фокусы эллипса, – используя команду «Точка» боковой панели, и отрезок AB , равный сумме расстояний до фокусов, с помощью команды «Линейка», и на этом отрезке – подвижную точку C . Точка C делит отрезок AB на два отрезка, сумма которых будет постоянной величиной вне зависимости от положения точки C . Далее строим две окружности с центрами F_1 и F_2 и радиусами AC и CB соответственно. Отметим точки пересечения этих окружностей, выделив одну из них и точку C , в меню «Построения» выбираем команду «Геометрическое место точек». Результатом выполнения этой команды будет половина эллипса, соответствующая выделенной точке. Повторяя эту команду для второй точки пересечения и точки C , получим полное изображение эллипса (рис. 1).

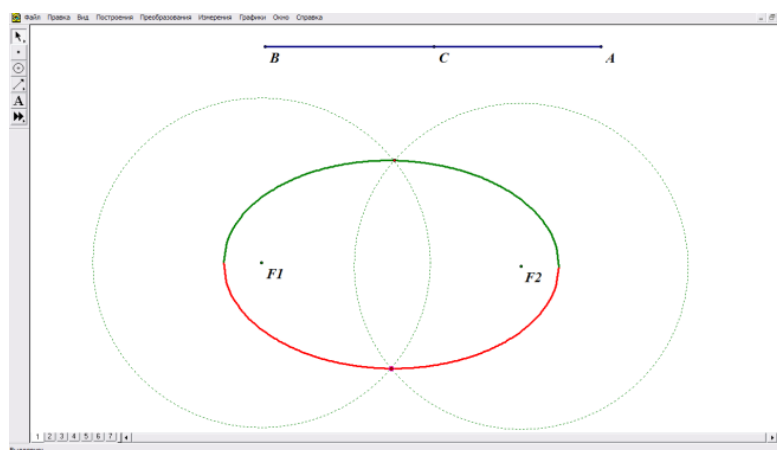


Рис.1

Третий способ. Построение на основе свойств математического объекта.

Эллипс – линия, получающаяся сжатием окружности к ее фиксированному диаметру с коэффициентом сжатия меньшим единицы [2, с. 65]. Строим окружность, используя инструмент «Окружность» левой боковой панели, и любую прямую, проходящую через ее центр. Коэффициент сжатия задаем отношением длин отрезков AB к BC . Для этого строим отрезок AB , задаем точку C , принадлежащую этому отрезку, и строим отрезок BC . Отмечая последовательно инструментом «Стрелка» отрезки BC и AB , в меню «Преобразования» верхней панели выбираем

команду «Отметить отношение». Задаем произвольную точку D на построенной окружности, опускаем перпендикуляр из построенной точки на диаметр окружности (точка G). Эту точку отмечаем как центр (либо двойным кликом мышки по точке, либо используя соответствующую команду в меню «Преобразования»). Выделяя далее точку D , выполняем команду «Гомотетия» верхней панели. Для построенной точки и определяющей ее точки D выполняем команду «Геометрическое место точек», получаем изображение эллипса (рис. 2).

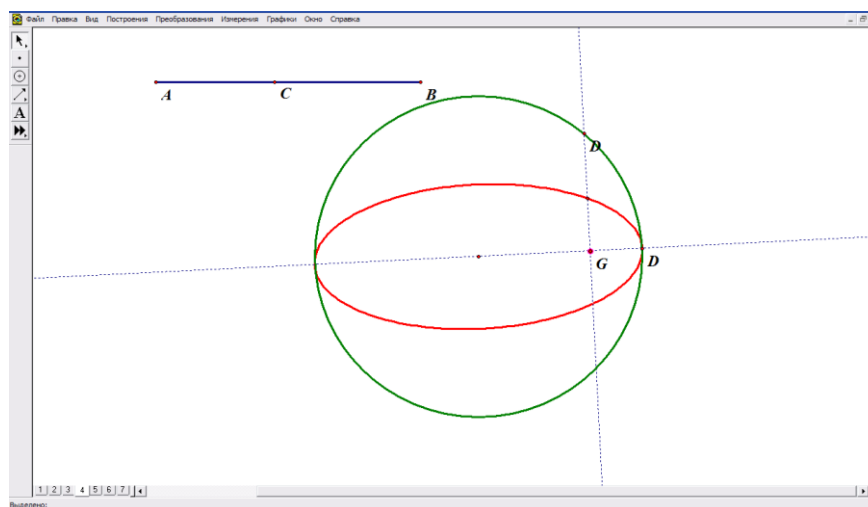


Рис.2

Таким образом, в геометрии Евклида кривую второго порядка можно построить, используя функцию, определение или свойство математического объекта. Но на этом построения не ограничиваются. Рассмотрим возможности программы при решении конкретных задач.

2.1.1. Решение задачи в геометрии Евклида на нахождение площади четырёхугольника

Задача. Вычислить площадь четырёхугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса [20, с. 70].

$$x^2 + 5y^2 = 20,$$

а две другие совпадают с концами его малой оси.

Решение. Для точности полученного ответа продемонстрируем два способа решения задачи: алгебраический (табл.6) и графический (табл. 7).

Таблица 6. I способ

Дано: формула эллипса $x^2 + 5y^2 = 20$		
Решение		Формулы
1	Используя данную формулу, найдем координаты вершин, которые совпадают с концами малой оси. При $x = 0$	$x^2 + 5y^2 = 20,$ $0^2 + 5 \cdot y^2 = 20,$ $5y^2 = 20,$ $y^2 = 4 \Rightarrow$ $y_1 = 2, y_2 = -2.$
2	Аналогично найдем координаты точек, совпадающих с концами большой оси.	$x^2 + 5y^2 = 20,$ $x^2 + 5 \cdot 0^2 = 20,$ $x^2 = 20 \Rightarrow$ $x_1 = 2\sqrt{5}, x_2 = -2\sqrt{5}.$
3	Зная a и b используя основную формулу, найдем на каком расстоянии располагается фокус от центра координат.	$\tilde{n}^2 = a^2 - b^2,$ $c = \sqrt{20 - 4},$ $c = 4.$
4	Искомый четырёхугольник состоит из 4 прямоугольных треугольников (рис.3). Зная высоту и основание, найдем площадь одного треугольника, а затем соответственно и всей искомой фигуры.	$S = \frac{1}{2}ah,$ $S = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4\right) \cdot 4 = 16\tilde{n}^2.$

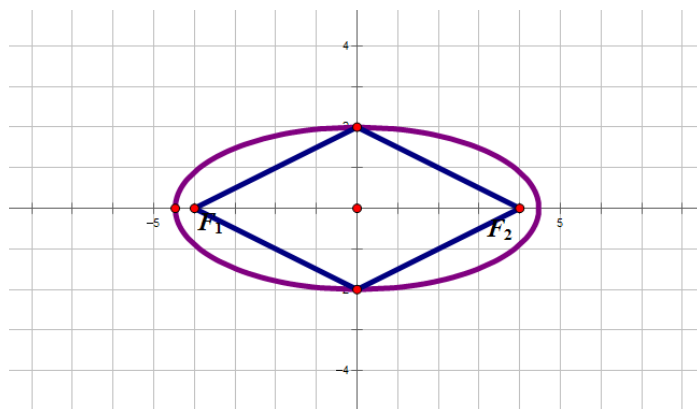
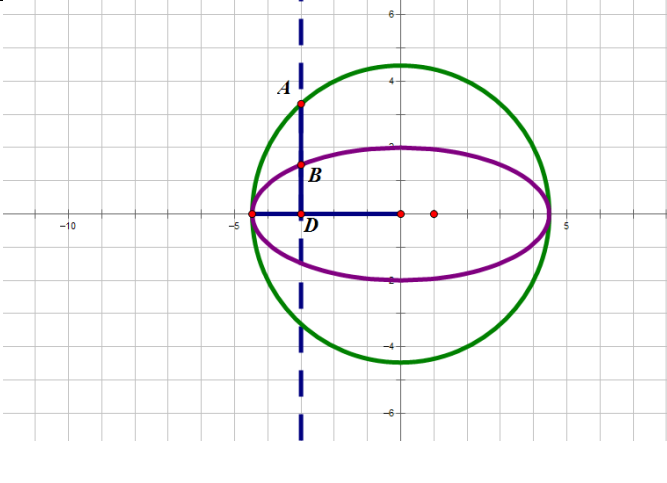
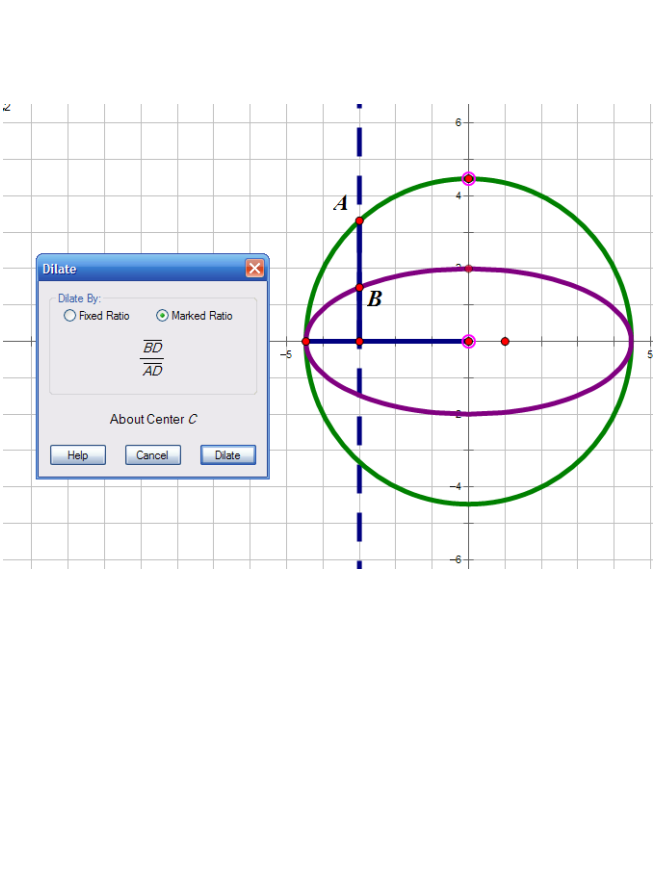
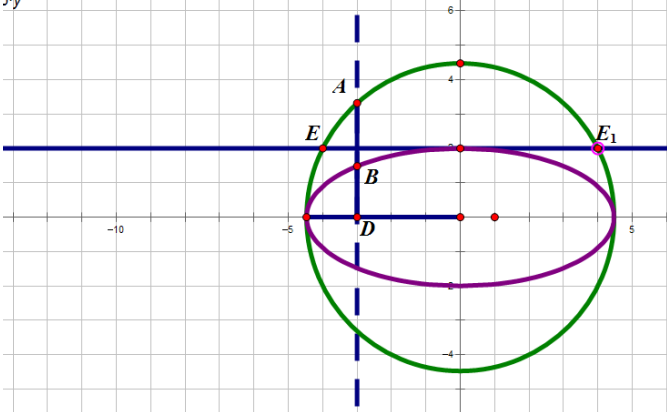


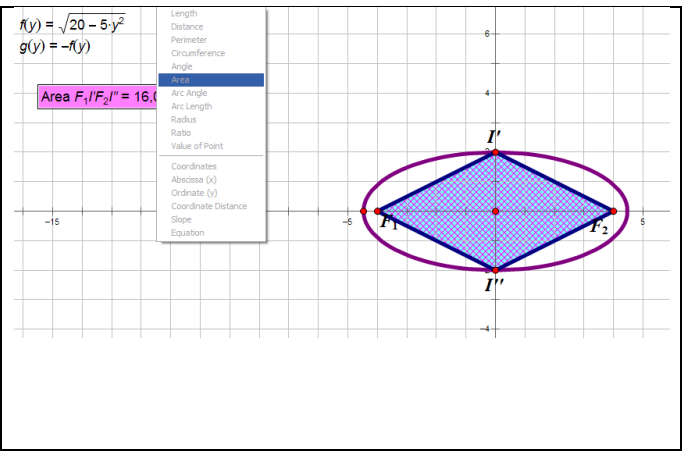
Рис. 3

Таблица 7. II способ

№	Решение	Графическое изображение
1	Задаем систему координат. И чертим график функции Графики (Graph), кнопка Построить график функции (Plot New Function). Помним, что эллипс состоит из двух графиков функции.	
2	Выделим большую полуось эллипса, для этого соединим центр кривой и вершины функция Построения (Construct)/Отрезок (Segment). Через эллипс и полученный отрезок проведем окружность. Меню Построения (Construct)/Окружность по центру и радиусу (Circle by Center + Radius).	

3	На окружности возьмем произвольную точку, через неё относительно полученного отрезка проведём перпендикуляр <i>Построения (Construct)/ Перпендикуляр (Perpendicular Line).</i> Отметим пересечения перпендикуляра эллипса отрезка точки <i>B</i> и <i>D</i>.	
4	Последовательно выделим полученные отрезки <i>DB</i> и <i>DA</i>. Кнопка <i>Преобразования (Transform)/ Отметить отношение отрезков (Mark Segment Ratio)</i>. Кроме того, отметим точку пересечения окружности с осью <i>y</i>. И центр эллипса меню <i>Преобразования (Transform)/Отметить центр (Mark Center)</i>. Выделив полученные точки, воспользуемся кнопкой <i>Преобразования (Transform)/ Гомотетия (Dilate)</i>. Появится «малая» вершина эллипса.	
5	Через полученную точку проведем параллельную линию (см. выше) относительно оси <i>x</i>. Отметим точки <i>E</i> и <i>E₁</i>.	

6	Через полученные точки проведём перпендикуляры относительно оси x . Точки пересечения прямой и данных линий являются <i>фокусами эллипса</i> .	
7	«Спрячем» все лишние объекты кроме фокусов и вершин эллипса. <i>Панель Вид (Display) / Спрятать объекты (Hide Objects)</i> .	
8	Так как вторая вершина отсутствует, отметим её следующим образом: выделим уже полученную нами вершину, и отразим её функция <i>Преобразования (Transform)/Отразить (Rotate)</i> .	
9	Соединим данные точки отрезками. Получим искомый четырёхугольник.	
10	Отметим последовательно точки данного четырёхугольника и отметим его площадь кнопка <i>Построения (Construct)/Внутренняя область (Quadrilateral Interior)</i> .	

11	Для того, чтобы измерить площадь полученной фигуры необходимо выделить полученную область и с помощью панели <i>Измерения</i> (<i>Measure</i>)/ <i>Площадь</i> (<i>Area</i>) вычислить значение искомой площади. Площадь искомой фигуры равна 16 см^2.	 The screenshot shows a graphing calculator interface. On the left, there are function definitions: $f(y) = \sqrt{20 - 5 \cdot y^2}$ and $g(y) = -f(y)$. A menu is open, listing various measurement tools. The 'Area' option is selected, and a text box displays the result: 'Area F1/F2/I' = 16.8'. On the right, a coordinate plane shows a blue shaded diamond-shaped region with vertices labeled F_1, F_2, I', and I''. A purple ellipse is drawn around the diamond. The x-axis ranges from -15 to 5, and the y-axis ranges from -4 to 6.
----	--	--

Полученные ответы совпали, следовательно, задачи решены, верно.

2.1.2. Решение задачи в геометрии Евклида на составление уравнения эллипса

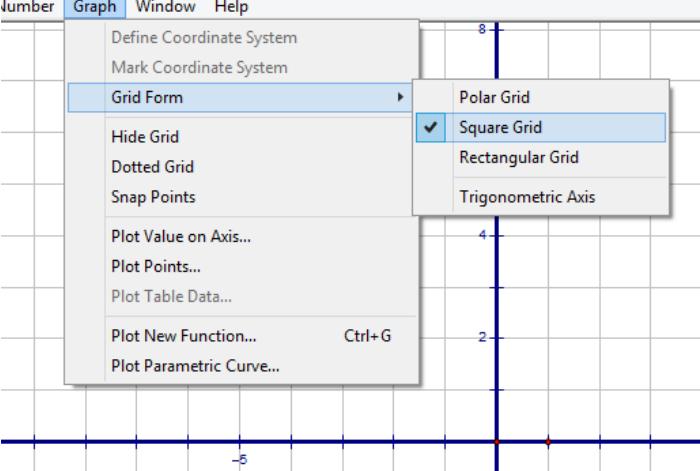
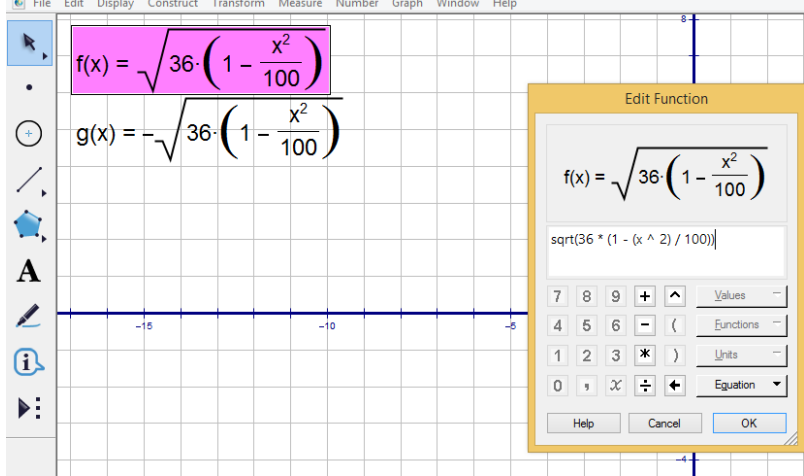
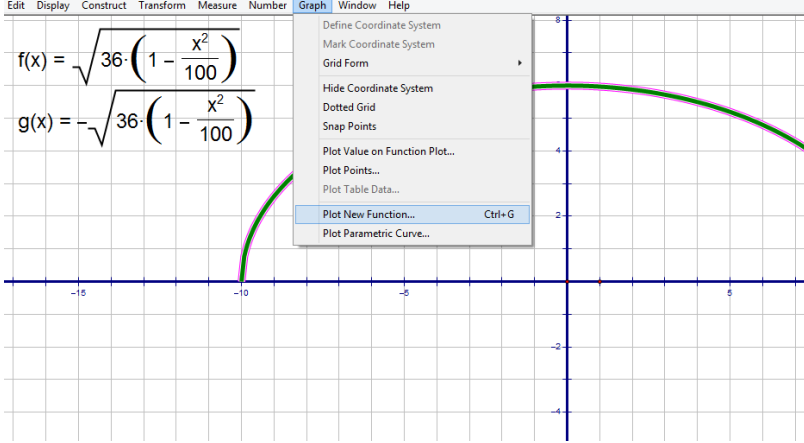
Задача. Составить простейшее уравнение эллипса, зная, что большая полуось равна 10, эксцентриситет $\dot{a} = 0,8$ [27, с.75].

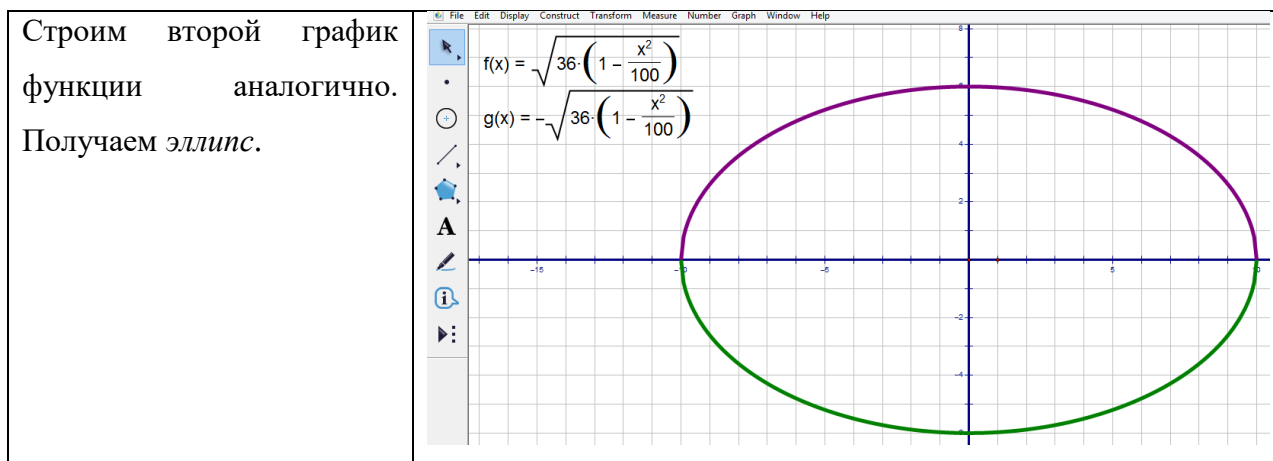
Решение. Аналогично решим задачу двумя способами: алгебраическим (табл.8-9) и графическим (табл. 10).

Таблица 8. I способ

Дано: большая полуось, $\dot{a} = 0,8$.		
Решение		Формулы
1	Воспользуемся формулой нахождения эксцентриситета.	$\dot{a} = \frac{\tilde{n}}{a}$
2	Подставим исходные данные в формулу, найдем c .	$0,8 = \frac{\tilde{n}}{10}, c = 8$
3	Зная c и используя основную формулу, найдем значение малой оси эллипса b .	$b^2 = a^2 + c^2,$ $b = \sqrt{100 - 64},$ $b = 6.$
4	На основе полученных данных составим простейшее уравнение эллипса.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$ $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1,$
5	Для того чтобы построить кривую в программе Живая геометрия, необходимо привести функцию к явному виду.	$y = \pm \sqrt{b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)},$ $y = \pm \sqrt{36 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{100}\right)}.$

Выполним построение функции в программе Живая геометрия.

<i>Построение в программе Живая геометрия</i>	<i>Графическое изображение</i>
Заходим в меню <i>Графики</i> (<i>Graph</i>), кнопка <i>Форма сетки</i> (<i>Grid Form</i>), <i>Прямоугольная сетка</i> (<i>Square Grid</i>).	
В меню <i>Графики</i> (<i>Graph</i>), находим <i>Новая функция</i> (<i>Plot New Function</i>). Вводим полученную нами функцию ранее.	
Выделяем полученную функцию в меню <i>Графики</i> (<i>Graph</i>), кнопка <i>Построить график функции</i> (<i>Plot New Function</i>).	

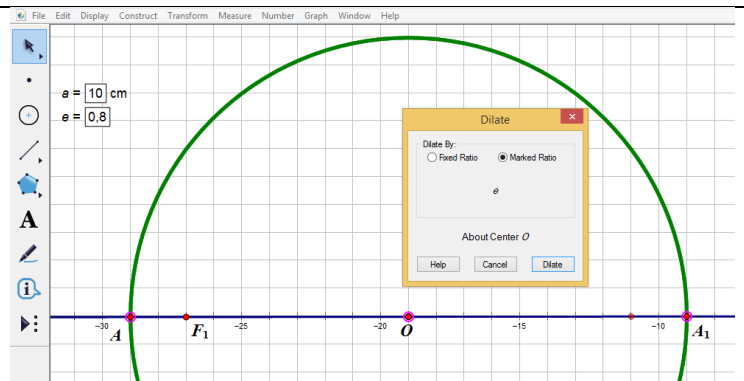


Графическое решение с помощью программы Живая геометрия осуществляется только геометрическим образом, отказываемся от любых расчетов и используем только начальные данные.

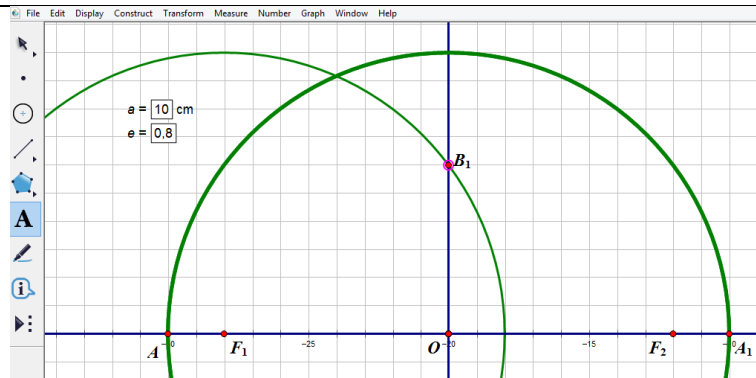
Таблица 10. II способ

Дано: большая полуось $a = 10$, $e = 0,8$.	
Решение	Графическое изображение
Заходим в меню <i>Number</i>, кнопка <i>Новый параметр</i> (<i>New parameter</i>). Вводим известные нам данные.	
Устанавливаем прямоугольную сетку (см. выше). Отмечаем произвольную точку O. По данной точке и радиусу, равному параметру, строим окружность. Меню <i>Построения</i> (<i>Construct</i>)/ <i>Окружность по центру и радиусу</i> (<i>Circle by Center + Radius</i>). Проведём прямую через точку O.	

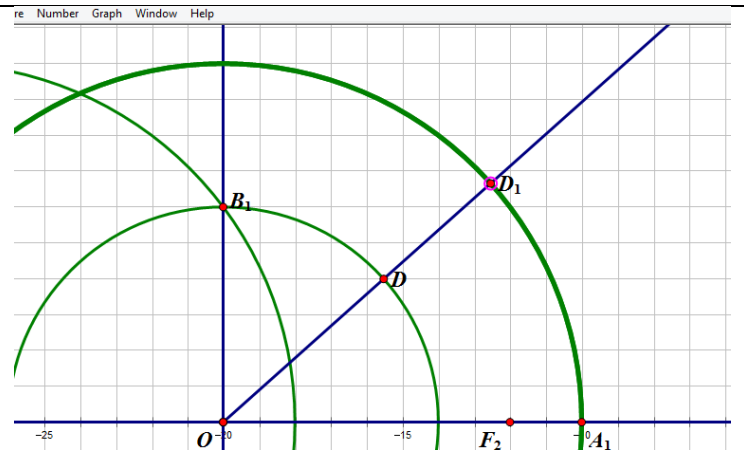
Точку O отметим как центр. *Преобразования (Transform)/ Отметить центр (Mark Center)*. Отметим точки пересечения прямой и окружности A и A_1 . Найдём фокусы эллипса, для этого выделим точки O и Апанель *Преобразования / Гомотетия (Dilate)* и отношение e . Полученную точку назовём F_1 . Аналогично найдем точку F_2 .



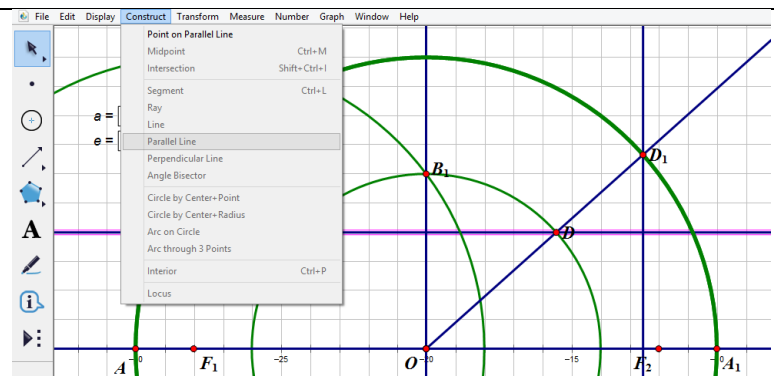
Через полученную точку F_1 проведём окружность, используя параметр a . И через точку O относительно прямой проведём перпендикуляр *Построения (Construct)/ Перпендикуляр (Perpendicular Line)*. Отметим точку пересечения B_1 .



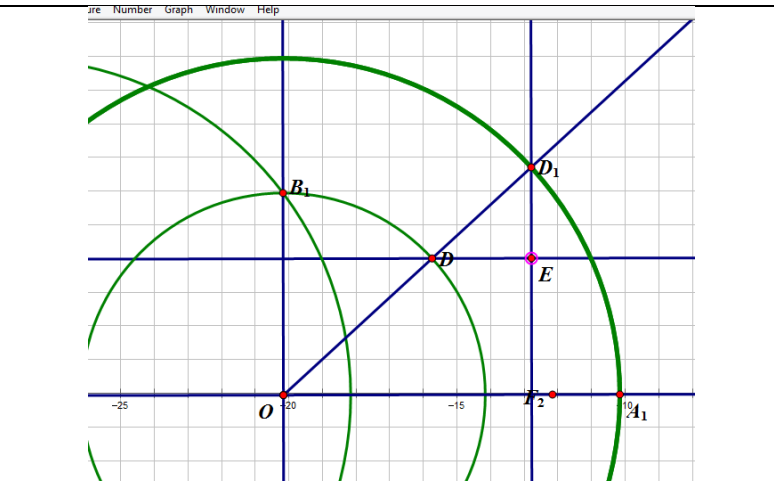
Через полученную точку и точку O проведём окружность (см. выше). На полученной окружности отмети произвольную точку D . Проведём луч, проходящий через данные точки. Отметим точку D_1 – результат пересечения луча и основной окружности.



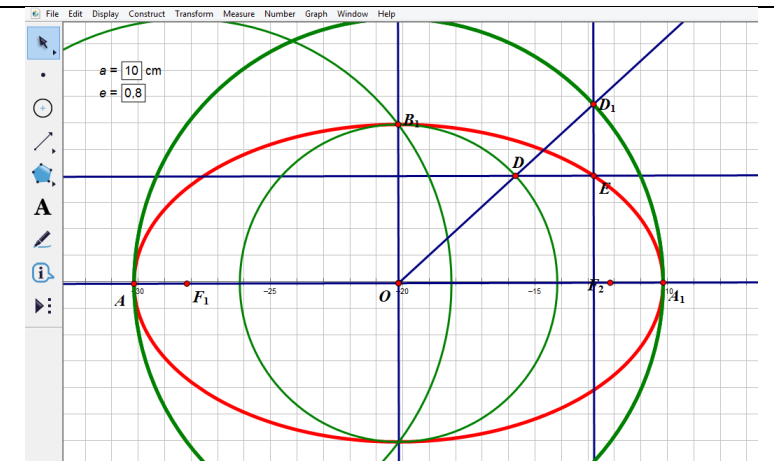
Через полученную точку опустим перпендикуляр к прямой (см. выше), и через точку D проведём прямую, параллельную диаметру. *Построения (Construct)/ (Parallel Line).*



Отметим точку пересечения прямой и перпендикуляра точка E .



Выделим точки E , D и малую окружность *Построения (Construct)/ Геометрическое место точек (Locus).* Получим искомый эллипс.



Для проверки полученного результата данный чертёж разместим в начале координат и сравним с графиком функции (рис. 4). Он совпадает, следовательно, построение выполнено, верно.

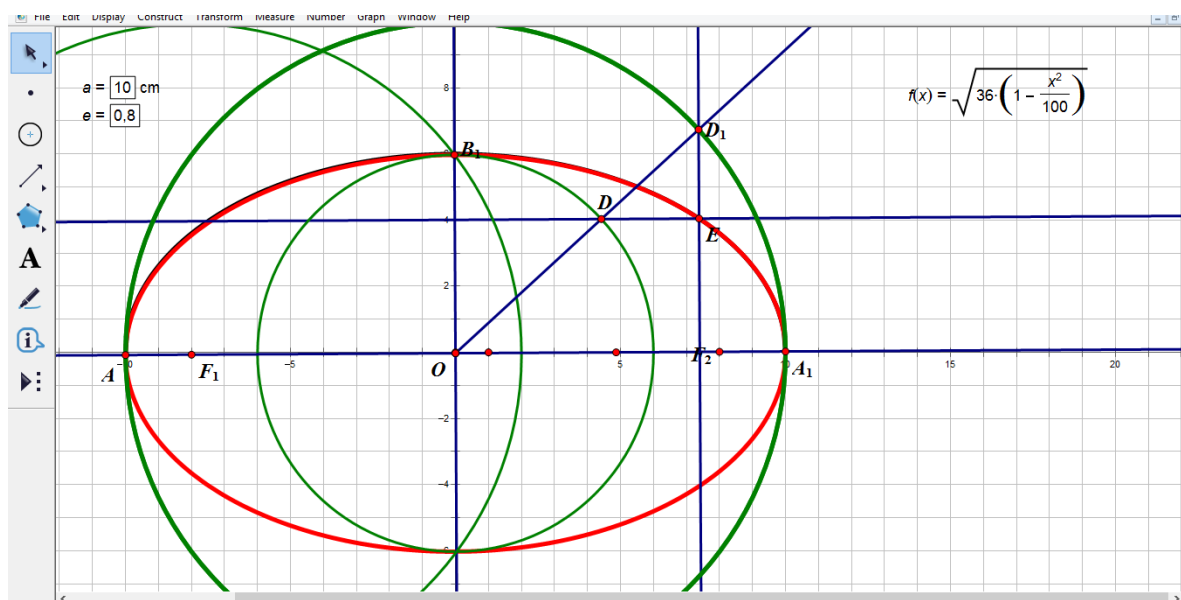


Рис. 4

2.2. Кривые второго порядка в проективной геометрии

Проективная геометрия изучает проективные свойства фигур. Проективные свойства плоской фигуры – это те свойства, которые сохраняются при всевозможных перспективных отображениях.

Перспективное отображение не сохраняет ни длины отрезка, ни середины отрезка, ни меры угла, ни перпендикулярности, ни параллелизма прямых. Поэтому ни циркуль, ни линейка, ни треугольник не являются проективными чертёжными инструментами. Единственным проективным чертёжным инструментом является односторонняя линейка без делений.

Перспективное отображение может переводить параллельные прямые в пересекающиеся и наоборот, т.е. оно не является взаимно однозначным. Это обстоятельство вызывает необходимость подвергнуть евклидово пространство своеобразной реконструкции путем присоединения к нему новых «точек», чтобы в полученном расширенном пространстве перспективное отображение всегда было взаимно однозначным.

Кривой 2-го порядка в проективной геометрии называется геометрическое место точек пересечения собственных прямых двух проективных пучков (центры которых различны).

Пусть S и S' – два проективных пучка:

$$S(a, b, \dots, p, q) \bar{\wedge} S'(a', b', \dots, p', q').$$

И пусть k будет та кривая 2-го порядка, в точках которой пересекаются соответственные прямые этих пучков (рис. 5).

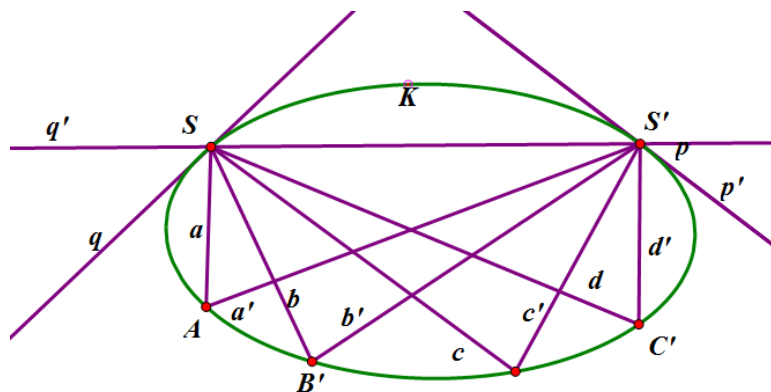


Рис.5

S и S' называются образующими пучками кривой k . Они имеют одну общую прямую $SS' = p = q$. Так как пучки S и S' не перспективны, то их общая прямая не совпадает со своим прообразом q и со своим прообразом; следовательно, точки $S = pq$, $S' = p'q'$, являются пересечением соответственных прямых. Это доказывает, что точки S и S' лежат на кривой k . Итак, *всякая кривая 2-го порядка проходит через центры своих образующих пучков.*

Когда прямая, a непрерывно вращается вокруг точки S , соответствующая прямая a' непрерывно вращается вокруг точки S' , тогда $A = aa'$, описывает непрерывную линию. Когда прямая a , совершив пол-оборота, возвращается в исходное положение, прямая a' и точка A также возвращаются в исходные положения. Отсюда заключаем, что *кривая 2-го порядка есть непрерывная замкнутая линия.*

Все точки кривой 2-го порядка совершенно равноправны и центры образующих пучков ничем на ней не выделяются. Любые две точки кривой могут служить центрами её образующих пучков. Это вытекает из основной теоремы кривых 2-го порядка.

Теорема. *Точки кривой 2-го порядка проектируются из любых двух её точек двумя проективными пучками.*

Доказательство. Возьмем на данной прямой (рис.5) две произвольные точки A и A' . Будем считать соответственными всякую прямую пучка A и прямую пучка A' , которые пересекаются по кривой k . Тогда это соответствие будет проективным.

Обобщим теорему следующим образом: *кривая 2-го порядка определяется заданием любых пяти своих точек или четырёх точек, касательной в одной из них, или трёх точек и касательных в двух из них.*

Геометрическим образом, двойственным кривой 2-го порядка, является пучок 2-го порядка.

Пучком 2-го порядка называется совокупность всех прямых, соединяющих соответственные точки двух проективных рядов (оси которых различны).

Пучок 2-го порядка есть однопараметрическое семейство прямых и потому имеет *оггибающую*, т.е такую линию, для которой все прямые пучка служат касательными и все касательные которые принадлежат пучку. Огибающая пучка 2-го порядка называется *кривой 2-го класса*.

Основная теорема для пучков 2-го порядка. *Прямые второго порядка пересекают две произвольные прямые пучка по двум проективным рядам точек.*

Следствие: Кривая 2-го класса определяется заданием любых пяти своих касательных, или четырёх касательных и очки касания одной из них, или трёх касательных и точек касания двух из них.

2.2.1. Проективные свойства кривых 2-го порядка

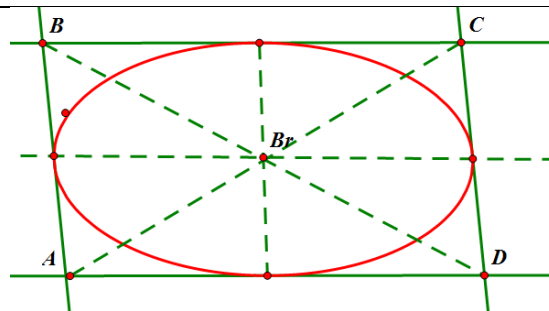
В параграфе 2.2. доказано, что кривая 2-го порядка определяется заданием любых пяти своих точек или четырёх точек, касательной в одной из них, или трёх точек и касательных в двух из них.

На основе пяти точек и касательных можно решать разнообразные конструктивные задачи, с опорой на проективные свойства геометрии. Рассмотрим их подробнее (табл. 11).

Таблица 11. Проективные свойства

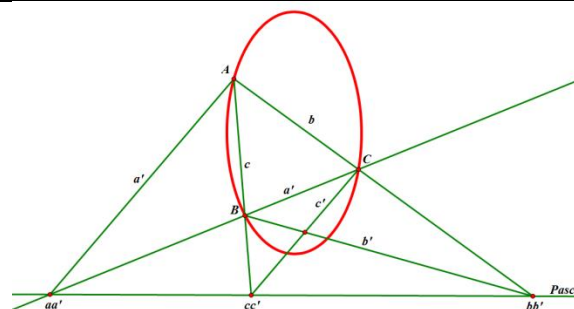
Проективное свойство	Чертёж
1. Теорема Паскаля. Если шестиугольник вписан в кривую 2-го порядка, то три точки пересечения его противоположных сторон лежат на одной прямой	
2. Теорема Брианшона. Если шестиугольник описан около кривой 2-го класса, то три прямые, соединяющие его противоположные вершины, пересекаются в одной точке	
3. Предельный случай для пятиугольника. Если пятиугольник вписан в кривую 2-го порядка, то точки пересечения двух пар его несмежных сторон и точка пересечения пятой стороны с касательной в противоположной вершине лежат на одной прямой.	
4. Предельный случай для четырёхугольника.	

Если четырёхугольник вписан в кривую 2-го порядка, то точки пересечения его противоположных сторон и точки пересечения касательных в противоположных вершинах лежат на одной прямой.



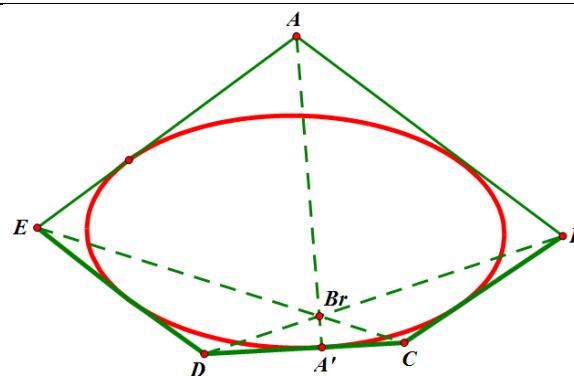
5. Предельный случай для треугольника.

Если треугольник вписан в кривую 2-го порядка, то точки пересечения его сторон с касательными в противоположных вершинах лежат на одной прямой.



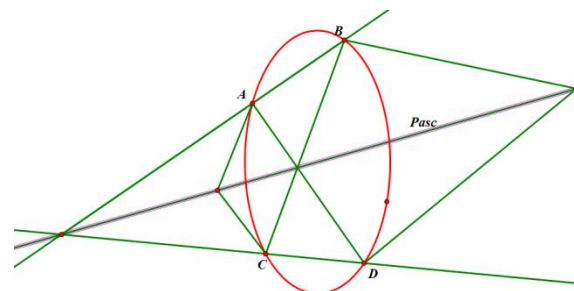
6. Предельный случай для пятисторонника.

Если пятисторонник описан около кривой 2-го класса, то прямые, соединяющие две пары его несмежных вершин, и прямая, соединяющая пятую вершину с точкой прикосновения противоположной стороны, пересекаются в одной точке.



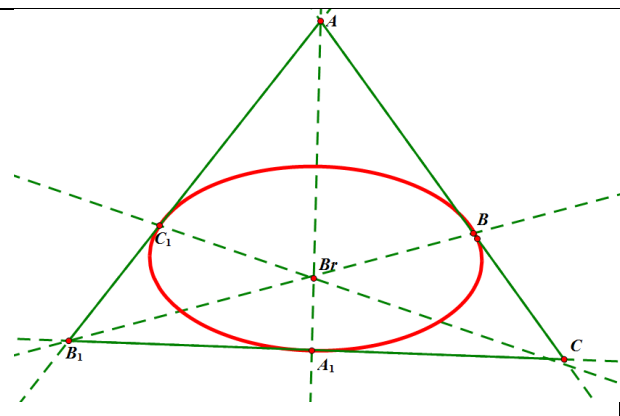
7. Предельный случай для четырёхсторонника.

Если четырёхсторонник описан около кривой 2-го класса, то прямые, соединяющие его противоположные вершины, и прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон, пересекаются в одной точке.



8. Предельный случай для трёхсторонника.

Если трёхсторонник описан около кривой 2-го класса, то прямые, соединяющие его вершины с точками касания противоположных сторон, пересекаются в одной точке.



Проанализировав проективные свойства кривых 2-го порядка можно с уверенностью утверждать, что теорема Паскаля остается в силе тогда, когда две смежные вершины вписанного шестиугольника, перемещаясь по кривой 2-го порядка, в пределе сливаются, а сторона шестиугольника, соединяющая эти вершины, превращается в касательную. А также, теорема Брианшона остается в силе и тогда, когда две смежные стороны описанного шестисторонника, обкатываясь по кривой 2-го класса, в пределе сливаются, а вершина шестисторонника, в которой эти стороны пересекались, превращаются в точку касания.

На основе теоремы Паскаля и Брианшона формулируются теоремы для пятиугольника, четырёхугольника, треугольника, вписанных в кривую 2-го порядка, и соответственно для двойственных фигур, описанных около кривой 2-го порядка.

2.2.2. Решение конструктивной задачи на основе теоремы Брианшона в программе The Geometer's Sketchpad

Задача. Даны пять касательных к кривой 2-го класса. Построить ещё несколько её касательных.

Решение. Анализ. Пусть a, b, c, s, s' – данные пять касательных к кривой 2-го класса, а m – шестая касательная к той же кривой (рис. 6).

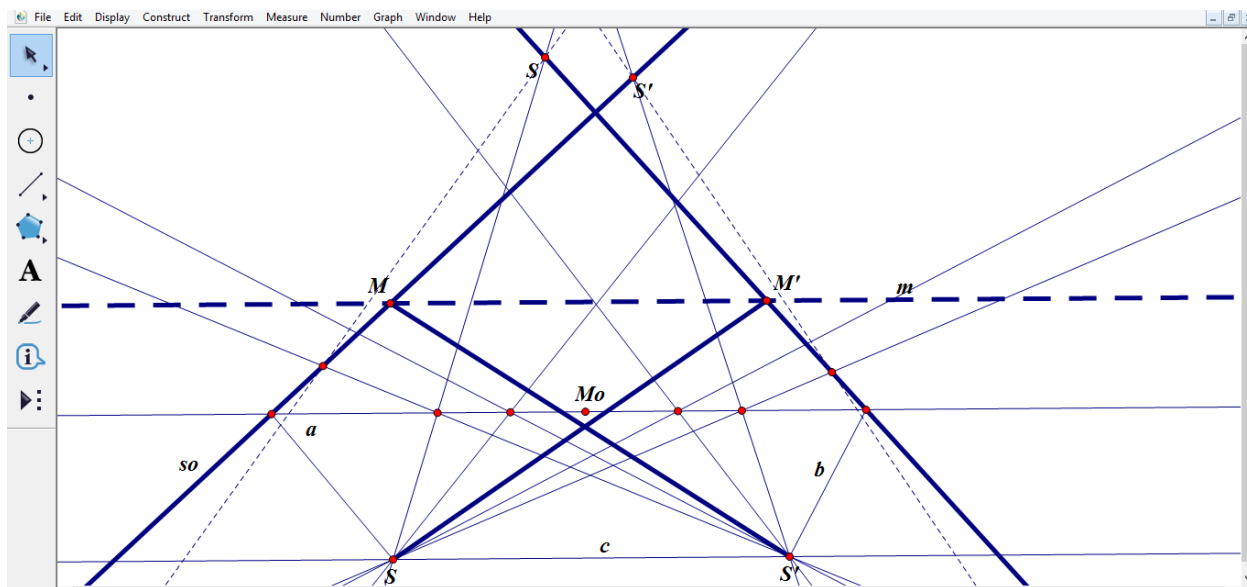


Рис. 6

Рассмотрим описанный шестисторонник $acbsms'$. В силу теоремы Брианшона прямые, соединяющие противоположные вершины $ac \cdot sm$, $cb \cdot ms'$ и $bs \cdot s'a = s_0$ пересекаются в одной точке M_0 – точке Брианшона. Очевидно, прямая s_0 не зависит от выбора прямой m ; следовательно, если заставить касательную m обкатываться по заданной кривой, то точка Брианшона M_0 будет описывать прямую s_0 .

Построение в «Живой геометрии»:

1) Начертим прямые: a, b, c, s, s' с помощью панели инструментов «Прямая». Отметим точки: $ac = S$ и $bc = S'$ (рис. 7).

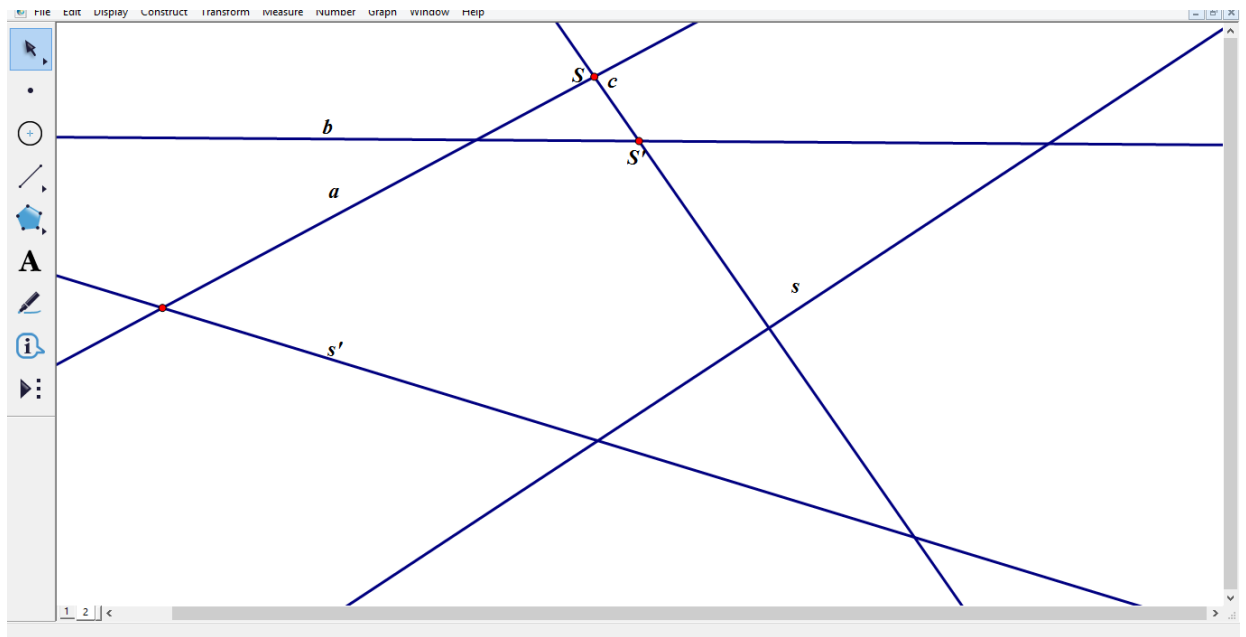


Рис. 7

2) Построим прямую $so = as' \cdot bs$ (пересечение прямых as' и bs). Для этого отметим точки пересечения: на панели инструментов выберем функцию «Построения», команда «Прямая». Возьмём на прямой so произвольную точку M_0 (рис.8).

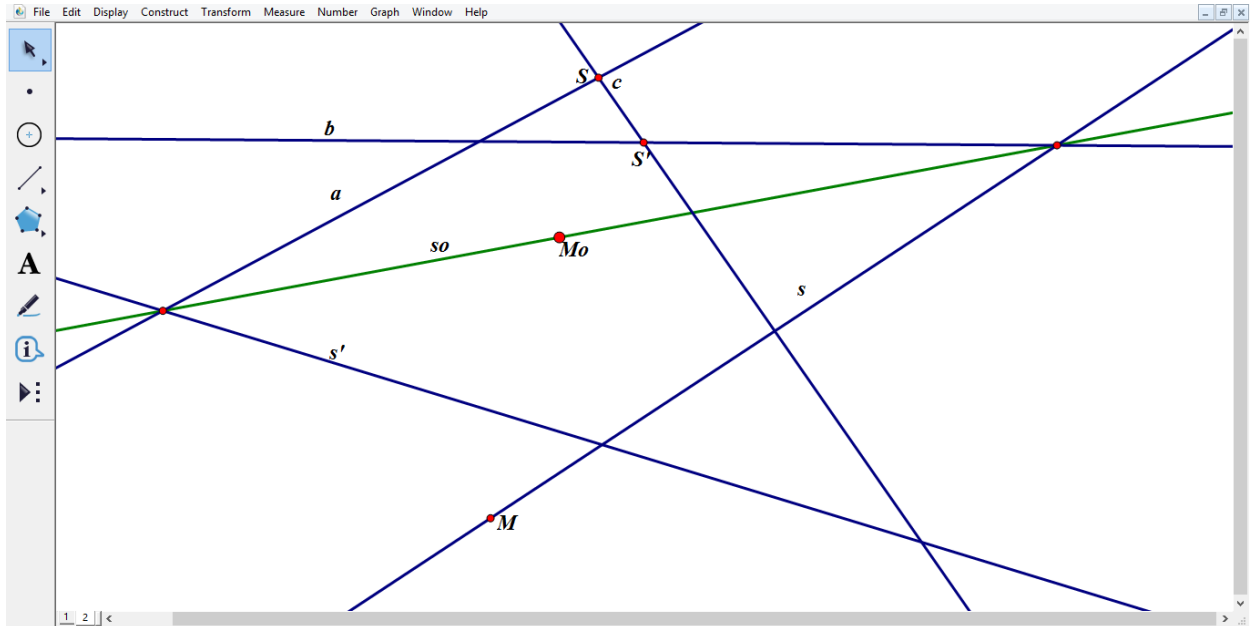


Рис.8

3) Через полученную точку проведем прямые, SM_0 и $S'M_0$; они дадут нам на прямых s и s' две точки: $M = SM_0 \cdot s$ и $M' = S'M_0 \cdot s'$, прямая $MM' = m$ – искомая (рис. 9).

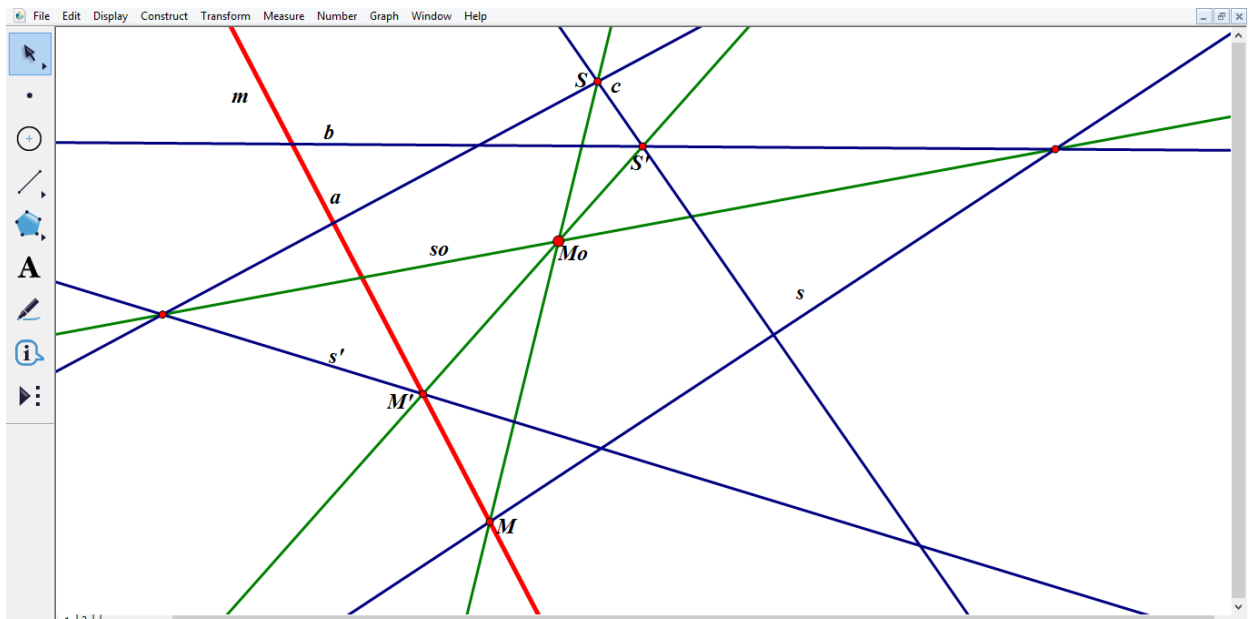


Рис. 9

4) Через прямую m и точку Mo с помощью инструмента *Построения* проведём «Геометрическое место точек», в результате получим линию 2-го порядка – *эллипс* (рис.10).

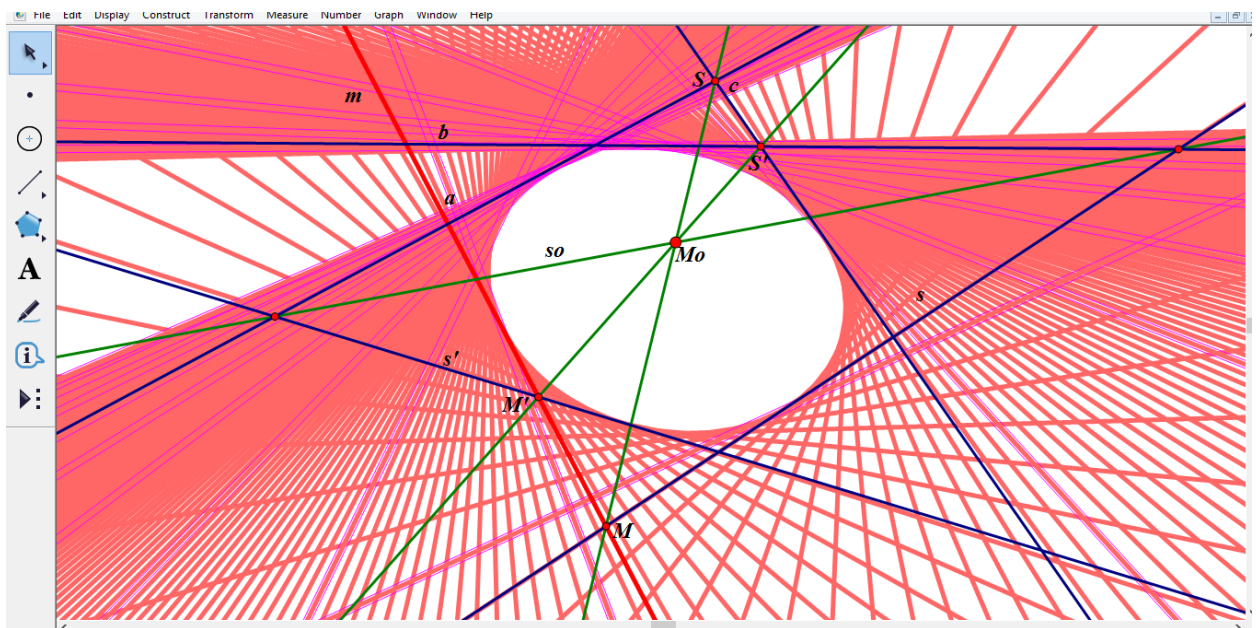


Рис. 10

При движении точек M , M' , S , S' в различных направлениях возникает многообразие линий второго порядка: гипербола и парабола (рис. 11-12).

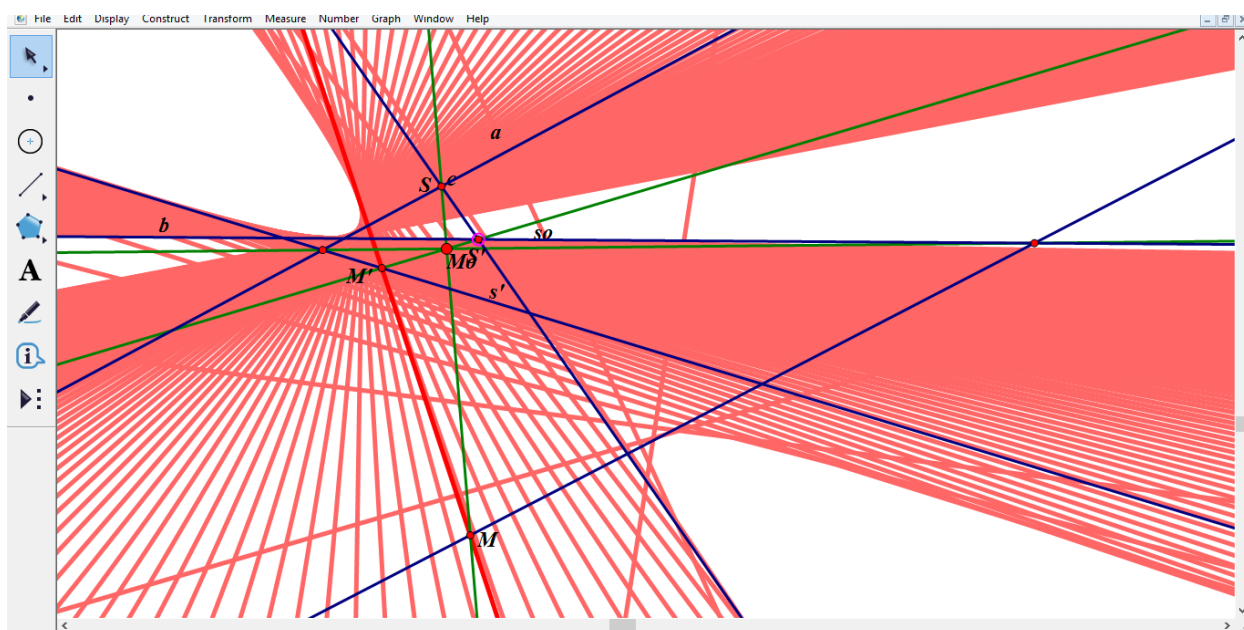


Рис. 11

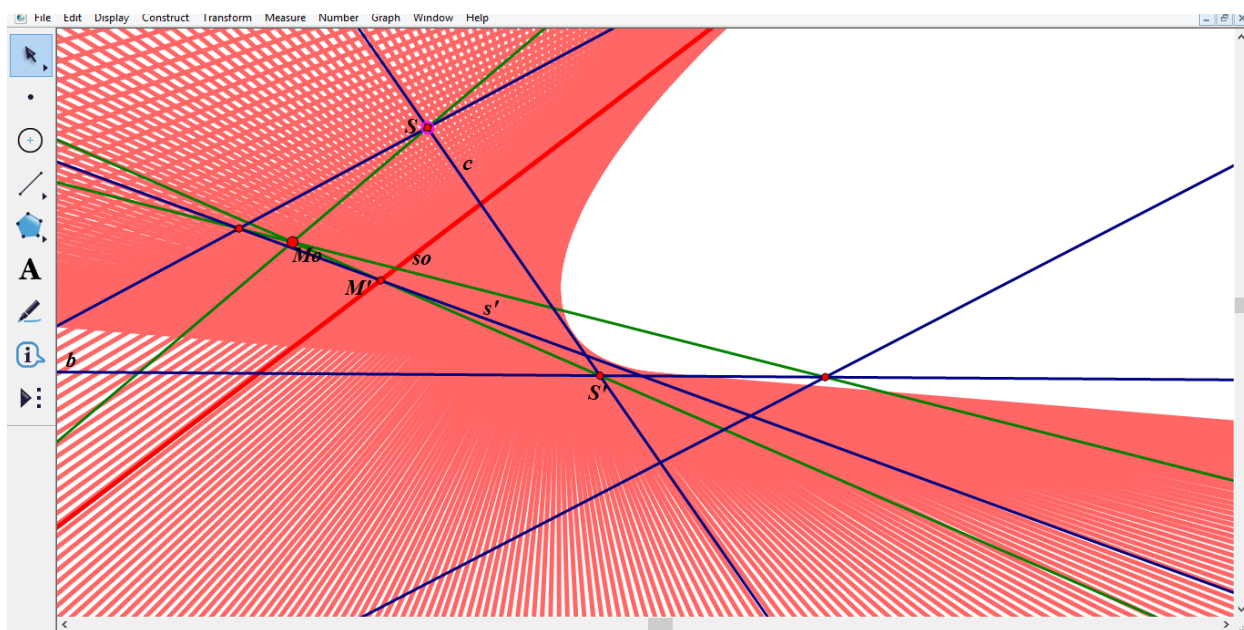


Рис. 12

На основе теоремы Бриансона нам удалось описать и продемонстрировать решение конструктивной задачи в программе «Живая геометрия». Мы наглядно убедились, что, не используя канонические уравнения прямой, строгие научные определения и сведения можно построить линии второго порядка.

2.2.3. Решение конструктивной задачи на основе теоремы Паскаля в программе The Geometer's Sketchpad

Задача. Даны пять точек кривой 2-го порядка. Построить ещё несколько её точек.

Решение. Анализ. Пусть A, B, C, S, S' – данные пять точек кривой 2-го порядка, а M – шестая точка той же кривой (рис. 13).

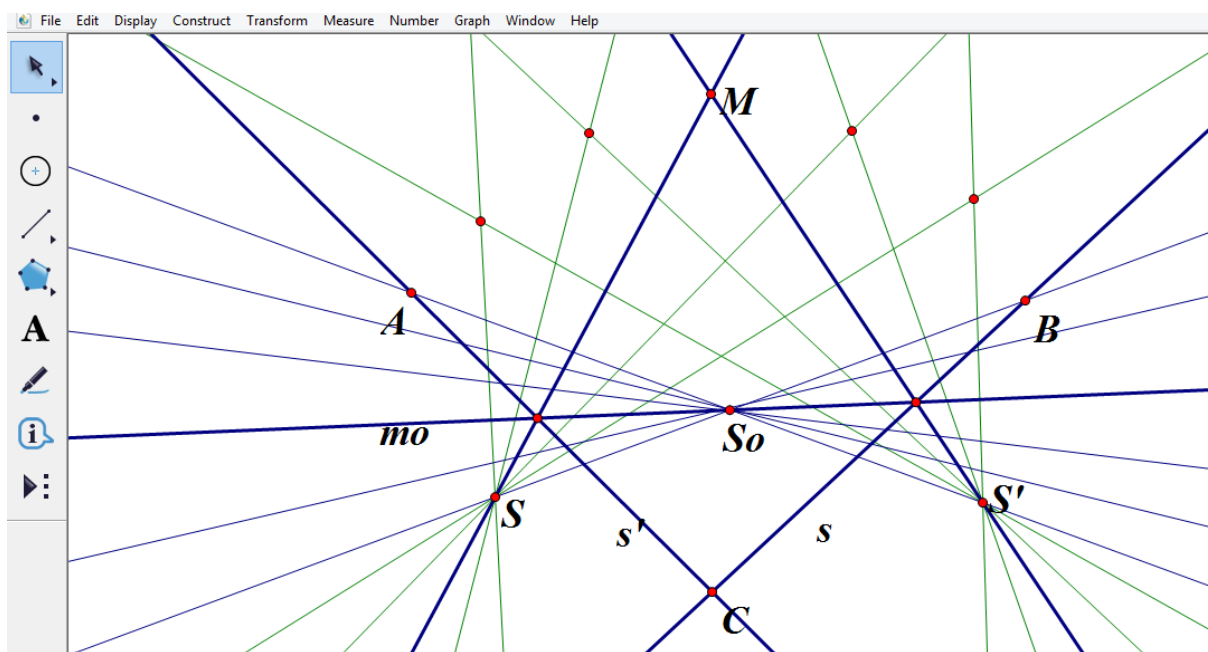


Рис. 13

Рассмотрим вписанный шестиугольник $ACBSMS'$. В силу теоремы Паскаля точки пересечения противоположных сторон шестиугольника $AC \cdot SM$, $CB \cdot MS'$ и $BS \cdot SA' = S_0$ лежат на одной прямой m_0 – прямой Паскаля. Очевидно, точка S_0 не зависит от выбора точки M ; следовательно, если заставить точку M описывать кривую, то прямая Паскаля m_0 будет вращаться вокруг точки S_0 .

Построение в «Живой геометрии»:

1) Отметим точки: A, C, B, S, M, S' . Через точки A, C, B проведём прямые: $AC = s$ и $BC = s'$ с помощью команды *Построения* кнопка *Прямая* (рис. 14).

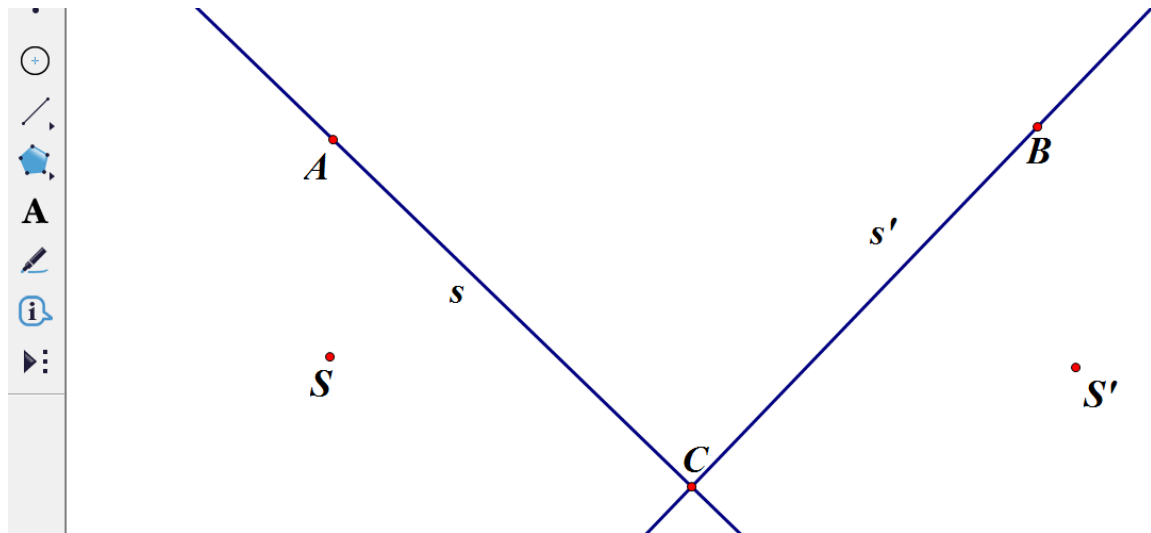


Рис. 14

2) Построим точку $S_0 = AS' \cdot BS$ (пересечение прямых AS' и BS). Затем проведем «произвольную прямую» m_0 . Так как прямая задает геометрическое место точек, то мы ее определим на произвольной окружности с центром в точке s_0 . Окружность построим с помощью инструмента – *окружность* (рис.15). Через центр и точку на окружности L проведем прямую m_0 .

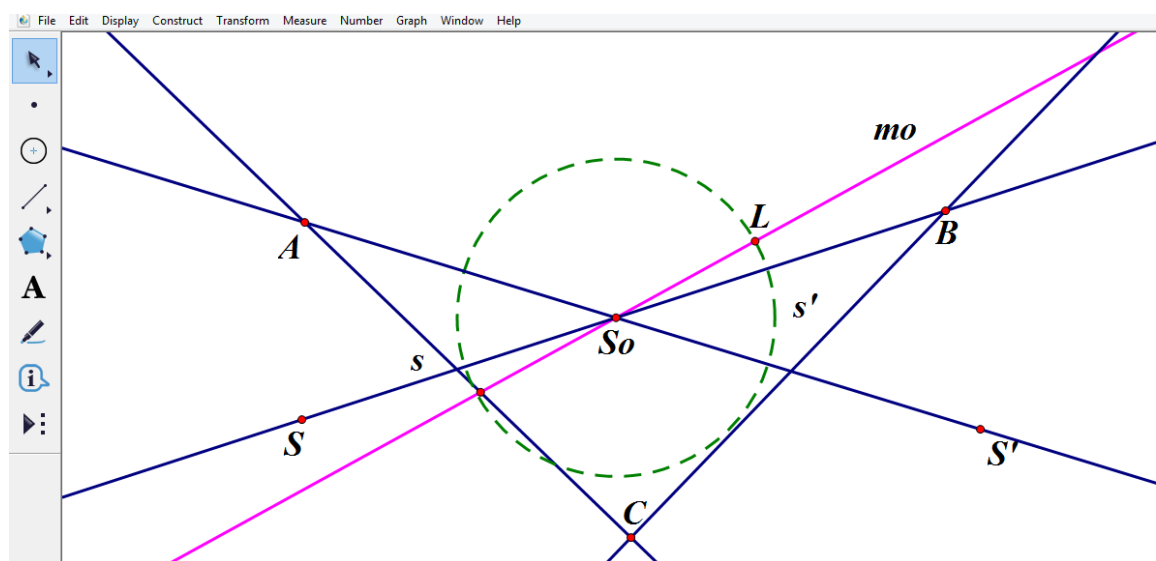


Рис.15

3) Отметим точки mos и mos' полученные в результате пересечения прямой m_0 и s, s' . Через полученные точки проведем прямые $m = S \cdot mos$ и $m' = S' \cdot mos'$, они пересекутся в искомой точке $M = mm'$ (рис. 16).

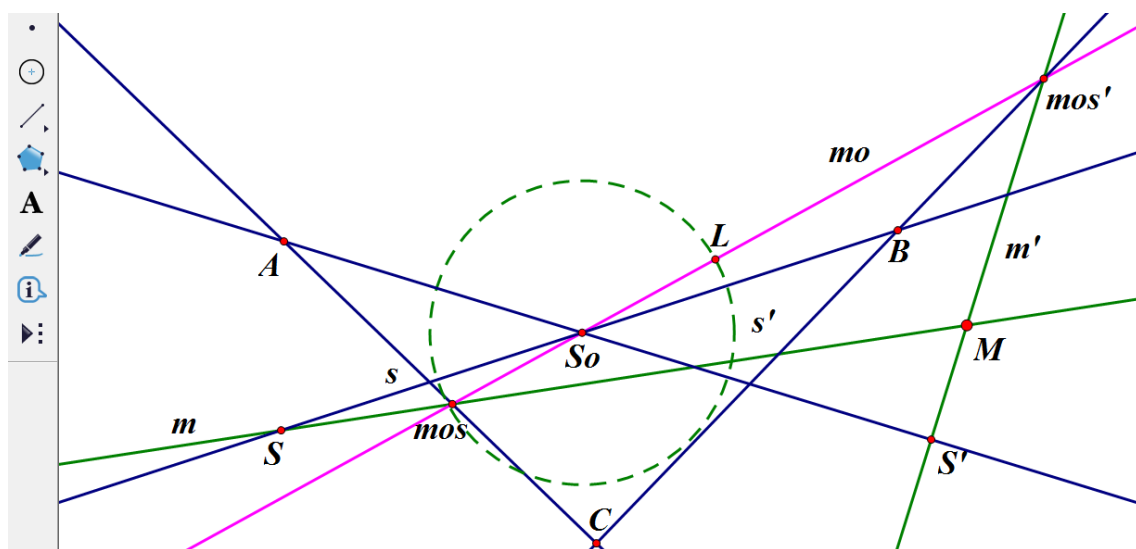


Рис. 16

4) Через точки L , M и окружность с помощью инструмента *Построения* проведём «Геометрическое место точек», в результате получим линию 2-го порядка (рис.6).

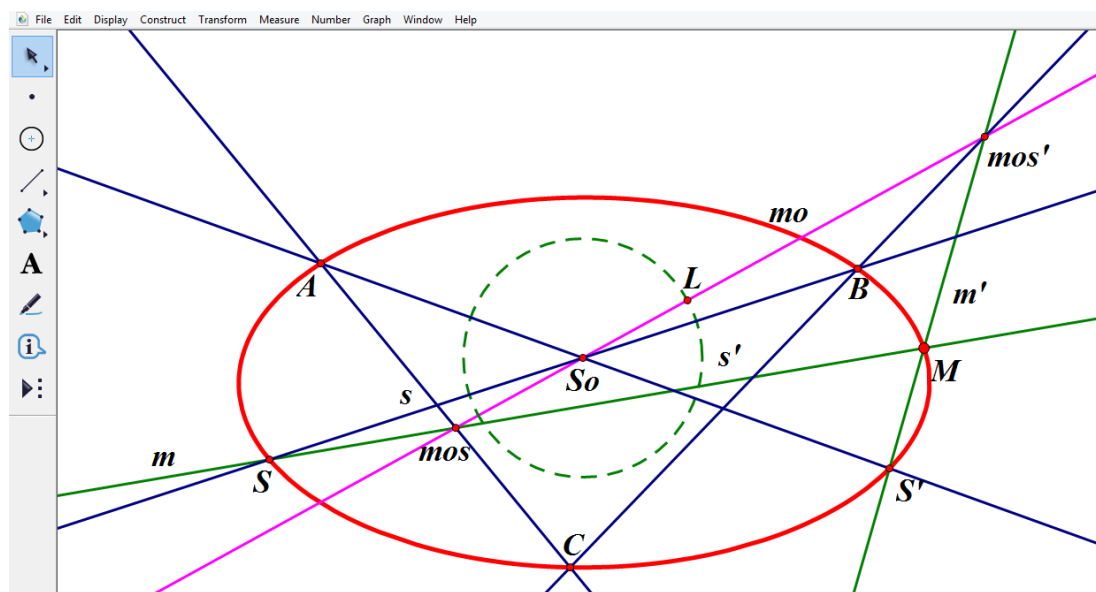
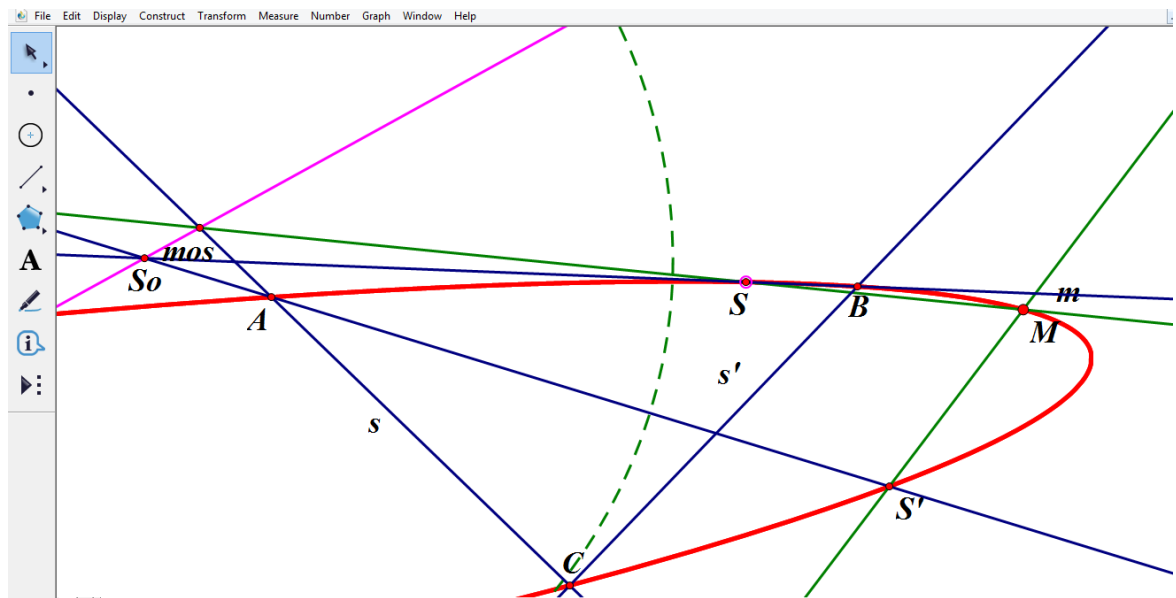
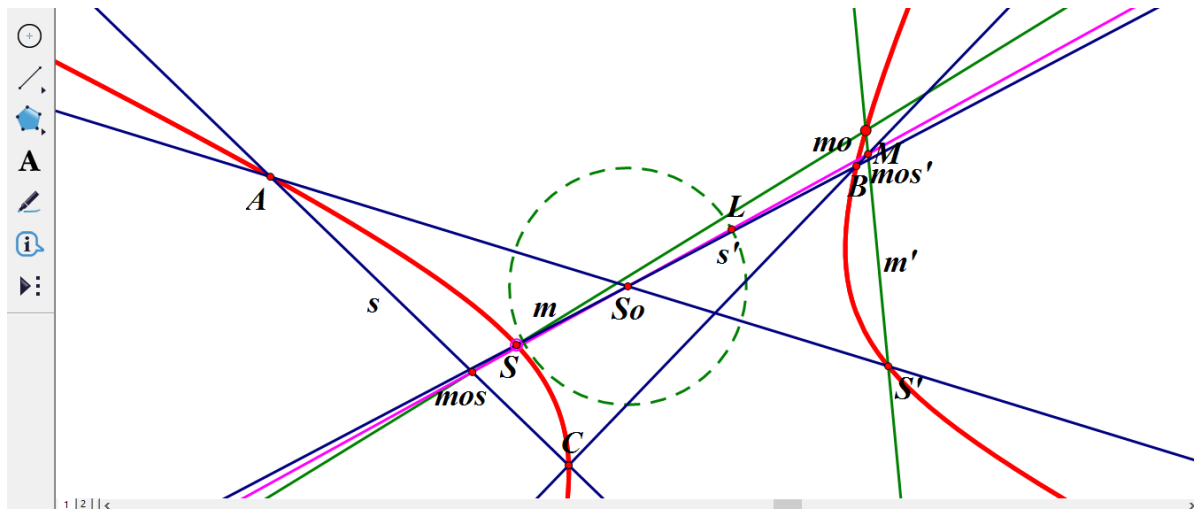


Рис. 17

При движении точек A , C , B , S , M , S' в различных направлениях возникает многообразие линий второго порядка: гипербола, парабола и эллипс (рис. 18-19).



На основе теоремы Паскаля нам удалось описать и продемонстрировать решение конструктивной задачи о построении линий второго порядка по заданным пяти точкам, им принадлежащим.

2.3. Кривые второго порядка в геометрии Н.И. Лобачевского

Геометрия Лобачевского (гиперболическая геометрия) – одна из неевклидовых геометрий основанная на тех же постулатах, что и обычная евклидова геометрия, за исключением аксиомы о параллельных прямых, которая заменяется её отрицанием.

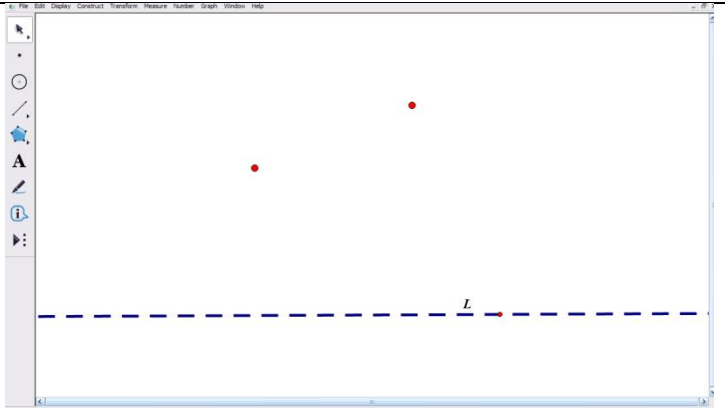
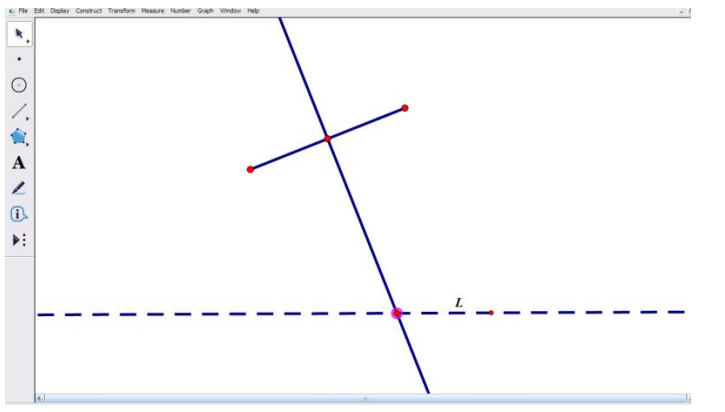
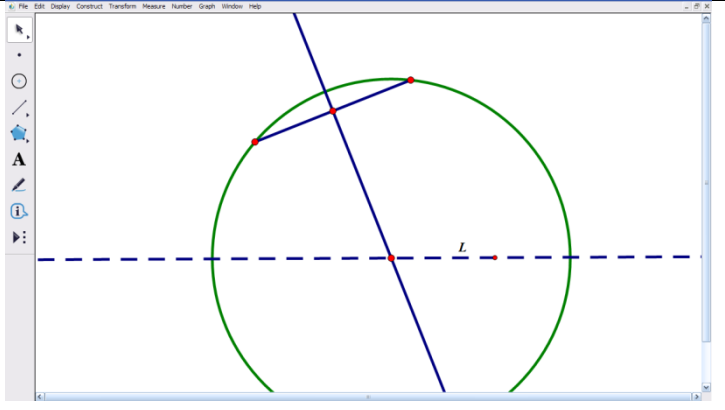
В научной литературе выделяют три модели плоскости Лобачевского: две модели Анри Пуанкаре и модель Кэли – Клейна [1; с. 82]. Рассмотрим только одну из них: Модель Анри Пуанкаре на евклидовой полуплоскости (первая модель Пуанкаре).

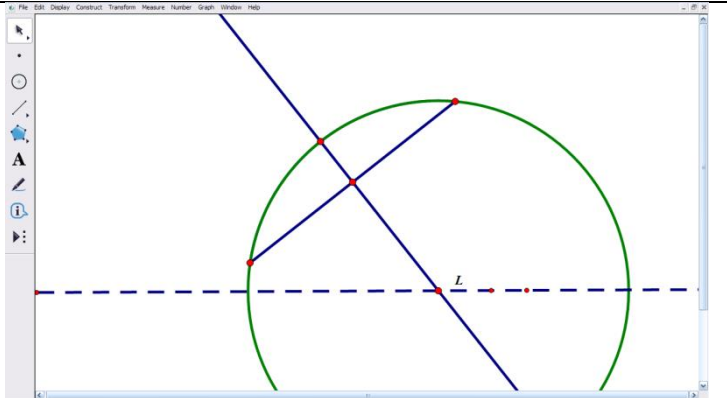
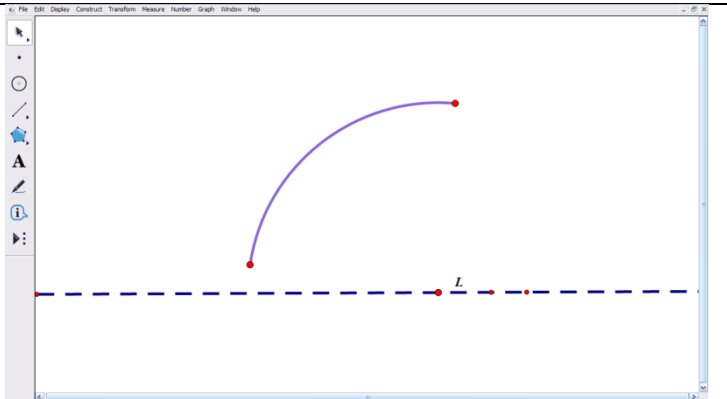
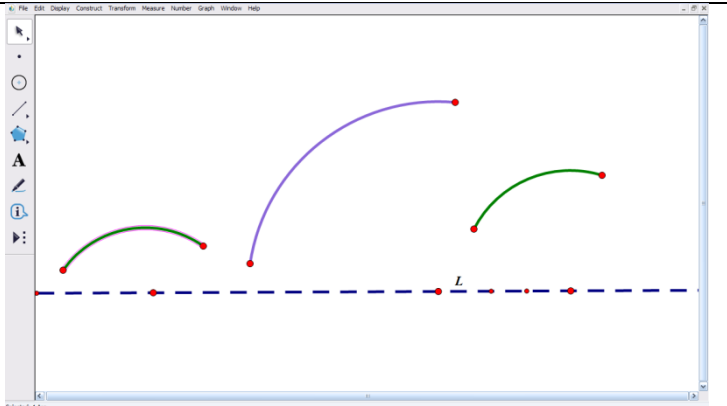
При использовании данной модели целесообразно рассмотреть следующие типы задач:

1. Проверка аксиомы соединения I_1 : Через любые две различные точки проходит прямая и только одна [1; с. 82]. .
2. Проверка аксиомы движения III_1 : Движение есть однозначное отображение множеств L_2 и P_2 на себя [1; с.82]. .
3. Проверка аксиомы III_6 : Для любой упорядоченной пары реперов существует и только одно движение, при котором второй репер является образом первого репера [1; с.82].

Так как построение отрезка, перпендикуляра и других объектов в геометрии Лобачевского занимает колоссальное количество времени и чертежей, то для удобства следует создать инструменты в программе «Живая геометрия». Самым простым и необходимым является отрезок по двум точкам (табл. 12).

Таблица 12. Создание инструмента «Отрезок по двум точкам»

Выполнение построений в программе Живая геометрия	Построения
Зафиксируем открытую евклидову полуплоскость Π с границей L и отметим две произвольные точки.	
Точки соединяем и находим центр полученного отрезка. Функция: <i>Построения</i> , кнопка <i>Середина отрезка</i> . Через центр полученного отрезка проведем перпендикуляр. Функция: <i>Построения</i> , кнопка <i>Перпендикулярная линия</i> . Отметим точку пересечения прямой L и евклидова перпендикуляра.	
Через полученную точку и точку одного из концов отрезка проведем окружность	

Отметим пересечения окружности и перпендикуляра. И проведём дугу через три точки Функция: <i>Построения</i>, кнопка <i>Дуга по трём точкам</i>. (Верхняя дуга отсеченная отрезком)	
Спрячем все «лишние» объекты, оставив дугу и центр окружности	
С помощью панели инструментов и функции: <i>Создать инструмент</i>, выделяем дугу и точку и создаем. Для удобства присваиваем имя.	

Таким образом, с помощью программы «Живая геометрия» нам удалось создать инструмент для построения отрезка Лобачевского по двум заданным точкам.

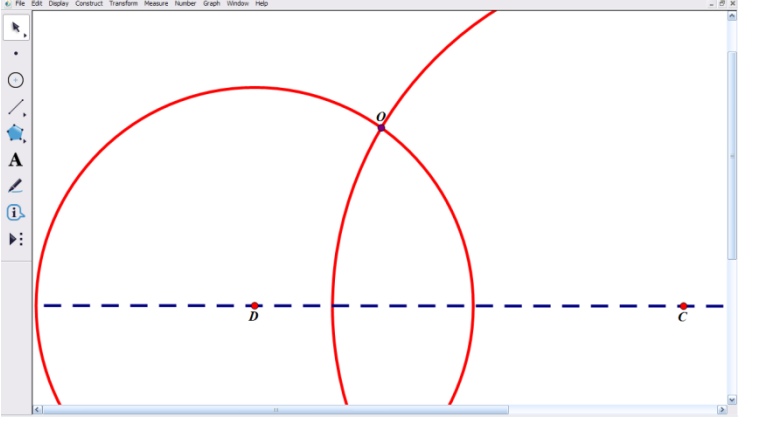
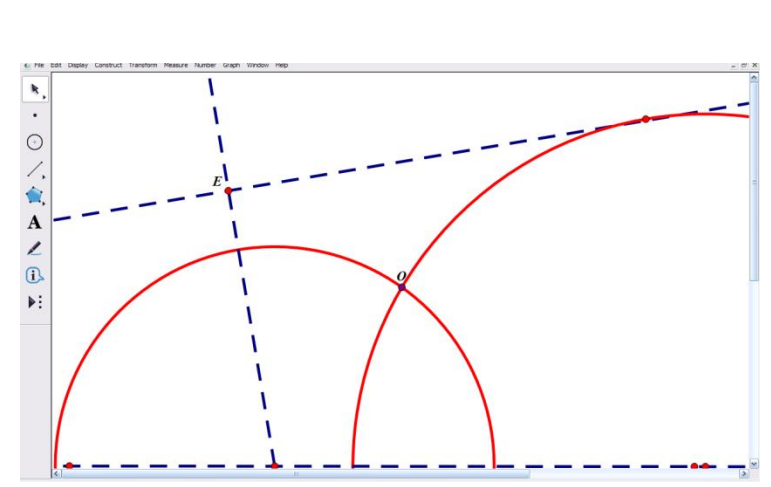
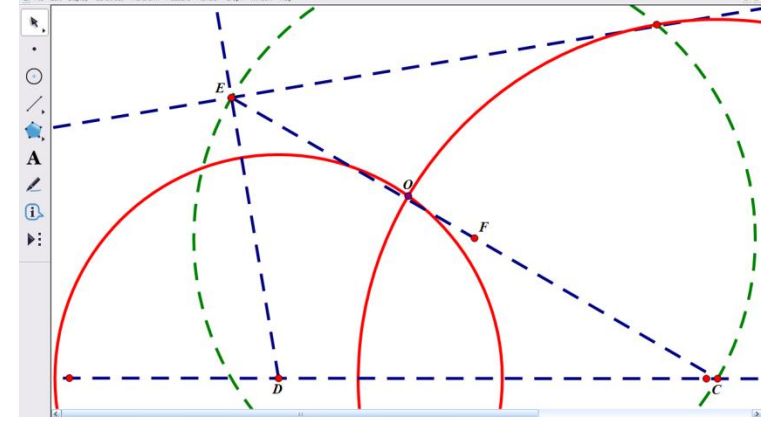
Аналогично возможно создать следующие инструменты пользователя:

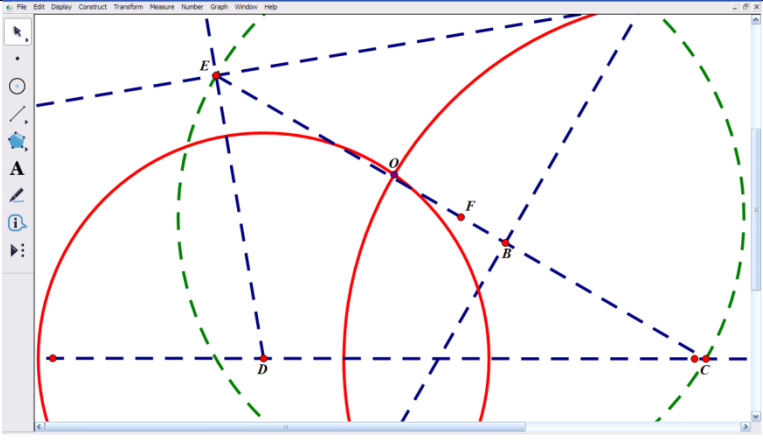
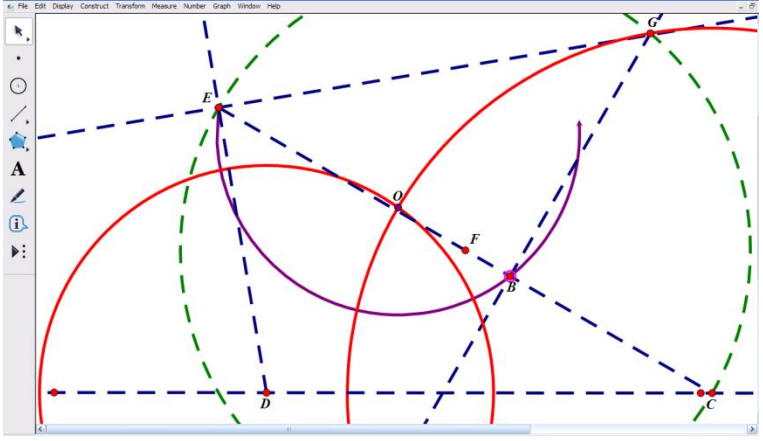
- биссектриса углов;
- перпендикуляр к прямой;
- окружность по трём точкам;
- окружность по центру и точке;
- середина отрезка.

2.3.1. Решение задачи в геометрии Н.И. Лобачевского

Задача: Зная, что окружность – это множество равноудаленных точек построить её по центру и точке см. решение (табл. 13).

Таблица 13. Решение задачи

Выполнение построений в программе Живая геометрия	Построения
Зафиксируем открытую евклидову полуплоскость P с границей L и отметим произвольную точку O. На границе L отметим точки D и C. Это центры первой и второй окружностей. (прямые Лобачевского).	
Вне окружности возьмем произвольную точку и соединим её с центром первой окружности. В этой же точке проведем перпендикуляр относительно прямой. Функция: <i>Построения</i>, копка <i>Перпендикуляр</i>.	
Соединим точку E и точку C отрезком. Разделим полученный сегмент пополам. Через полученную точку F проведём окружность.	

На пересечении второй и третьей окружности отметим точку G. Через полученную точку к сегменту EC проведем перпендикуляр. Отметим точку пересечения B.	
Выделив сегмент и полученный перпендикуляр с помощью функции: <i>Построения</i>, команда <i>ГМТ</i> построим часть окружности, аналогичным образом построим вторую часть.	

С помощью программы «Живая геометрия» удалось создать инструменты для работы в геометрии Лобачевского, а именно построить *отрезок по двум заданным точкам*. Кроме того, исследовать решение задачи на построение, наглядно описать и продемонстрировать каждый этап.

Выводы ко второй главе

С помощью программы «Живая геометрия» в геометрии Евклида кривые второго порядка можно построить, используя функцию, определение или свойство математических объектов. Но на этом построения не ограничиваются. Задачи можно решать двумя способами, как алгебраически, так и графически. Решая задачу вторым способом необходимо отказаться от любых расчётов и использовать только начальные данные.

В проективной геометрии при построении кривых второго порядка следует учитывать свойства кривых, теоремы Бриансона и Паскаля. На основе данных теорем удалось описать и продемонстрировать решение конструктивных задач. Наглядно убедиться, что, не используя канонические уравнения прямой и строгие научные определения можно построить линии второго порядка.

В геометрии Н.И. Лобачевского построения выполняются в евклидовой полуплоскости (первая модель Пуанкаре). В данном случае, для решения задач удалось создать инструменты для работы в геометрии Лобачевского, а именно построить отрезок по двум заданным точкам. Кроме того, исследовать решение задачи на построение, наглядно описать и продемонстрировать каждый этап.

Таким образом, задачи, представленные в данной главе, являются основой методического пособия по решению исследовательских задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной работе представлены основные результаты исследования возможности применения программы «Живая геометрия» при изучении раздела «Кривые второго порядка» в вузовском курсе геометрии.

В ходе работы получены следующие результаты:

- подробно описан интерфейс и технические возможности программы «Живая геометрия»;
- рассмотрены основные методы построения кривых второго порядка на основе проективных свойств и определений. К ним можно отнести ГМТ (геометрическое место точек) и «след» объекта. Для построения сложных чертежей удобнее всего использовать ГМТ. Для наглядности построения математических объектов – «след».
- Продемонстрировано графическое решение задач с помощью программы «Живая геометрия».
- Разработано методическое пособие по решению исследовательских задач с линиями второго порядка. В частности, в пособие рассмотрены 10 задач на построение кривых второго порядка, проиллюстрированы их решения в данной программе.

На основе полученных результатов, можно сделать следующие выводы:

- программа «Живая геометрия» позволяет экспериментально усваивать свойства и особенности геометрических объектов, что позволяет разнообразить процесс обучения и облегчить восприятие изучаемого материала;
- разумное использование программы дает несомненные преимущества по сравнению с традиционным стилем преподавания

геометрии, поэтому данная работа может быть использована преподавателями вузов.

Подводя итоги, можем сказать, что все задачи, поставленные во введении, решены, и цель исследования достигнута.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреева З.И. Многообразие геометрии: учебник / З.И. Андреева, Г.Г. Шеремет. – Пермь: Перм. гос. гуманитар.-пед. ун-т, 2015. – 221 с.
2. Атанасян Л.С. Геометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. ф-тов пед. ин-тов : в 2 частях / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. – М.: КНОРУС, 2011. – 2-е изд.– Ч. 2. – 352 с.
3. Атанасян С.Л. Проективная геометрия [Электронный ресурс]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. ф-тов пед. вузов / С.Л. Атанасян. – Электрон. текст. дан. – М.: Моск. гор. пед. ун-т, 2010. – 224 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/26572.html>. (дата обращения 29.04.2018)
4. Афанасьева У.В. Графическое решение задач на построение эллипса с помощью программы Живая геометрия // Математика и междисциплинарные исследования – 2017: материалы Всерос. науч.-практ. Молодых ученых с Междунар. участием (г. Пермь, 15-20 мая 2017): в 2 т. / гл. ред. А.П. Шкарапута. – Пермь: Перм. гос. нац. исслед. ун-т, 2017. – Т.1. – 236 с.
5. Афанасьева У.В. Применение теоремы Бриансона при изображении линий 2-го порядка в Живой геометрии // Актуальные проблемы современного образования. Реализация принципа непрерывности в системе учебных предметов в образовательных учреждениях: Сб. науч. тр. V Междунар. науч.-практ. конф. / науч. ред.: Н.В. Аммосова, Б.Б. Коваленко. – Астрахань: Триада, 2016. – 216 с.
6. Афанасьева У.В. Применение теоремы Паскаля и её обобщений при изображении линий второго порядка в программе Живая геометрия. // Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты. Материалы I Междунар. науч.-практ. конф., посвященной 100-летию ФГБОУ ВО «ГГНТУ им. акад. М.Д. Миллионщикова», 02–04 ноября 2017 г. –

Россия, Чеченская Республика, г. Грозный. В 2-х томах.– Грозный: ГГНТУ, 2017. – Т.1. – 531 с.

7. Афанасьева У.В. Исследование решения задачи в геометрии Лобачевского при помощи программы Живая геометрия // Лобачевский и XXI век: материалы III учеб.-науч. студ. конф., посвященной Дню математики в Казанском федеральном университете (Казань, 1 декабря 2016 г.) / под ред. Л.Р. Шакировой. – Казань: КГУ, 2016. – 316 с.

8. Афанасьева У. В. Использование программы Живая геометрия при решении задач, связанных с линиями второго порядка, в геометрии Евклида. // «Международные Колмогоровские чтения – XIV», посвященные 100-летию профессора З.А. Скопеца (г. Коряжма, 12–15 сентября 2017 г.) / Науч. ред. И.В. Кузнецова, Е.И. Смирнов, С.А. Тихомиров, отв. ред. С.В. Напалков; Филиал САФУ в г. Коряжме, ЯГПУ, Арзамасский филиал ННГУ. – Коряжма: Редакция газеты «Успешная», 2017. – 247 с.

9. Бородин А.И. Биографический словарь деятелей в области математики / А.И. Бородин, А.С. Бугай; под ред. И.И. Гихмана; пер. с укр. И.И. Гихмана. – Киев: Радянська школа, 1979. – 607 с.

10. Бахвалов С.В. Сборник задач по аналитической геометрии. / С.В. Бахвалов, П.С. Моденов. – М.: Наука, 1964. – 440 с.

11. Берман Г.Н. Циклоида. Об одной замечательной кривой линии и некоторых других, с ней связанных / Г.Н. Берман.– М.: ГосТехИздат, 1954. – 116 с.

12. Всероссийский электронный педагогический журнал «Познание» [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://zhurnalpoznanie.ru/servisy/publik/publ?id=774> (дата обращения 24.04.2018).

13. Грешилов А.А. Аналитическая геометрия. Векторная алгебра. Кривые второго порядка [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.А. Грешилов, Т.И. Белова. – Электрон. текст. дан. – М.: Логос, 2004. – 128 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/13004.html> (дата обращения 28.04.2018).

14. Гусак Г.М. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / Г.М. Гусак. – Минск: Вышэйшая школа, 1983. – 222 с.
15. Дубровский В. Н. Динамическая геометрия в школе. Стереометрия в двух мерных средах. Учебное пособие / В. Н. Дубровский, С. Н. Поздняков, 2008. – 76 с.
16. Живая геометрия // сайт И.С. Храповицкого: – Режим доступа: [http:// janka-x.livejournal.com/](http://janka-x.livejournal.com/) (дата обращения 20.02.2018).
17. Живая геометрия. Учебно-методическое пособие / Под ред. Г.Б. Шабат. – М.: Институт новых технологий образования, 2001. – 239 с.
18. Иванов С.Г. Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика» / С.Г. Иванов, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2013. – 144 с.
19. Канатиков А.Н. Аналитическая геометрия: учеб. для вузов / А.Н. Канатиков, В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 2-е изд. – М.: МГТУ, 2000. – 388 с. – (Серия «Математика в техническом университете»; Вып. III).
20. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник. – М.: Наука, 1980. – 243 с.
21. Комиссарук. А. М. Проективная геометрия в задачах: Учеб. пособие для мат. фак. пед. ин-тов / А.М. Комиссарук – Мн.: Вышэйшая Школа, 1971. – 320 с.
22. Овсеец М. И. Сборник задач по высшей математике. Учебное издание / М.И. Овсеец, Е. М. Светлая. – Мн.: ЧИУиП, 2006.– 67 с.
23. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие. – 5-е изд., испр. и доп. / В.В. Прасолов. – М.: МЦНМО; Московские учебники, 2006. – 640 с.
24. Салес Ж. Мир математики: Таинственные кривые. Эллипсы, гиперболы и другие математические чудеса / Ф Банюльс, Ж Салес; пер.с исп. К.М. Альсиной. – М. : Де Агостини, 2014. – Т. 29 – 160 с.
25. Сгибнев А.И. Экспериментальная математика / А.И. Сгибнев. Экспериментальная математика // Математика. – 2007. – № 3. – 2–8 с.

[Электронный ресурс]. – Режим доступа : www.mathedu.ru/lib/articles/sgibnev_eksperimentalnaya_matematika_2007 (дата обращения 20.04.2018).

26. Смилга В.П. В погоне за красотой. Занимательное введение в неевклидову геометрию / В.П. Смилга. – М.: Молодая гвардия, 1988 – 237 с.

27. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О.Н. Цубербиллер. – изд. 34-е, стер. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2009. – 336 с.

28. Федотова Е. Л. Информационные технологии и системы: Учебное пособие / Е. Л. Федотова. – М.: ФОРУМ, 2013. – 352 с.

29. Электронные учебники. Математика. [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://www.curator.ru/e-books/m9.html> (дата обращения 11.05.2018).

30. The Geometer's Sketchpad // официальный сайт программы: – Режим доступа: <http://www.dynamicgeometry.com/> (дата обращения 10.05.2018).

