

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра высшей математики

Выпускная квалификационная работа

ЯПОНСКАЯ МАТЕМАТИКА ЭПОХИ ЭДО

Работу выполнила:
студентка 151 группы
Направление подготовки 44.03.05
«Педагогическое образование»,
профили «Математика и
Информатика»
Апрышкина Анна Алексеевна

подпись

«Допущена к защите в ГЭК»
Зав. кафедрой

подпись

« ____ » _____ 2017 г.

Руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор
кафедры высшей математики
Малых Алла Ефимовна

подпись

ПЕРМЬ
2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. ФОРМИРОВАНИЕ ЯПОНСКОЙ АРИФМЕТИКИ	
В ЭПОХУ ЭДО	6
1.1. Формирование японской нумерации в эпоху Эдо.....	6
1.2. Соробан и арифметические действия	8
1.2.1. Сложение натуральных чисел	9
1.2.2. Вычитание натуральных чисел	10
1.2.3. Умножение натуральных чисел	11
1.2.4. Деление натуральных чисел	13
1.3. Арифметические задачи Японии, их виды и методы решения	14
ГЛАВА 2. ФОРМИРОВАНИЕ ЯПОНСКОЙ АЛГЕБРЫ	
В ЭПОХУ ЭДО	22
2.1. Секи Шенсукэ Кова – самый известный математик Японии.....	24
2.2. Теория алгебраических уравнений Секи Ковы.....	25
2.3. Появление детерминантов	27
2.4. Задачи Казуюки Савагучи.....	29
2.5. Алгебраические задачи Японии и методы их решения	35
ГЛАВА 3. ФОРМИРОВАНИЕ ЯПОНСКОЙ ГЕОМЕТРИИ	
В ЭПОХУ ЭДО	41
3.1. Японская храмовая геометрия	41
3.2. Геометрические задачи Японии и методы их решения	47
3.3. Нерешенные задачи сангаку	54
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	57
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	59

ВВЕДЕНИЕ

Усиление роли и значимости современной математики стимулирует проявление интереса к ее истории. Еще на II международном конгрессе математиков в Париже Мориц Кантор указал, что одним из важнейших направлений исследования является история отдельных математических дисциплин, так как именно они представляют основополагающие структурные части математики; в их развитии и взаимодействии находит свое выражение жизнь как единое целое.

В след за этим стали производиться интенсивные описания различных математических дисциплин. Начали изучать структуру математики в таких странах как Китай, Индия, страны Арабского Халифата и других. Каждая из них имела свою специфику развития. Кроме того, оценивался вклад выдающихся ученых в математику, выяснялся приоритет методов и приемов решения различных задач.

Изучение исторического процесса формирования и развития японской математики в эпоху Эдо (1603–1868) представляет интерес, так как страна в то время была изолирована от других государств и научного мира, опираясь только на труды своих предшествующих поколений. Несмотря на это, японскими учеными были достигнуты результаты, по важности такие же, как в Европе, а иногда и опережавшие их. Сказанное выше указывает на **актуальность** выбранной темы.

Цель: представить и дать анализ математическим знаниям Японии в эпоху Эдо. Для достижения поставленной цели следует решить **задачи**:

- отыскать и проанализировать литературу, относящуюся к выбранной тематике;
- представить арифметические сведения японцев эпохи Эдо;

- показать достижения в алгебре рассматриваемого периода;
- выяснить специфику геометрических знаний;
- систематизировать исторические сведения о японской математике в эпоху Эдо;
- выполнить сравнительный анализ достижений в области математики ученых Японии и Западной Европы рассматриваемого периода.

Объект исследования: японская математика.

Предмет исследования: японская математика эпохи Эдо.

Методы исследования: диалектический, историко-научный анализ, позволяющий реконструировать методы решения различных видов математических задач; сравнительный анализ при оценке результатов, полученных в эпоху Эдо и ученых Западной Европы этого же периода.

Новизна: переведен и систематизирован математический материал, относящийся к японской математике эпохи Эдо; выполнен сравнительный анализ исследований японских ученых с европейскими в соответствующий период, реконструированы некоторые приемы решения математических задач.

Теоретическая ценность: выяснен объем научных математических сведений, а также приемы и методы решения арифметических, алгебраических и геометрических задач.

Практическая ценность: полученный материал может быть использован в просветительских целях, при чтении дисциплины «История математики», специального курса по истории японской математики, а также в адаптированном виде в практике работы школ.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех глав, насчитывающих 15 пунктов, заключения, а также списка использованной литературы, состоящего из 31 источника. Объем работы составляет 60 страниц.

Во введении обоснована актуальность выбранной темы, сформулированы цель и задачи, необходимые для ее достижения, указаны

используемые методы, теоретическая и практическая ценность, а также новизна, объект и предмет исследования. Представлена краткая структура работы.

В первой главе помещены сведения о зарождении японской нумерации, обозначении цифр и чисел, на четырех примерах показано выполнение арифметических действий с натуральными числами при помощи первого в Японии вычислительного прибора «соробан»; представлены все виды арифметических задач, которые решали в рассматриваемый период, приведены двенадцать примеров их решения в соответствии с действующими правилами.

Вторая глава содержит материал о формировании японской алгебры. В ней представлена аналитическая запись алгебраических уравнений и их систем, появление матриц и детерминантов в связи с вычислением последних, показаны методы решения семи алгебраических задач. Оценен вклад ученого Секи Ковы в алгебру как науку о решении уравнений и их систем.

В третьей главе представлены сведения о японской храмовой геометрии или *сангаку*. Рассмотрены шесть геометрических задач Японии, показаны методы их решения. Оценен вклад Секи Ковы и других ученых в геометрию эпохи Эдо. Кроме того, в работе помещены три нерешенные до наших дней задачи *сангаку*.

В заключении подведены итоги выполненного исследования, указаны перспективы дальнейшей работы, а также использование полученного материала в будущей профессиональной деятельности.

ГЛАВА 1

ФОРМИРОВАНИЕ ЯПОНСКОЙ АРИФМЕТИКИ В ЭПОХУ ЭДО

На протяжении долгого времени о развитии математики в Японии ничего не было известно. Она развивалась под воздействием внутренних запросов, так как страна была полностью изолирована от других государств. В результате были сформированы свои японская наука и культура.

1.1. Формирование японской нумерации в эпоху Эдо

У японцев существовала десятичная нумерация, в которой использовались иероглифы для обозначения цифр и самих чисел (рис. 1).

Число	Иероглиф
0	零 / 〇 *
1	一
2	二
3	三
4	四
5	五
6	六
7	七
8	八
9	九
10	十
20	二十
30	三十
100	百
1000	千
10000	万

Рис. 1. Японская нумерация

При счете широко использовались счетные палочки. Это были круглые бамбуковые палочки *санги* (рис. 2), около 7 мм в диаметре и 5 см в длину. Впоследствии они были заменены прямоугольными параллелепипедами. Изначально счетные палочки применялись для вычислений, сопоставляя каждой из них цифры от 1 до 9. Однако затем развитие вычислений привело к тому, что появился иероглиф для обозначения отсутствия единиц соответствующего разряда [22].



Рис. 2. Санги

При выполнении арифметических действий использовались специальные названия, как для операций, так и для отдельных компонентов: *sho* – частное, *jitsu* – делимое, *ho* – делитель.

Дата введения бамбуковых палочек в Японии неизвестна, но использовать их начали со времен правления императрицы Суико (592–628 г.г. н.э.). Способ, представляющий число с помощью санги был таким же, как уже долгое время использующийся китайский. Единицы, сотни, десятки тысяч и т.д. представлялись следующим образом: | (1), || (2), ┐ (6), ┐┐ (7).

Десятки, тысячи, сотни тысяч и т.д. цифр, стоящих на четных местах, были показаны так: — (10), = (20), ⊥ (60), ⊥⊥ (70).

Примеры записи чисел при помощи палочек санги: $1267 - \text{—} \parallel \perp \text{—}$;
 $327 - \equiv \parallel \underline{\perp}$; $1736 - \text{—} \text{—} \text{—} \equiv \perp$ [20].

Со временем числовые системы древних стали настолько неподходящими для фактических целей расчета, что, вероятно, появилась необходимость механических форм расчета. На смену счетным палочкам приходит первый вычислительный прибор – «соробан» [11].

1.2. Соробан и арифметические действия

Предысторией традиционной японской математики является использование первого вычислительного прибора «соробан» (рис. 3) или счетной доски – видоизмененного китайского «суаньпаня» [2].

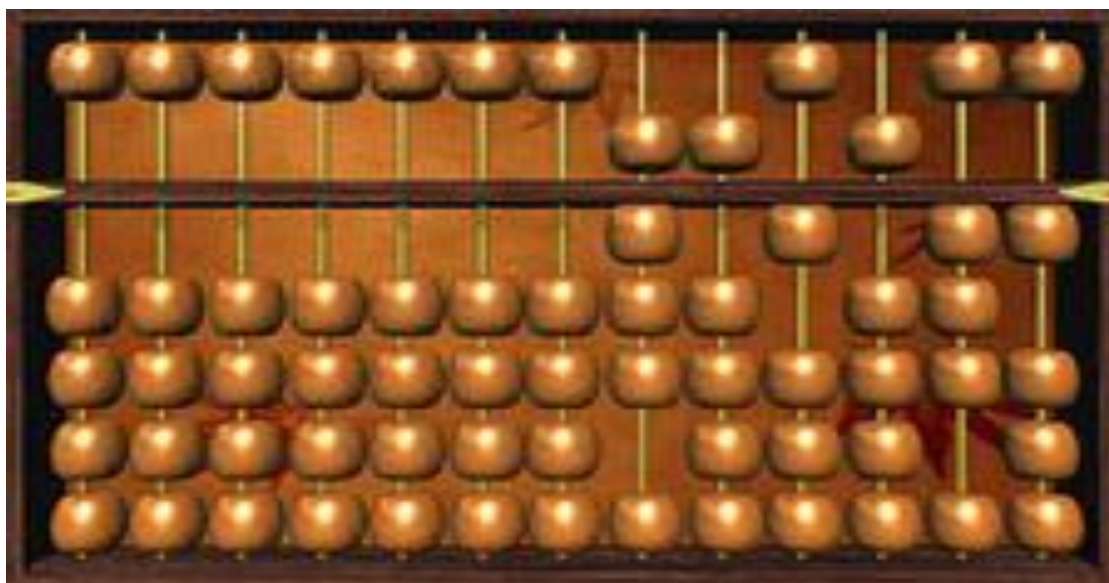


Рис. 3. На соробане представлено число – 851531

Первые счеты, привезенные в Японию, датируются 1592 годом. Соробан состоит из нечетного количества (обычно их 13) вертикально расположенных спиц, определяющих цифру соответствующего разряда. Однако встречались соробаны и с 21, 23, 27 или даже с 31 спицами. Такое их

количество позволяет набирать большие числа или представлять сразу несколько чисел на одном соробане. На каждой спице нанизано по 5 костяшек, причем верхняя костяшка на каждой спице отделена от нижних рамкой. Четыре нижние костяшки называли «земными», значение каждой из них единица. Верхняя костяшка называлась «небесной» и считалась в пять раз больше «земной». Числа на соробане откладывались в десятичной позиционной системе, слева направо [8].

Операции сложения и вычитания также производились слева направо, начиная со старшего разряда, следующим образом:

- перед началом счета все косточки соробана должны находиться внизу;
- первое слагаемое вводилось, начиная со старшего разряда; для ввода разряда необходимое число косточек придвигалось к поперечной планке;
- поразрядно, прибавлялось второе слагаемое; при переполнении разряда прибавлялась единица к старшему (левому) разряду;
- вычитание производилось аналогично, но при недостатке косточек в разряде они занимались у старшего.

Соответствующие правила были разработаны для выполнения операций умножения и деления.

1.2.1. Сложение натуральных чисел

Рассмотрим ряд примеров арифметических вычислений на соробане. Найти сумму чисел 19 и 15. Откладываем на счетах первое слагаемое – число 19 (рис. 4, с. 10).

Прибавляем по разрядам (также слева направо) второе слагаемое – число 15. Сначала на линейке десятков сдвигаем вверх одну косточку, т.е. прибавляем 10 к 19 (рис. 5, с. 10), затем опускаем вниз одну косточку в верхнем ряду на линейке единиц, т.е. прибавляем 5.

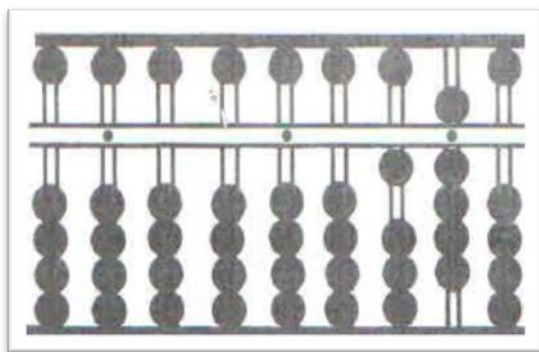


Рис. 4

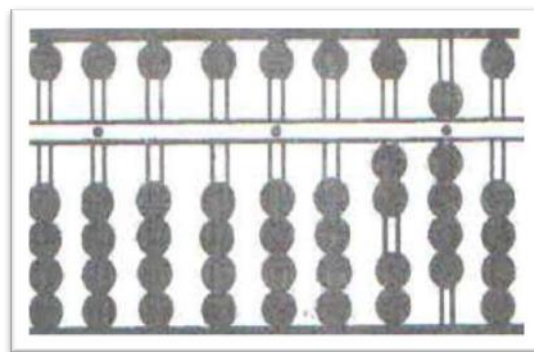


Рис. 5

Так как на данной линейке единиц разряд переполнен, то прибавляем одну косточку слева к старшему разряду (рис. 6) и отнимаем необходимое число на данной линейке, т.е. $5=10-5$ (рис. 7). Получаем результат 34 [31].

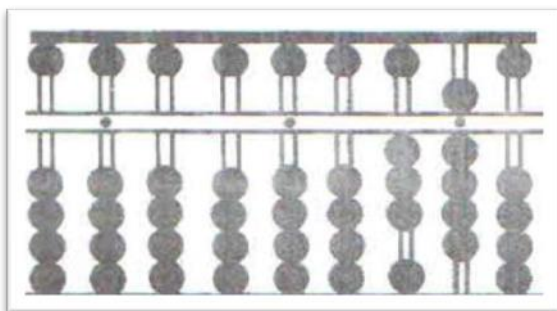


Рис. 6

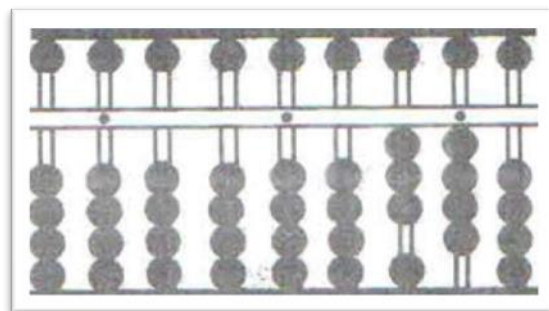


Рис. 7

1.2.2. Вычитание натуральных чисел

Найти разность чисел 34 и 18.

Откладываем на счетах первое слагаемое – число 34 (рис. 8).

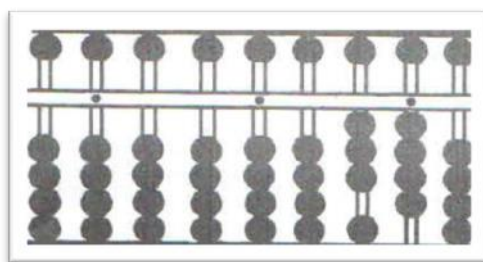


Рис. 8

Поразрядно вычитаем второе слагаемое – число 18. Для этого на линейке десятков вычитаем 10 (рис. 9), а на линейке единиц вычитаем 8. Но т.к. на линейке единиц недостаточно косточек, то мы отнимаем одну косточку слева от старшего разряда (рис. 10), а на линейку единиц прибавляем две косточки.

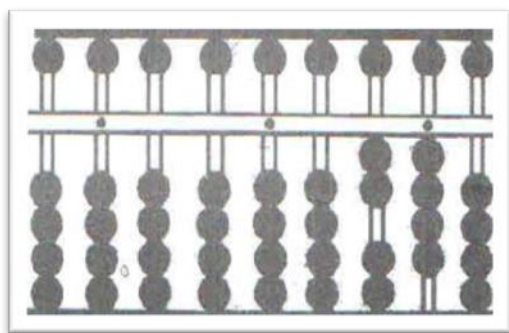


Рис. 9

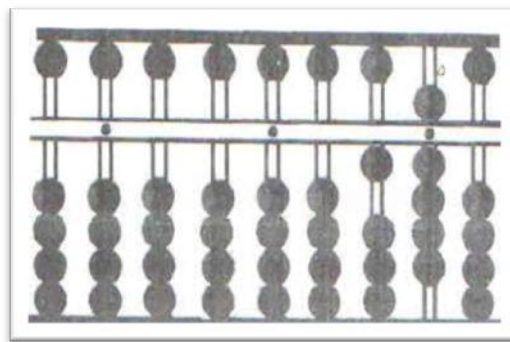


Рис. 10

В нижней ее части не хватает косточек для сложения, поэтому заменим действие на «прибавить 5 и отнять 3». Для этого передвигаем к перегородке одну косточку сверху, а три нижние – отодвигаем. Получаем ответ – 16 (рис. 11) [31].

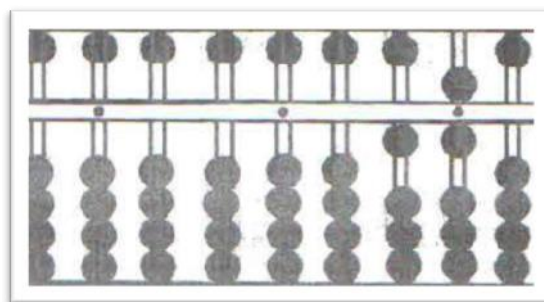


Рис. 11

1.2.3. Умножение натуральных чисел

Найти произведение чисел 132 и 2.

Расположим первый множитель, число 132, вблизи центра счетной доски. Пропустив пустую линейку, число 2 расположим слева (рис. 12). Между числами пропустим одну линейку для лучшей наглядности, при счетах больших размеров, можно пропускать и больше.

Умножаем правую цифру первого множителя на крайнюю левую цифру множителя, т.е. $2 \cdot 2 = 4$. Поскольку среди множителей наибольший «вес» имеет первый, т.к. он – занимает 3 разряда, и поэтому одноразрядный результат надо представить в виде 004, для того, чтобы правильно поместить его на линейках. Число 002 откладываем справа от множимого (рис. 13). Теперь мы не нуждаемся в цифре 2, т.к. с ней уже все проделано. Очистим эту линейку для дальнейшей работы.

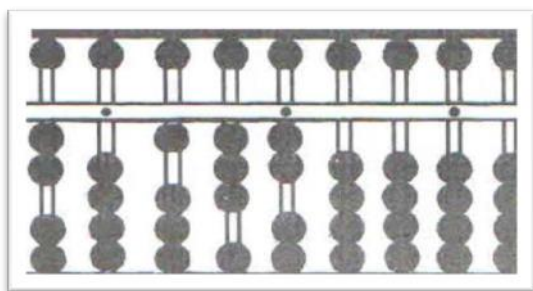


Рис. 12

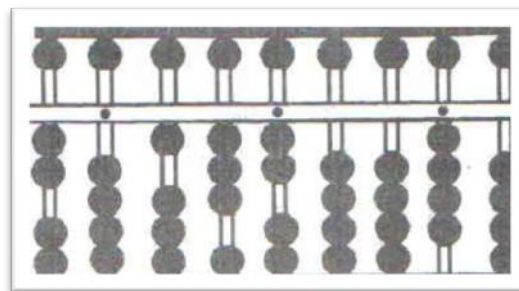


Рис. 13

Умножаем следующую слева цифру первого множителя на крайнюю левую цифру второго множителя, т.е. $3 \cdot 2 = 6$. Результат 006 откладываем, начиная с «очищенной» линейки (рис. 14). С цифрой 3 все проделано, можем очистить эту линейку. Умножаем оставшуюся цифру первого множителя на 2 и результат 002 откладываем, начиная с очищенной линейки. Получившееся число 264 является ответом (рис. 15) [31].

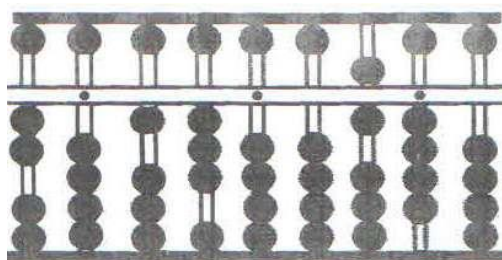


Рис. 14

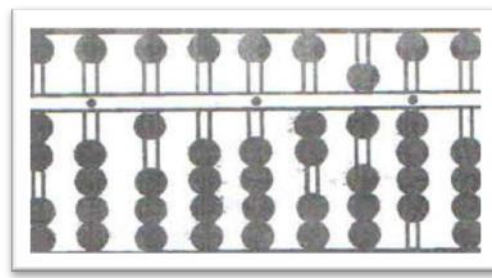


Рис. 15

1.2.4. Деление натуральных чисел

Найти частное от деления чисел 567 и 3.

Откладываем делимое 567 на правой стороне соробана, в нашем случае на линейках *G,H,I* и делитель 3 слева на линейке *B*. Следует предусмотреть, чтобы цифра 7 попала на единичный разряд (рис. 16). Т.к. для расположения частного достаточно трех разрядов, первую его цифру расположим на линейке *D*, тогда единицы расположатся на линейке *F*. Порядок деления числа 567 на 3 начинается с деления 5 на 3. Это будет 1 с остатком.

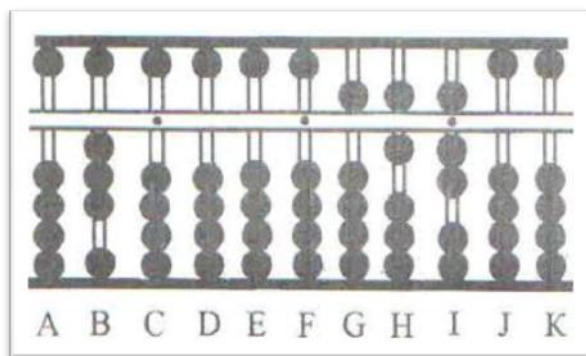


Рис. 16

Расположим число 1 на линейке *D* (рис. 17) Умножаем 1 на 3 – получаем 3. Затем вычитаем 3 из 5 – получаем 2 (рис. 18). Новое значение 267 расположено на линейках *G,H,I*. Продолжим деление 26 на 3. Число 3 содержится в 26 – 8 раз с остатком.

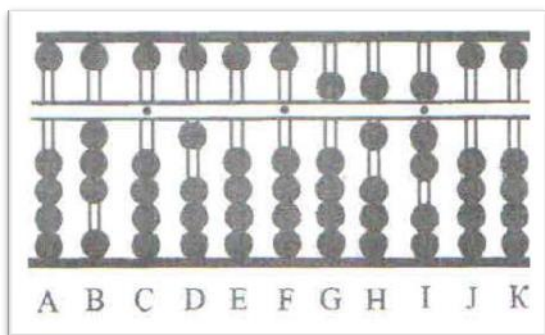


Рис. 17

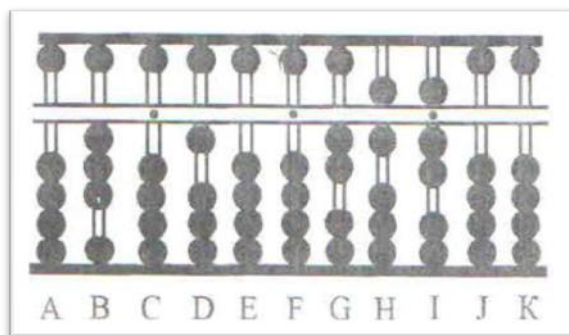


Рис. 18

Расположим 8 на линейке *E* (рис. 19). Произведение чисел 8 и 3 равно 24. Вычтем 24 из 26 и получим результат 2 (рис. 20). Теперь имеем число 27 слева на линейках *H, I*. Продолжим деление на 3 числа 27. 3 содержится в 27 девять раз.

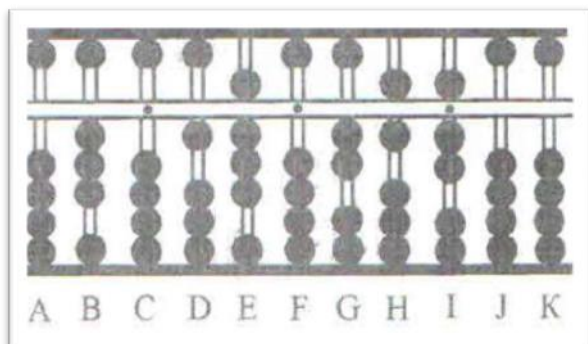


Рис. 19

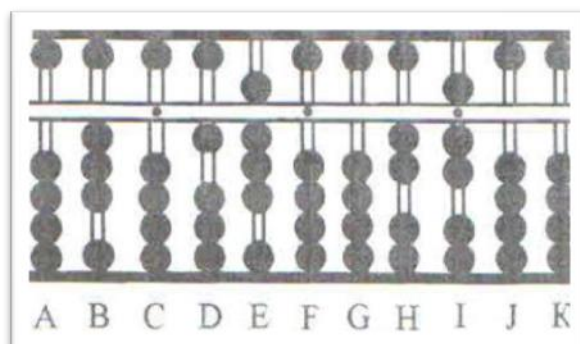


Рис. 20

Размещаем 9 на линейке *F* (рис. 21). Умножаем 9 на 3 – получаем число 27, затем вычитаем 27 из 27, получаем 0 (рис. 22). Следует предусмотреть, чтобы цифра 9 попала на единичную линейку *F*. Число 189 – полученный результат [31].

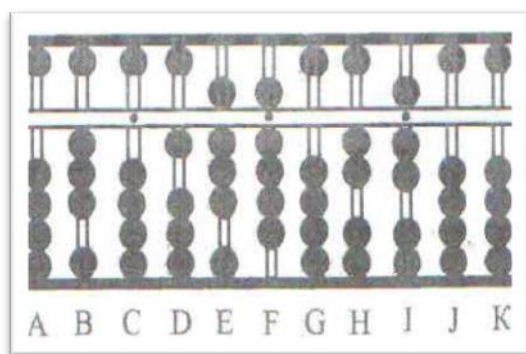


Рис. 21

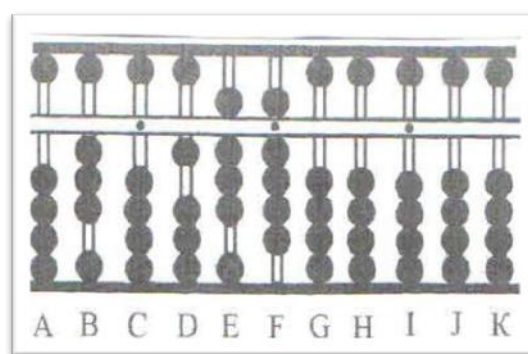


Рис. 22

1.3. Арифметические задачи Японии, их виды и методы решения

Задачи, которые решали японцы, как и во всех странах, возникли из практической деятельности. Японские ученые перенимали типы задач у

китайских ученых, но переводили их на свой быт. Методы, при помощи которых японцы решали задачи, особенные, отличаются от европейских, так как страна в эпоху Эдо была полностью закрыта от внешнего влияния. Развитие наук и, в частности, математики, здесь шло своим собственным путем [3].

Японцы решали несколько видов арифметических задач на:

- числовые соотношения;
- движение (по прямой в одном и разных направлениях, по окружности в одном и разных направлениях);
- пропорциональную зависимость;
- последовательности и прогрессии;
- справедливое распределение (пропорциональное);
- совместную работу;
- остатки;
- неопределенные (диофантовы) уравнения.

Решение некоторых задач представлено ниже.

Японская система мер, используемых в задачах [12]:

Мера	Величина
Сун	3,03 см
Сяку	30,3 см
Ри	3,927 км
Сё	1,8039 л
Кин	600 г
Мон	Денежная единица
Хики	10 мон

1. Задача на пропорциональную зависимость

В целом, при честном обмене за 50 сё проса дают 27 сё риса. Есть 21 сё проса. Сколько сё риса мы за него получим взамен? [30]

Решение. По условию задачи японцы составляли специальную таблицу, из которой, пользуясь правилом трех величин (прямым или обратным) составляли соответственную пропорцию.

Условия	Масса просо	Масса риса
I	50	27
II	21	?

Составляли пропорцию: $\frac{50}{21} = \frac{27}{x}$; откуда $x = \frac{27 \cdot 21}{50} = \frac{567}{50} = 11\frac{17}{50}$.

Ответ: $11\frac{17}{50}$ сё риса мы получим взамен.

2. Задача на пропорциональную зависимость

Некая женщина искусна в ткачестве. В первый день она соткала некое количество ткани, во второй день – вдвое больше, в третий – еще вдвое больше, и т.д. В целом, за 5 дней она соткала 5 сяку ткани. Сколько она соткала за первый день? [30]

Решение. Задачу решали методом одного ложного положения. Пусть в 1-й день женщина соткала 3 сяку ткани, тогда $3+6+12+24+48=93$, 93 больше пяти в $\frac{93}{5}$ раза, поэтому 3 делили на $\frac{93}{5} : 3 \div \frac{93}{5} = \frac{5}{31}$.

Ответ: $\frac{5}{31}$ сяку ткани женщина соткала за первый день.

3. Задача на движение

Дынная плеть растет на 7 сун в день. Плеть вьюнка растет на 10 сун в день. В один и тот же день дынная плеть начинает расти вниз с вершины скалы высотой в 90 сун, а вьюнок – вверх с ее подножия. Через сколько дней они встретятся? [31]

Решение. Эта задача на движение, осуществляемое навстречу друг другу. Ниже представлено ее арифметическое решение.

Пусть t – количество дней, через которое встретятся плети дыни и выюнка, тогда:

- 1) $7 \cdot t$ сун (вырастет дынная плеть);
- 2) $10 \cdot t$ сун (вырастет плеть выюнка);
- 3) $10t + 7t = 17t$ сун (вырастут одновременно);
- 4) $17t = 90, t = \frac{90}{17}$ дней.

Ответ: через $\frac{90}{17}$ дней плети встретятся.

4. Задача на движение в одном направлении

Сильная лошадь А пробегает 240 ри в день, а слабая лошадь В 150 ри в день. Лошадь А стартует через 12 дней после В. Через сколько дней А догонит В? [31]

Решение. Японцы применяли алгебраическое решение задачи. Пусть через x дней лошадь А догонит лошадь В. Так как до встречи лошади пробегут равное расстояние, то составляли уравнение: $240 \cdot x = (x+12) \cdot 150$, откуда $x=20$.

Ответ: через 20 дней лошадь А догонит лошадь В.

5. Задача на числовые соотношения

В загоне есть несколько петухов и кроликов. Общее число их голов равно 35, а лап – 94. Сколько в загоне петухов, и сколько кроликов? [31]

Решение. Задачу решали арифметически (по действиям) и алгебраически, составляя систему уравнений. Если обозначить через x количество голов петухов, а через y – кроликов. Тогда $2x$ – лап у петухов, $4y$ – лап у кроликов. Так как общее количество кроликов и петухов – 35, а общее число лап – 96, то получится система уравнений:

Решив систему, получали ответ: в загоне 22 петуха и 13 кроликов.

6. Задача на числовые соотношения

Мы произвели ткань весом $43\frac{3}{4}$ кин, состоящую из двух материалов а и b, доли весов которых соотносятся как 4:1. Найдите веса а и b. [31]

Решение. Ткань массой $43\frac{3}{4}$ состоит из материалов a и b так, что $\frac{a}{b} = \frac{4}{1}$,

откуда находили $a = 4b$, по условию $a + b = 43\frac{3}{4}$, тогда составляли систему:

$$\begin{cases} a = 4b; \\ a + b = 43\frac{4}{3}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4b; \\ 5b = 43\frac{4}{3}; \end{cases} \Rightarrow b = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}, a = 35.$$

Ответ: 35; $8\frac{3}{4}$.

7. Задача «на остатки»

Воры украли со склада длинный рулон шелковой ткани. В кустах, вдали от склада, они измерили его длину. Если каждый вор получит по 6 хики, то у них останется 6 хики, а если каждый вор возьмет по 7 хики, то последнему вору вообще ничего не достанется. Найдите число воров и длину ткани. [31]

Решение. Пусть x – число воров, а y – длина рулона ткани, тогда составляли систему уравнений, где первое уравнение удовлетворяло первому условию задачи, второе – второму:
$$\begin{cases} 6x = y - 6, \\ 7x = y - 7. \end{cases}$$

Выражали из уравнений y :
$$\begin{cases} y = 6x + 6, \\ y = 7x + 7. \end{cases}$$

Приравнивали правые части уравнений: $6x + 6 = 7x + 7$.

Отсюда находили $x = 13$ хики, $y = 84$ хики.

Ответ: 13 воров, 84 хики ткани.

8. Задача на геометрическую прогрессию

Сверху от ворот есть 9 валов; на каждом валу растет по 9 деревьев, у каждого из которых по 9 ветвей. На каждой ветви по 9 гнезд, а в каждом гнезде живет по 9 взрослых ворон, и у каждой из них по 9 птенцов. У каждого птенца по 9 перьев, и каждое перо имеет по 9 цветов. Сколько всего деревьев, веток, гнезд, ворон, птенцов, перьев и цветов? [31]

Решение. По условию задачи имелось 9 валов, тогда количество деревьев равно $9^2 = 81$, ветвей $9^3 = 729$, гнезд $9^4 = 6561$, ворон $9^5 = 59049$,

птенцов $9^6 = 531441$, перьев $9^7 = 4782969$, цветов $9^8 = 43046721$. Следовательно, нужно было найти сумму геометрической прогрессии с $b_1=9$ и $q=9$.

$$\sum_{i=1}^8 9^i = 9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + 9^6 + 9^7 + 9^8 = 9 + 81 + 729 + 6561 + 59049 + 531441 + 4782969 + 43046721 = 48427560.$$

Ответ: 48427560.

9. Задача на неопределенные уравнения

Есть неизвестное число объектов. Если их разложить по три, то останется два; если их разложить по 5, то останется 3, а если их разложить по 7, то останется 2. Каково число объектов? [31]

Решение. Метод решения заключается в следующем: пусть x – неизвестное число, которое по условию задачи японские ученые делили на 3, 5 и 7 соответственно, получая в результате остатки 2, 3 и 2. Тогда они составляли систему:

$$\begin{cases} x = 3q_1 + 2; \\ x = 5q_2 + 3; \\ x = 7q_3 + 2. \end{cases}$$

Далее выбирали соответственно числа 140, 63 и 30 и находили остатки от деления на 3, 5, 7 соответственно, получали: $140=3 \cdot 46+2$, $63=5 \cdot 12+3$, $30=7 \cdot 4+2$. Затем складывали делимые: $140+63+30=233$, умножали делители $3 \cdot 5 \cdot 7=105$. Из полученной суммы (233) последовательно вычитали 105 до тех пор, пока не получится разность, меньшая 105: $233-2 \cdot 105=233-210=23$.

Ответ: 23.

10. Задача на движение

У некого человека украли лошадь. Владелец, обнаружив кражу, пустился в погоню за вором, когда тот уже уехал на 37 ри. Проехав 145 ри, он узнал, что вор все еще опережает его на 23 ри. Сколько еще ри ему надо проехать, чтобы догнать вора? [31]

Решение. Когда владелец проехал 145 ри, вор проехал $145-37+23=131$ ри. Поэтому если скорости вора и владельца равны s и s' , то

$$\frac{13_1}{14_5}$$

$\frac{s}{s'} =$. Пусть до поимки вора владельцу осталось проехать k *ри*, а

вору x *ри*. Тогда $\frac{(23 + x)}{s'} = \frac{x}{s}$, откуда $\left(\frac{s}{s'}\right) \cdot (x+23) = x$, $x = 215$, $k =$

238 .

Ответ: 215 ; 238 .

11. Задача на совместную работу

Служащие А и В работают в городской конторе. А приходит на работу каждый 12-й день, а В приходит на работу каждый 15-й день. Сегодня они встретились в конторе. Через сколько дней они встретятся в следующий раз? [30]

Решение. Задача сводилась к нахождению наименьшего общего кратного чисел 12 и 15. Разложим числа 12 и 15 на простые множители: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$. Наименьшее общее кратное равно $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

Замечание: вначале японцы приводили дробные выражения к общему знаменателю, лишь впоследствии подошли к наименьшему общему знаменателю.

Ответ: через 60 дней работники встретятся опять.

12. Задача на числовые соотношения

У человек делят сумму денег в x мон. Если они разделятся на группы по трое, и каждая группа возьмет по 5 мон, то останется 10 мон. Если же они разделятся на группы по пятеро, и каждая группа возьмет по 9 мон, то ничего не останется. Найти x и y . [31]

Решение. Пусть x мон сумма денег, y число человек. Тогда составляли систему уравнений, где первое уравнение соответствовало первому условию задачи, второе уравнение – второму.

$$\begin{cases} x = \frac{y}{3} \cdot 5 + 10, \\ x = \frac{y}{5} \cdot 9. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Приравнивали правые части уравнений:} \\ \frac{5y}{3} + 10 = \frac{9y}{5} \Rightarrow 25y + 150 = 27y. \text{ Отсюда находили} \\ y = 75, x = 135. \text{ Ответ: } 75 \text{ мон; } 135 \text{ человек.} \end{array}$$

Таким образом, в главе 1 представлена японская нумерация, приведены примеры записи чисел при помощи счетных палочек, показан первый вычислительный прибор соробан и разобраны четыре примера арифметических действий при помощи этого счетного инструмента. Указаны типы арифметических задач на числовые соотношения, движение, пропорциональную зависимость, последовательности и прогрессии, справедливое распределение, совместную работу, остатки и неопределенные уравнения. А также приведены примеры решения 12 задач в соответствии с действующими правилами.

ГЛАВА 2

ФОРМИРОВАНИЕ ЯПОНСКОЙ АЛГЕБРЫ В ЭПОХУ ЭДО

В течение этого периода Япония не получала знаний из Европы. Правда, в начале XVIII столетия в Японии появились логарифмы и тригонометрия, но лишь в виде китайских сочинений, и, кроме того, почти до половины XIX столетия японцы совершенно пренебрегали логарифмами и не применяли их нигде [7].

За этот период:

- возникла «новая алгебра», в которой все предварительные операции, предшествующие составлению уравнения, производились письменно, и только полученное уравнение разрешалось механически при помощи *sangi*;

- разрабатывались вопросы теории уравнений;
- возник неопределенный анализ;
- использовались методы аналитической геометрии.

Величайшим достижением японской математики является изобретение метода *yenri*, или так называемой круговой теории. Эта теория возникла, когда японские математики применили алгебраический анализ к решению вопроса об измерении площади круга.

В XVII в. в Японии возникла сильная математическая школа, связанная с многовековыми традициями китайской математики и не имевшая контактов с современной математикой Запада. Крупнейший представитель этой школы Секи Кова (1642–1708), самурай по происхождению, в конце жизни – высокопоставленный чиновник при дворе сёгуна [18]. К его достижениям относятся:

- новая система символических обозначений;
- разработка методов приближенного решения уравнений высших степеней одновременно с И. Ньютоном;
- развитие метода определителей (1683, до Г.В. Лейбница);

- изучение «чисел Бернулли» (до Я. I Бернулли);
- разработка метода приближенного вычисления площади круга;
- ряд других крупных открытий.

Математика XVII в. и в Японии, и в средневековой Европе часто была занятием для развлечений. Отдельные мастера, придумав какую-нибудь сложную задачу, бросали публичный вызов другим ученым, предлагая им найти решение и показать свое мастерство. Методы решения задач держались втайне от соперников [26].

К концу XVII в. занятия математическими науками в Европе стали приобретать иную форму. Интеллектуальные турниры сменились публикациями в научных журналах. Ученые сразу же раскрывали свои результаты перед коллегами в статье, утверждавшей их приоритет. Последний великий математик японской старой школы, Кагивара Тейзуке, был еще жив, когда европейский анализ, проникнув в Японию, вытеснил окончательно старые методы и круговой метод *yenri*. Но, не зная европейских языков и имея в своем распоряжении лишь китайский перевод старого курса анализа, он так и не понял круг новых идей и умер в 1909 г, твердо убежденный в превосходстве японской науки вообще и своих методов в особенности [28].

Однако в Японии в эпоху Эдо переход к новым формам организации научной работы не произошел. Тогда как страны Запада активно шли вперед по новому пути развития, самурайская Япония в эпоху Эдо изолировалась от западного мира, сохраняя средневековый жизненный уклад. Предполагается, что поэтому достижения Секи Ковы не получили своевременного развития, а японские математики стали показывать достижения только в XX века, включившись в мировой научный процесс [16].

2.1. Секи Шенсуке Кова – самый известный математик Японии

Уровень *васан* испытал большие перемены в конце XVII века, в основном – благодаря работам Сэки Ковы. О силе Сэки рассказывается множество историй, однако, как и к историям о юном К. Ф. Гауссе, к ним, на наш взгляд, стоит относиться с некоторым скептицизмом. Большинство работ Сэки было опубликовано посмертно его учениками, и поскольку математики в Японии традиционно проявляли уважение к своим учителям, то всегда трудно точно узнать, какие результаты получил он, а какие – не он. Точные дата и место рождения Сэки неизвестны, однако он был близким современником И. Ньютона. Происходя из самураев, в детстве он был принят в благородную семью Сэки Городзаэмона, и далее жил под этим именем. Впоследствии он работал с казной клана Ко:фу, главой которого был Токугава Цунасигэ. В 1704 г. Сэки был взят на работу сегуната, в правительство Токугавы, и служил два года казначеем среднего уровня. В 1706 г. он вышел в отставку, а в 1708 – умер [24].

Сэки возмужал в подходящий момент, как раз в эру Гэнроку, и у него была возможность изучить большое количество математических книг, которые тогда издавались. В 1672 г., когда ему было около 30 лет, он написал рукопись «Решения нерешенных задач», взятых из труда Исомуры. Через 2 года он опубликовал «Математику в деталях», состоявшую из решения 15 нерешенных задач из книги Савагучи Кадзуюки «Старая и новая математика» (1671) [31].

На самом деле, из книг Сэки при его жизни была опубликована лишь «Математика в деталях». Умирая, он оставил 21 книгу в рукописях, в том числе 7 по астрономии. В 1712 г. его ученик Араки Мурахидэ опубликовал четыре тома работ Сэки под заглавием «Коллекция важных математических результатов». Именно из этой коллекции и известно о многих достижениях Сэки Ковы [31].

Хотя иногда и появляются сомнения в ассоциации имени Сэки с изобретением «энри» (определенного интеграла), несомненно, что именно он первым разработал теорию определителей, за десятилетие до Лейбница. Он, также, открыл числа Бернулли ранее Якоба I Бернулли и схему У. Д. Горнера за 150 лет до него, хотя в последнем ему и предшествовали китайцы [29].

2.2. Теория алгебраических уравнений Секи Ковы

Одним из любимых исследований Секи была теория уравнений, которую он создавал в своих работах «*KaihUHompen*» («Различные темы об уравнениях»), «*ByaiMeichi*» (Буквально, «О внесении патологических проблем совершенным»), «*DaijutsuBengi*» (Буквально, «Обсуждение данных проблем»), «*KaihUDSanshiki*» («Соображения о решении уравнений») и «*KaihUHengi-jutsu*» («О новых методах решения уравнений»). В первой из этих работ он классифицировал уравнения на четыре вида, «*Shikijenshu*» (совершенные уравнения), «*henshuSiki*» (вариативные уравнения), «*KushuSiki*» (смешанные уравнения), и «*SikiMushu*» (уравнения, не имеющие корней). Называя уравнение совершенным, он имеет в виду такое уравнение, которое имеет только один корень, положительный или отрицательный. Вариативные уравнения – те, в которых появляется несколько корней, но с одинаковым знаком. Смешанные уравнения – те, в которых появляется несколько корней, но с разными знаками [31]. В «*Kaihud Hompen*» Секи описал метод, названный «*tekizin-hu*» (биномиальных коэффициентов), представленный таблицей 1:

Таблица 1

Степень	Биномиальные коэффициенты						
0	1	1	1	1	1	1	1
1		1	2	3	4	5	6
2			1	3	6	10	15

3				1	4	10	20
4					1	5	15
5						1	6
6							1

Заметим, что в данной таблице, в соответствии с японской записью чисел помещен арифметический треугольник Блеза Паскаля (1665). Секи не объяснил, как получаются эти числа. Такой массив является достаточно очевидным и был известен задолго до того, как Блез Паскаль или даже Апиано (1527) опубликовали его. Секи мог использовать его для нахождения биномиальных коэффициентов, как и другие ученые Западной Европы [1].

Задачи, приводящие к уравнениям с двумя и более корнями, или с отрицательными корнями, или с положительными корнями, которые не удовлетворяют условиям задачи, Секи называл «хендай» или «патологические задачи» [31].

В своем решении числовых уравнений Секи использовал не только метод «небесного элемента», по которому китайцы пришли к методу Горнера еще в 1247 году, но он добился, по крайней мере, одного улучшения китайского метода, неосознанно следуя линии заложенной Ньютоном [31].

Например, в уравнении $11 + 8x + x^2 = 0$, метод «небесного элемента» дает первые два корня уравнения, как -1,7 и -6,2. Действуя, как обычно методом Горнера, Секи получал уравнение вида: $0,29 + 4,6x + x^2 = 0$.

Теперь Секи брал $\frac{0,29}{4,6} = 0,063$, но в отличие от своих предшественников рассматривал это частное как отрицательный корень, так как два этих коэффициента положительны, и продолжая вычислять, как и прежде, приходил к уравнению вида $0,004169 + 4,474x + x^2 = 0$.

Повторяя процесс, Секи получал корень: -0,0009318. Продолжая тот же самый процесс Секи получал окончательный корень: -1,76393202250020.

Ученый Секи Кова также занимался неопределенными уравнениями, начиная с $ax - by = 1$, решенного в целых числах. Его первая задача состояла в следующем: *«Есть определенное число, о котором известно только то, что при делении на 5 оно имеет остаток 1, а при делении на 7 – остаток 2. Найти требуемое число».*

Так как это число одновременно равно $(5x + 1)$ и $(7y + 2)$, то Секи получал следующее уравнение: $5x + 1 = 7y + 2$, откуда $5x - 7y = 1$, которое имеет тот вид, который рассматривал ученый. Такое решение он называл «методом понижения к единице», и решая он находил, что $x = 3$, $y = 2$. Поэтому искомое число равно 16.

Тогда ученый переходил к общему случаю для любого конечного числа делителей. Примером является задача: *«Есть определенное число, о котором известно только то, что при умножении на 35 и делении на 42 оно имеет остаток 35, при умножении на 44 и делении на 32 – остаток 28, а при умножении на 45 и делении на 50 – остаток 35. Найти это число».* Его ответ равняется 13, он получен методом, который использовался в первой задаче [31]. Решение других видов неопределенных уравнений, выполненных Секи, показывало немало изобретательности при использовании условий задачи.

2.3. Появление детерминантов

Одно из наиболее известных достижений ученого Секи – открытие понятия «детерминант». И так как он появился в исследовании 1683 г., то это открытие предшествует Г.В. Лейбницу (1646–1716), на кого весь Западный мир ссылает то, что он первым высказал идею детерминантов [1].

Метод Секи Ковы был получен в результате синтеза китайских методов «чжэн-фу» и «фан-чэн», так решали уравнения посредством составления определителей. В качестве примера приведем систему:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0, \\ a'x^2 + b'x + c' = 0. \end{cases}$$

Обозначая $x^2=y$, Секи получал систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} ay + bx + c = 0, \\ a'y + b'x + c' = 0. \end{cases}$$

Исключая последовательно члены, содержащие x и y , приходил к следующей системе:

$$\begin{cases} (ac' - a'c)x + (bc' - b'c) = 0, \\ (a'b - ab')x + (a'c - ac') = 0. \end{cases}$$

Секи Кова составлял уравнения следующим образом: при исключении x^2 , он умножал первое уравнение на c' , затем вычитал из него второе, умноженное на c . Получал квадратное уравнение $(ac' - a'c)x^2 + (bc' - b'c)x + (cc' - c'c) = 0$, а после понижения его степени – линейное относительно x : $(ac' - a'c)x + (bc' - b'c) = 0$. При исключении x получал $(a'b - ab')x + (a'c - ac') = 0$. Нулевое решение не рассматривал.

Процесс понижения порядка Секи Кова назвал «*tatamu*», что в переводе означало складывание или скрещивание, согласно которому исходная система уравнений второй степени сводилась к системе линейных уравнений. Решение системы выполнялось в два этапа: *sap* и *shi*. Первый заключался в составлении коэффициентов нового уравнения по столбцам так, как образовали бы определители $\begin{vmatrix} a' & a' \\ a & a \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a' & b' \\ a & b \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a' & c' \\ a & c \end{vmatrix}$, равные соответственно коэффициентам при x^2 , x и свободному члену. Выражение при x^2 обращалось в нуль, понижая степень уравнения.

Второй этап заключался в составлении коэффициентов $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$ и

$\begin{vmatrix} c & c \\ c & c \end{vmatrix}$. Так как обращался в нуль свободный член, то понижалась степень

уравнения.

Секи Кова также расширил понятие детерминанта. При таком понимании оказывается, что некоторые числа будут положительными, их называли «*sei*», а некоторые – отрицательными «*koku*». Поэтому Секи Кова приводил правила для определения знаков произведений элементов определителя при его прямом вычислении. Секи знал также, что число членов в разложении определителя n -го порядка равно $n!$ Кроме того, он также знал правила транспозиции столбцов и строк [30].

Японские исследователи признают, что именно Секи, а не Лейбниц получил первые теоретические результаты, которые впоследствии, в основном под влиянием К. Крамера (1750) и О. Л. Коши (1812) были оформлены как теория определителей [4].

Теоретическими вопросами время от времени занимались и ученики школы Секи. Это находит подтверждение в одной из анонимных японских рукописей. Тем не менее, в этом направлении не было никаких публикаций. Поэтому сформировалось убеждение о том, что теория определителей долгое время оставалась тайной [31].

Китайский и японский методы написания множества однородных уравнений были весьма замечательными и никакой предшественник Секи не выдвигал идею понятия «детерминант».

2.4. Задачи Казуюки Савагучи

В этом пункте представлены некоторые задачи, которые были сформулированы японским математиком Савагучи, с уравнениями Секи Ковы и одним из решений математика Тэкеби. Данные задачи имеют геометрическое содержание, однако решаются аналитическими методами.

Одна из первых задач Савагучи имеет следующую формулировку: «В окружность вписаны три другие окружности, как показано на рисунке 23. Оставшаяся площадь 120 квадратных единиц. Общий диаметр двух меньших окружностей на 5 единиц меньше диаметра одной следующей по величине. Требуется вычислить диаметры всех этих окружностей» [31].

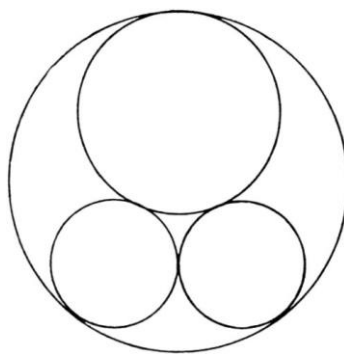


Рис. 23

Секи решает эту задачу следующим образом: «Неизвестный элемент использует как диаметр наименьших кругов. Добавляет к нему данную величину, и результатом будет диаметр среднего круга. Возводит выражение в квадрат и результат называет A . Берет удвоенный квадрат диаметра наименьших кругов и прибавляет к результату A , умножая эту сумму на четверть окружности. Называет это произведение B . Умножает на 4 оставшуюся площадь и длину диаметра. Будучи добавленным к B , результат есть произведение квадрата диаметра наибольшего круга, умноженного на длину окружности. Это выражение называет C . Берет диаметр меньшего круга и умножает его на A и на длину окружности. Называет результат D . Из взятого четыре раза диаметра среднего круга берет диаметр наименьшего круга, взятый C раз, это дает D . Квадрат площади остатка есть произведение квадрата учетверенного диаметра среднего круга на удвоенный диаметр наименьшего круга; квадрат диаметра среднего круга, квадрат длины окружности и квадрат диаметра самого большого круга. Называет это X . Учетверенную сумму диаметра среднего круга и удвоенный диаметр наименьшего круга, возведенный в квадрат, умножает на AC и на длину

окружности. Сократив эту величину на X , Секи получает уравнение шестой степени. Найдя корень этого уравнения, в соответствии с правилом обратного порядка, он находит диаметр наименьшего круга. Исходя из этого значения, получает диаметры других кругов: $x^2 + 10x + 25 = A$, $22(3x^2 + 10x + 25) = B$, $7 \cdot 4 \cdot 22/7 + 120 + B = C = 22y^2$, где $\cdot = 22/7$.

Эта формула для C верна, как видно при учете замены разности площади на 120 по условию. Тогда Секи получал:

$22(y^2 - x^2 - 10x - 25 - 2x^2 + 3x^2 + 10x + 25) = C$, или $22y^2 = C$, которая, как утверждается в правиле: «Произведение квадрата диаметра самого большого круга, умноженного на длину окружности».

Анализ данной задачи Тэкеби: пусть x – диаметр наибольшего круга, y – диаметр среднего круга и z – диаметр меньших кругов.

Затем пусть $AC=a$, $AD=b$, $AB=c$, и $BC=d$, пока это – вспомогательные неизвестные. Далее $2a = -z + x$, и $4a^2 = z^2 - 2zx + x^2$ или $4a^2 - z^2 = -2zx + x^2$.

$$\text{Поэтому } 4b^2 = -2zx + x^2. \quad (1)$$

Тэкеби вычитал y из x , получал $-y + x$, которое есть $2c$. Возводил в квадрат: $4c^2 = y^2 - 2yx + x^2$. (2)

К y добавлял z , получал: $2d = y + z$. Возводил в квадрат: $4d^2 = y^2 + 2yz + z^2$. Вычитая z , имел: $4(b + c)^2 = y^2 + 2yz$. Вычитая из полученного уравнения (1) и (2), получал: $bx8c = 2yz + (2z + 2y)x - 2x^2$. Разделив обе части уравнения на 2, имел: $bx4c = yz + (z + y)x - x^2$. Возводя в квадрат, получал:

$$b^2x16c^2 = y^2z^2 + (2y2z + 2yz^2)x + (y + z)2x^2 - (2y + 2z)x^3 + x^4 \quad (3).$$

Умножая (1) на (2), он также получал уравнение: $b^2x16c^2 = -2y2zx + (y^2 + 4yz)x^2 - (2y + 2z)x^3 + x^4$, которое при сокращении на выражение (3) давало: $y^2z^2 + (4y^2z + 2yz^2)x + (-4yz + z^2)x^2 = 0$, из которого, при сокращении на z , получалось: $y^2z + (4y^2 + 2yz)x + (-4y + z)x^2 = 0$.

Это выражение можно записать в виде: $y^2z + (x^2z - 4x^2y) + (4y^2 + 2yz)x = 0$. [31]

Следующая задача, предложенная Савагучи: *треугольник с тремя сторонами a , b и c , начерчен, как показано на рисунке 24:*

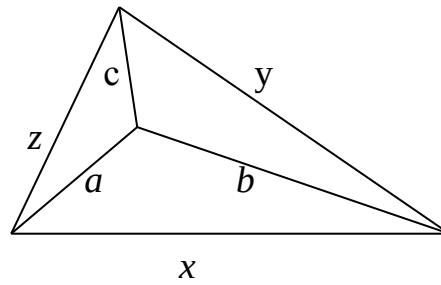


Рис. 24

Дано, что $a = 4$, $b = 6$, $c = 1,447$, сумма кубов наибольшей и наименьшей сторон – 637, а сумма кубов другой стороны и наибольшей – 855. Требуется найти длины этих сторон. Секи решал эту задачу с помощью уравнения 54-й степени [31].

Следующая задача такого же характера: имеется четырехугольник, со сторонами и диагоналями u , v , w , x , y , и z , как показано на рисунке 25:

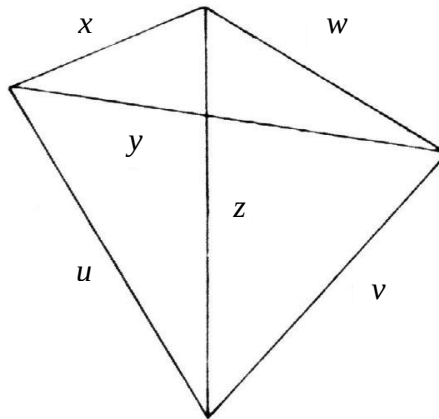


Рис. 25

Дано: $z^3 - u^3 = 271$, $u^3 - v^3 = 217$, $v^3 - y^3 = 60,8$, $y^3 - w^3 = 326,2$, $w^3 - x^3 = 61$. Требуется найти значения u , v , w , x , y , и z .

Секи не составлял уравнение, которое нужно решить, но говорил: «Чтобы найти z , нужно решить обратным способом уравнение 1458-й степени».

Но так как анализ его очень сложен и не может быть выражен простым способом, мы опустим его, только упомянув ход решения.

«Секи применял метод небесного элемента для z , в котором выражение кубов сторон u , v , w , x , и y могли быть извлечены».

«Потом исключал x^3 , получая уравнение 18-й степени».

«Далее, исключал w^3 , получая уравнение 54-й степени».

«Потом исключал y^3 , получая уравнение 162-й степени».

«Следующим шагом исключал v^3 , получая уравнение 486-ой степени».

«Далее исключал u^3 , 2 равных выражения, итогом которых будет уравнение 1458-й степени».

Решая уравнение обратным способом, Секи получал значение z . Этот метод анализа ведет к результату шаг за шагом и может служить примером решения трудных задач» [31].

Хотя, объяснения, данные Секи, как показано на нескольких примерах, неполные и непонятные, тем не менее, они являются шагом к математическому анализу. Его предшественники создали правила для результата, как и многие ранние алгебраисты из Западной Европы. Леонардо Пизанский, например, решал кубическое уравнение с числовыми коэффициентами методом последовательных приближений, но мы не имеем ни малейшего представления об этой идее его метода [9].

Секи уделял особое внимание анализу своих задач. Его метод алгоритма был известен как «*yendan jutsu*, *yendan*» означающий «объяснение или экспозиция», и «*jutsu*», означающий «процесс, метод», в котором объяснение выполнялось с применением «*sangi*». Когда встречалась задача на нахождение площади, в которой две или более неизвестных, то появлялось два или более выражения, содержащие эти неизвестные. Эти выражения Секи записывал на бумаге, а потом упрощал, пока не получит уравнение, которое было бы наиболее точным и элементарным по форме. Это не соответствовало раннему плану получения уравнения без указания метода, по которому было получено. Тем не менее, это приводило ученика к фиксированию каждого шага в процессе упрощения работы, при понижении степени уравнения, которое было в конце концов решено [30].

Ученик Секи, Тэкеби с гордостью говорит о простоте анализа его учителя следующими словами: «В действительности метод *yendan* никогда не был бы таким понятным в Китае, как в Японии. Это одна из самых блестящих работ учителя и нужно согласиться с тем, что она превзошла все другие математические достижения, древние или современные» [31].

В более ранние времена японские математики имели привычку представлять числа с помощью метода *sangi*. Секи расширяет его, расписывая числа со стороны вертикальной линии. Так как эти числа записываются со стороны линии, этот метод известен как «*shiki*» или «обозначение стороны». Секи записывает $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{n}$, и $\frac{abc}{mn}$ соответственно как $3|2$, $n|$ или $n|1$, $mn|abc$, числители помещены справа, а знаменатели – слева. Иногда коэффициенты заменяли вертикальными линиями, например: $|||ab$, $r||\pi$, $27\equiv|||abc$, для $4ab$, $2\frac{\pi}{r}$, и $35\frac{abc}{27}$ [31].

Степени количеств представляли так: для a^4 , $3a^6b^8$, $372\frac{r^8k^{16}}{18d^4}$ (рис. 26).

$$\begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline |||ab \\ \hline |||57 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 18d \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline ||| \\ \hline ||| \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline | \\ \hline ||| \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline r \quad k \\ \hline 7 \quad 15 \\ \hline \end{array}$$

Рис. 26

Можно увидеть, что показатель степени в каждом случае на 1 меньше, чем у используемых западными математиками. Это связано с тем, что в васан как у китайских математиков, n -я степень количества называлась « $(n-1)$ – количество, умноженное на себя»; то есть этот отечественный первоначальный показатель степени показывал не число множителей, а сколько раз число умножается само на себя [28].

Для того чтобы показать разность использовали наклонную короткую линию. Так $b-a$ записывали, как показано на рисунке 27, четырьмя способами [31]:

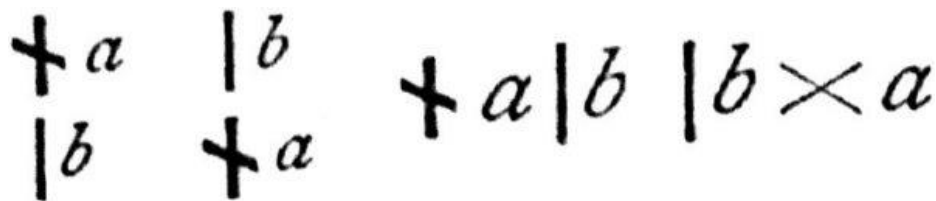


Рис. 27

В своем приложении к умножению, нахождению наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного, суммированию бесконечного степенного ряда вида $1^n + 2^n + 3^n + \dots$, методе конечных разностей, теории чисел, вычислениях, относящихся к правильным многоугольникам, исследовании максимумов и минимумов, приложение *tenzan*, кажется, являлось эффективнее любого другого направления исследований, известного в то время в Японии [31].

2.5. Алгебраические задачи Японии и методы их решения

Ниже представлены некоторые задачи Японии, отражающие многовековую практическую реальность. Большинство из них очень легки и не представляют особой сложности для современных студентов.

Задача 1. *Есть неизвестное число объектов. Если их разложить по три, то останется два; если их разложить по 5, то останется 3, а если их разложить по 7, то останется 2. Каково число объектов? [31]*

Это прототип известной задачи, появлявшейся во многих руководствах мира. Ее типичная средневековая версия звучит так: «Старуха пошла на базар, лошадь наступила на ее корзину и разбила яйца. Всадник предложил возместить ущерб, и спросил, сколько яиц она несла. Она не помнила точно

их число, но когда она брала их по два, оставалось одно. То же самое происходило, когда она брала их по три, по четыре, по пять и по шесть, но когда она брала их по семь, ничего не оставалось. Какое наименьшее число яиц могло у нее быть?» [14]

Решение. Версия Сунцу важна потому, что он предлагает метод решения, эквивалентный тому, что дается в курсе современной теории чисел. Его оригинальное решение выглядит примерно так: «Если их брать по три, останется два: положим, 140. Если их брать по пять, останется три: положим, 63. Если их считать по семь, останется два: положим, 30. Взяв сумму этих трех чисел, получим 233. Вычтем из нее 210 и получим ответ». В общем случае остаток при счете по три, Сунцу умножал на 70. Остаток при счете по пять умножал на 21. Остаток при счете по 7 умножал на 15. Пока сумма получившихся чисел больше или равна 106, вычитал из нее 105, и таким образом получал ответ 23.

Приложение общего правила к данному случаю приводит к ответу: $2 \cdot 70 + 3 \cdot 21 + 2 \cdot 15 - 210 = 23$. Расшифруем описание Сунцу. Если есть N объектов, то «считать их по три» означало просто вычитать по 3, пока, в данном случае, не останется 2. Другими словами, N при делении на 3 давало остаток 2. Студенты курса алгебры знают лучшее решение: $N = 2 \pmod{3}$ (читается, как « N равно 2 по модулю 3»). В общем случае, $x = r \pmod{m}$ означало, что x при делении на m дает остаток r . Например, $38 = 2 \pmod{12}$, так как 12 входит в число 38 три раза с остатком 2. Аналогично, $50 = 2 \pmod{12}$, поскольку 12 входит в 50 четыре раза с остатком 2. В задаче

$$\text{Сунцу: } \begin{cases} N = 2 \pmod{3}, \\ N = 3 \pmod{5}, \\ N = 2 \pmod{7}. \end{cases}$$

Таким образом, на современном языке задача заключается в решении системы из трех сравнений. Может найтись (и в данном случае, определенно, так оно и есть) более чем одно N , удовлетворяющее трем этим соотношениям, но предполагается, что нам нужно наименьшее [31].

Поиск решения весьма прост. Отметим, что первое число в описании Сунцу равно $2 \cdot 70 = 140 = 2 \pmod{3}$. Отметим, также, что $140 + 63 = 2 \pmod{3}$ и $140 + 63 + 30 = 2 \pmod{3}$. Аналогично, $63 = 3 \pmod{5}$, но поскольку и 140, и 30 делятся на 5, $140 + 63 + 30 = 3 \pmod{5}$. Наконец, $30 = 2 \pmod{7} = 140 + 63 + 30$.

Таким образом, сумма $N = 140 + 63 + 30 = 233$ удовлетворяет всем трем сравнениям. Но 233 – не наименьшее из таких N . Наименьшее общее кратное 3, 5 и 7 равно 105, и $2 \cdot 105 = 210$ тоже делится на все эти три числа. Таким образом, получаем ответ Сунцу: $N = 233 - 210 = 23$. Последний шаг был именно тем, о чем говорилось: «пока сумма получившихся чисел больше или равна 106, будем вычитать из нее 105»; фактически, вычиталось наименьшее кратное 105. Несомненно, интересно, откуда Сунцу взял числа $2 \cdot 70$, $3 \cdot 21$ и $2 \cdot 15$. Эта часть требует некоторых предположений. Сначала он умножал делители двух последних соотношений из системы, получал $5 \cdot 7 = 35$. Затем он искал число, кратное 35, и удовлетворяющее первому сравнению. Очевидно, что число 140 – таково. Далее Сунцу искал число, кратное $3 \cdot 7 = 21$ и удовлетворяющее второму сравнению, и число, кратное $3 \cdot 5 = 15$ и удовлетворяющее третьему сравнению. Вот откуда взялись числа Сунцу.

Задача 2. Решить следующие системы уравнений:

1) $xy = 1024$, где $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 4,25$ и $x > y$;

2) $xy = 4096$, где $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 3,75$.

Решение. Перемножив исходные равенства, получали $x^2 + y^2 = 4,25 \cdot xy = 4352$. Но $(x+y)^2 = 4352 + 2xy = 6400$. Таким образом, $x + y = 80$ и $xy = 1024$. Два этих равенства значат, что x и y – корни квадратного уравнения $t^2 - 80t + 1024 = (t-16) \cdot (t-64) = 0$. Поскольку $x > y$, получали $x = 64$, $y = 16$. Аналогично, $x^2 - y^2 = 3,75 \cdot xy = 15360$. Но $x^2 y^2 = 16777216$. Поскольку $x^2 y^2 = x^2 [x^2 - (x^2 - y^2)]$, имели: $x^2 \cdot (x^2 - 15360) = 16777216$. Отсюда, x^2 – корень квадратного уравнения

$x^4 - 15360x^2 - 16777216 = (x^2 + 1024)(x^2 - 16384) = 0$, откуда $x^2 = 16384$, т.е. $x = 128$, $y = 32$. [31]

Задача 3. Решить следующую систему уравнений, где $x > y > z$:
 $x^2 = y^2 + z^2 = 14384$ (1), $x + y + z = 204$ (2), $x - y = y - z$ (3).

Из третьего уравнения следует, что $x + z = 2y$, откуда (из второго уравнения) $y = 68$. Теперь пусть $k = x - 68 = 68 - z$, тогда $x = k + 68$, $z = 68 - k$, и из первого уравнения $(68 + k)^2 + (68 - k)^2 = 14384$, откуда $k^2 = 256$, т.е. $k = 16$, $x = 84$, $y = 68$, $z = 52$. [31]

Задача 4. Несколько равных шаров выстроены так, как показано на рисунке 28, в основании 7 шаров, наверху – 2. Сколько всего шаров?

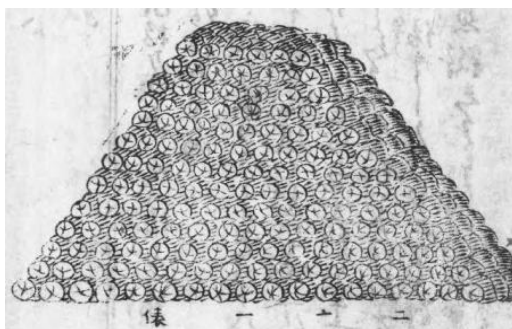


Рис. 28

Решение. Эту задачу решали прямым пересчетом кругов. Однако знаменитая формула для суммы всех целых чисел от 1 до n
 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$ давала решение $2 + \dots + 7 = \frac{7(7 + 1)}{2} - \frac{1(1 + 1)}{2} = 27$,
 которое легко обобщить на любое число кругов. [31]

Задача 5. Мальчик копит деньги следующим образом: в первый день он откладывает 1 мон, во второй – 2 мон, в третий – $2 \cdot 2 = 4$ мон, и т.д. Сколько всего мон мальчик скопит за 30 дней? [31]

Решение. Сумма данной геометрической прогрессии равна $2^{30} - 1 = 1073741823$ мон.

Задача 6. Из уравнений на переменную y : $ay + b = 0$, $cy + d = 0$, где коэффициенты a, b, c, d – ненулевые константы или функции от другой переменной x , исключить y и найти соотношение между a, b, c и d .

$$\frac{b}{a}$$

Решение: Легко увидеть, что $y = -\frac{b}{a} = -\frac{d}{c}$, откуда $ad - bc = 0$.
[31]

Задача 7. Из уравнений на переменную y :

$$ay^2 + by + c = 0, \quad (1),$$

$$dy^2 + ey + f = 0, \quad (2),$$

$$gy^2 + hy + i = 0, \quad (3).$$

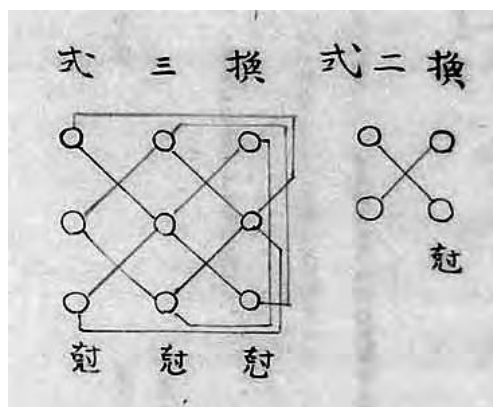
где все коэффициенты функции от x , найти соотношение между a, b, c, d, e, f, g, h и i .

Решение. $(dy^2 + ey + f) \cdot a - (ay^2 + by + c) \cdot d$ дает $y = \frac{(af - dc)}{(bd - ae)}$.

Аналогично, $(gy^2 + hy + i) \cdot d - (gy^2 + hy + i) \cdot g$ дает $y = \frac{(di - fg)}{(eg - dh)}$.

Отсюда $(af - dc) \cdot (eg - dh) = (bd - ae) \cdot (di - fg)$, т.е. $aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg = 0$.

Секи изобразил эти соотношения в виде диаграмм (рис. 29), известных как треугольная схема, предложенная Саррюсом в XIX веке [16].



Таким образом, в главе 2 описаны сведения о начале зарождения японской алгебры, о выдающемся ученом Эпохи Эдо – Секи Кова и его достижениях в изучении неопределенных уравнений, уравнений с n неизвестными, детерминанта. А также представлено решение 7 задач, в соответствии с предписанными правилами. Показан вклад японского ученого Секи Ковы в алгебру как науку о решении уравнений.

ГЛАВА 3

ФОРМИРОВАНИЕ ЯПОНСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ЭПОХУ ЭДО

Эпоха Эдо (1603–1867) – это один из значительных периодов развития Японии, начавшийся с приходом к власти сегуната Токугавы и проведением им политики *сакóку*: закрытием всех государственных границ, прекращением всех возможных торговых и культурных связей с внешним миром. Это был период полной изоляции Японии. Однако именно она привела к бурному расцвету японского народа во многих областях науки и культуры. Именно в этот период появились такие ярчайшие представители японской культуры, как Мацуо Басе – в литературе, Кацусика Хокусай – в живописи, Секи Кова – в математике. Период изоляции привел также к созданию уникальной японской математической школы – *васáн*, в отличие от западной, которую японцы называли *иосан* [13].

3.1. Японская храмовая геометрия

Математика XVII века и в Японии, и в Западной Европе была весьма своеобразным интеллектуальным занятием, сохранившим в себе нечто от традиций средневековья. Обычной была ситуация, когда некоторые ученые, придумав и решив какую–нибудь сложную задачу, бросали публичный вызов своим оппонентам, предлагая найти решение и показать свое мастерство. Методы решения задач держались в тайне от соперников, – точно так же, как любой цеховой мастер оберегал тайны своего профессионального мастерства. Однако в первой трети XVII века занятия математическими науками в Западной Европе стали приобретать принципиально иную форму. «Вызовы решить задачу» сменились публикациями в появившихся научных

журналах. Теперь ученый, создавший новый метод, не хранил его в секрете как «тайное оружие», а сразу же раскрывал свои результаты перед коллегами в статье, утверждавшей его приоритет [27].

В Японии переход к новым формам организации научной работы не произошел. В то время как ученые стран Западной Европы активно шли вперед, Япония изолировалась от западного мира, сохраняя средневековый уклад жизни. Однако неверно было бы сказать, что в рассматриваемый период времени математики в Японии не было. Она была, но ее содержание и формы существования с точки зрения ученых Европы были столь необычны, что европейские историки науки долгое время ее вообще не замечали. И все же стараниями японских исследователей постепенно была осознана самобытность «национальной» математики с ее особым жизненным укладом, который до конца XIX века был в большей степени похож на мир игроков в шахматы, нежели на мир академической науки [23].

Было в этой старой японской математике и что-то такое, что роднило ее с японским искусством – живописью, поэзией, каллиграфией, театром, чайными церемониями, посадкой садов, пошивом одежды и созданием предметов быта. Одним из плодов этого математического искусства стали так называемые *сангаку* (или *сан гаку*, в буквальном смысле обозначаемые как счетные или математические дощечки) – японская *храмовая геометрия* (рис. 30 а, б).



Рис. 30

а)

б)

Любители математики, принадлежавшие разным социальным классам – самураи, торговцы, ремесленники, крестьяне – открывали и доказывали разнообразные геометрические теоремы и задачи. Чертежи к теоремам вырезались на деревянных дощечках (рис. 31) и красиво раскрашивались.

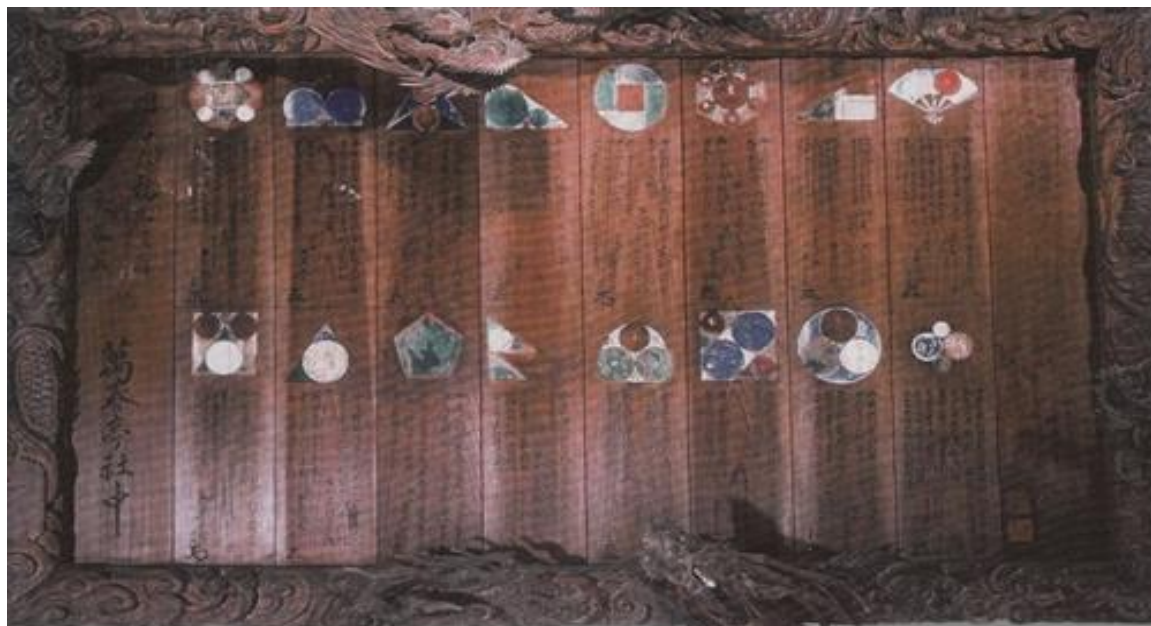


Рис. 31

Не все из них посвящены геометрическим задачам: на некоторых решались диофантовы уравнения. На большинстве досок приводился только результат, а доказательство отсутствовало. Иногда после задачи писали «Реши, если сможешь!» Готовые доски вывешивались над входом в синтоистское святилище или буддистский храм в качестве приношения богам, а заодно – и вызовы коллегам [22].

Структура сангаку была почти всегда одинакова. Справа налево следовали один за другим раскрашенные чертежи, под каждым из них условие задачи и ответ (рис. 32 а, б, с. 43). Каждая табличка содержала от одной до 16–18 задач разного уровня сложности, иногда, весьма трудных.



Рис. 32

а)

б)

Задачи *васан* можно было найти не только в храмах. В эпоху Эдо было издано 12 сборников с задачами сангаку, а сотни других так и остались на стенах храмов. Более того, авторы, вывешивавшие новые *сангаку*, безжалостно убирали задачи из более ранних коллекций. Ни эти таблички, ни книги не являются с нашей точки зрения, текстами; они никоим образом не составляют связного изложения *васан*. На одной *сангаку* (рис. 33 а, б), доступная ребенку задача, могла соседствовать со сложной. Дело в том, что *сангаку* часто создавались группами людей с разным уровнем подготовки [25].



Рис. 33

а)

б)

Круг основных идей японской храмовой геометрии довольно разнообразен и немного непривычен для геометра, воспитанного на традициях, теоремах и чертежах западной геометрической школы, преимущественно унаследованной от древних греков. Первое бросающееся в глаза отличие – это повышенный интерес японских геометров к окружностям (кругам) и эллипсам. Как правило, ни одна табличка сангаку не обходилась без них. Более того, количество окружностей в одной задаче может быть довольно велико, а иногда подразумевается и бесконечным (рис. 34 а, б).



Рис. 34

а)

б)

Хотя техника работы с окружностями не выходила за пределы метрических теорем, не устаешь удивляться наблюдательности и изощренности создателей *сангаку*. В отличие от западной математики, в *васан* не было теорем о пересечении нескольких прямых в одной точке, и не фигурировали конические сечения, кроме эллипса. Возможно, это связано с тем, что в Японии эллипс мыслился не как сечение конуса, привычное для западной геометрии, а как сечение цилиндра [31].

Многие из теорем *сангаку* по своей тематике и стилю изложения заметно отличались от теорем, известных в геометрии Запада, а некоторые повторяли достижения европейской математики Нового времени, то есть периода начала математики переменных величин.

Много задач было посвящено эллипсам и вписанным в них окружностям (рис. 35). Японскими геометрами были открыты и доказаны многочисленные теоремы о цепях Штейнера, которые в европейской геометрии доказывались с использованием частного случая конформных преобразований – инверсии [27].



Рис. 35

Характерным было также использование пространственных образов при доказательстве планиметрических теорем. Так, в качестве аналога метода инверсии японские математики использовали стереографическую проекцию. Вообще же метод открытия геометрических теорем, практиковавшийся японскими геометрами, основывался на интенсивной и продолжительной концентрации на рассматриваемом чертеже. Когда одного геометра спросили, как он получил свои замечательные теоремы об эллипсах, он ответил, что не размышлял ни над чем, кроме эллипсов, в течение последних десяти лет! Интересно заметить, что когда японские геометры ознакомились с китайским переводом «Начал» Евклида, они были очень сильно удивлены. «Зачем, – сказали они, – доказывать такие очевидные факты, когда есть еще столько красивых и сложных геометрических теорем?» [31]

На протяжении более двух веков японские математики – профессионалы и любители, мужчины и женщины – создавали то, что, по сути, было такими витражами, «покрытыми математикой»: деревянные таблички, украшенные прекрасными геометрическими задачами, являвшиеся

одновременно и произведениями искусства, и религиозным даром. Создатели *сангаку* вывешивали их десятками и сотнями в буддистских храмах и синтоистских святилищах по всей Японии, и по этой причине все собрание задач *сангаку* стало известно, как *храмовая геометрия* или *священная математика*.

3.2. Геометрические задачи Японии и методы их решения

Как уже было сказано, для *сангаку* характерны в основном метрические, а не аффинные задачи. Как правило, решение ограничивалось теоремой Пифагора, однако сложность задач *сангаку* различалась от весьма простой до почти невероятной. Ниже приведены некоторые задачи, взятые из *сангаку* и методы их решения.

Ниже приведены некоторые задачи *сангаку*:

Задача 1. *Восемь окружностей.*

Шесть из восьми кругов имеют очевидные отношения $1:\frac{2}{3}:\frac{1}{3}$ их радиусов (рис. 36, с. 47). Необходимо найти радиус двух наименьших окружностей, зная радиус наибольшей. [31]

Решение. Пусть радиус самой большой окружности равен $R = 3r$. Тогда r – радиус каждой из трех окружностей, расположенных вертикально, а $2r$ – радиус каждого из двух больших пересекающихся двойников. Пусть x – неизвестный радиус маленькой окружности.

В $\triangle ABO$: $AB = 2r + x$, $OB = r$, $OA = 3r - x$.

По теореме Пифагора: $AB^2 = OB^2 + OA^2$ или $(2r + x)^2 = r^2 + (3r - x)^2$.

Выполним тождественные преобразования

$4r^2 + 4rx + x^2 = r^2 + 9r^2 - 6rx + x^2$. После приведения подобных членов получим $10rx = 6r^2$, откуда $x = \frac{3r}{5}$.

Так как $R = 3r$, то радиус наименьшей окружности выражается через радиус наибольшей следующим образом: $x = \frac{r}{5}$.

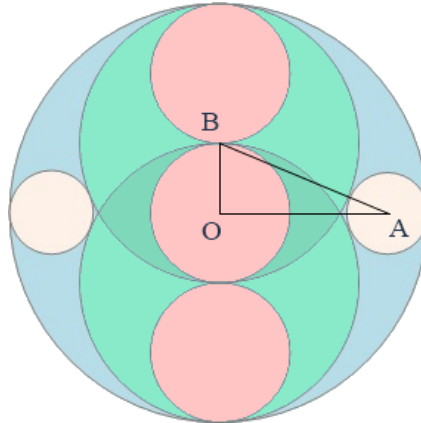


Рис. 36

Ответ: $x = \frac{r}{5}$.

Задача 2. Квадрат и окружность в готическом куполе.

Две четверти окружности, вписанные в квадрат, образуют фигуру, похожую на готический купол. В него вписан квадрат и окружность, как показано на рисунке 37. Как относятся радиус этой окружности и сторона этого квадрата? [31]

Решение. Пусть сторона большого квадрата равна 1, сторона меньшего $GF = x$ и радиус окружности с центром в точке O равен r .

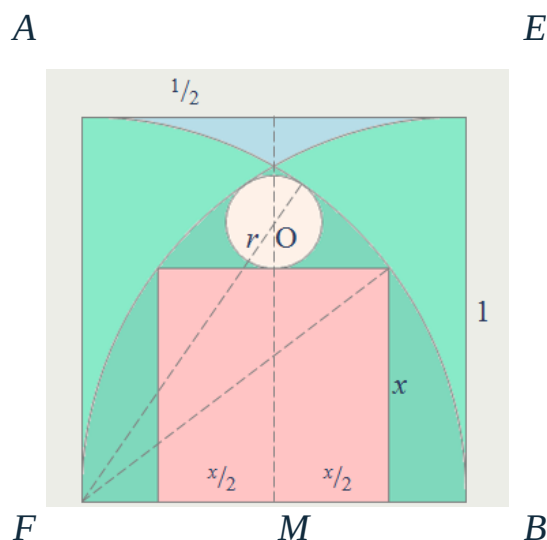


Рис. 37

По теореме Пифагора из прямоугольного $\triangle AFG$ имеем:
 $AG^2 = AF^2 + FG^2$, $1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right)^2 + x^2$, $1 = \frac{1}{4} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + x^2$, $4 = 1 + 2x + x^2 + 4x^2$.

Выполнив тождественные преобразования, получим $5x^2 + 2x - 3 = 0$.

Единственный положительный корень этого квадратного уравнения $x = \frac{3}{5}$.

Применим теорему Пифагора к $\triangle AMO$ и получим:

$$AO^2 = AM^2 + MO^2, (1-r)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (x+r)^2, (1-r)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{5} + r\right)^2.$$

Последнее уравнение сводится к линейному уравнению, имеющим корень $r = \frac{39}{320}$. Таким образом, $\frac{r}{x} = \frac{39}{320} : \frac{3}{5} = \frac{13}{64}$.

Ответ: $\frac{13}{64}$.

Задача 3. Две касающиеся окружности и прямая

Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами R и r соответственно, касаются друг друга и прямой AB и расположены так, как показано на рисунке 38. Докажите, что $AB = 2\sqrt{Rr}$. [30]

Решение: Соединим центры окружностей с точками касания. ABO_2O_1 – прямоугольная трапеция. Из точки O_2 на сторону AO_1 опустим перпендикуляр O_2F . Четырехугольник ABO_2F — прямоугольник (так как у него все углы прямые).

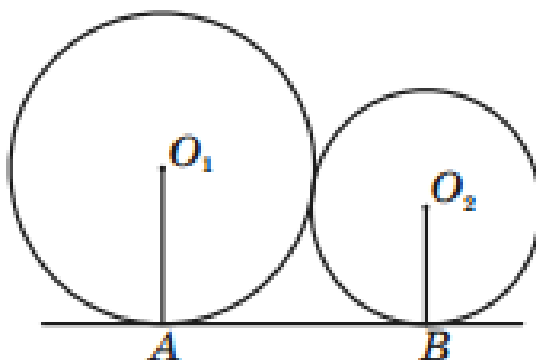


Рис. 38

Поэтому его противоположные стороны равны: $FO_2=AB$, $AF=BO_2=r$. Рассмотрим прямоугольный треугольник O_1O_2F . $FO_1=AO_1-AF=R-r$, $O_1O_2=O_1D+O_2D=R+r$.

По теореме Пифагора: $(O_1O_2)^2 = (FO_1)^2 + (FO_2)^2$, $FO_2 = \sqrt{(O_1O_2)^2 - (FO_1)^2}$, $FO_2 = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = \sqrt{R^2 + 2Rr + r^2 - R^2 + 2Rr - r^2} = 2\sqrt{Rr}$. Доказано.

Задача 4. Три касающиеся окружности и прямая

Три окружности с центрами A , B , C и радиусами a , b , c , соответственно, касаются друг друга и прямой l и расположены так, как показано на рисунке 39. Докажите, что $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$.

Возможно, это одна из наиболее известных задач среди тех, которые встречаются в сангаку. Редкая книга или статья о японской храмовой геометрии обходится без упоминания об этих трех окружностях и прямой, попарно касающихся друг друга.

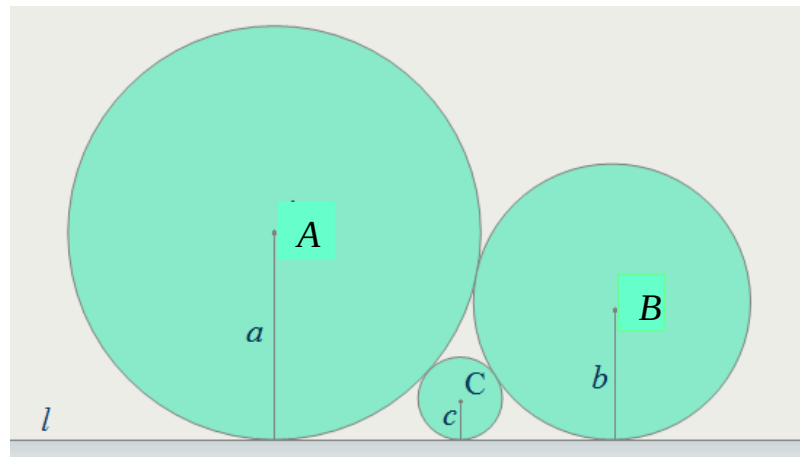


Рис. 39

Рассматриваемый результат, конечно, был известен еще древним грекам, что никак не умаляет достижений японских математиков. Навряд ли мы узнаем, как к решению этой задачи подходили в период Эдо в Японии. Мы же выбрали технически простой способ доказательства – используются лишь теорема Пифагора и простейшие алгебраические преобразования, – но

по–своему элегантный и тонкий. На рисунке 40 приведено изображение сангаку с этой жемчужиной васан.



Рис. 40. Сангаку с задачей о трех касающихся окружностях и прямой.
Префектура Гумма, 1824 год

Как видно из рисунка 39 (с. 49), мы имеем дело с тремя прямоугольными треугольниками, гипотенузами которых служат отрезки, попарно соединяющие центры данных окружностей (рис. 41).

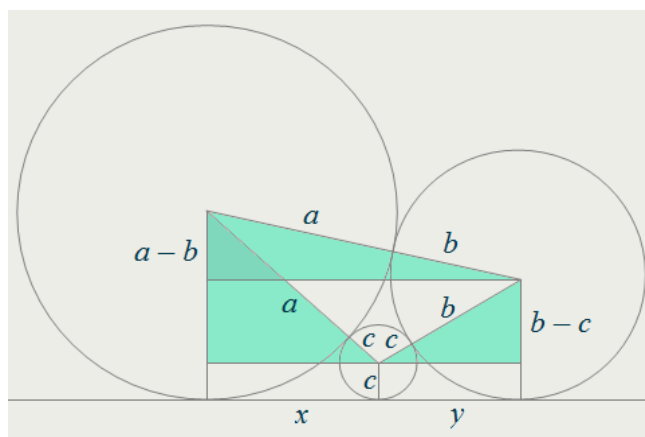


Рис. 41

Решение. Введем вспомогательные построения x и y . Рассматривая три треугольника сверху вниз и слева направо, выпишем тройки длин их сторон: $a + b, a - b, x + y$; $a + c, a - c, x$; $b + c, b - c, y$. Тогда из теоремы Пифагора следует справедливость системы квадратных уравнений:

$$\begin{cases} (a+b)^2 = (a-b)^2 + (x+y)^2, \\ (a+c)^2 = (a-c)^2 + x^2, \\ (b+c)^2 = (b-c)^2 + y^2. \end{cases}$$

В каждом из них выполним тождественные преобразования, приведем подобные члены:

$$\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + x^2 + 2xy + y^2, \\ a^2 + 2ac + c^2 = a^2 - 2ac + c^2 + x^2, \\ b^2 + 2bc + c^2 = b^2 - 2bc + c^2 + y^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4ab = (x+y)^2, \\ 4ac = x^2, \\ 4bc = y^2. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2\sqrt{ab} = x+y, \\ 2\sqrt{ac} = x, \\ 2\sqrt{bc} = y. \end{cases}$$

Подставив значения x и y в первое уравнение системы, придем к равенству: $\sqrt{ab} = \sqrt{ac} + \sqrt{bc}$.

Разделив обе его части на $\sqrt{abc}$, получим: $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$.

Что и требовалось доказать.

Задача 5. Квадрат и четыре луночки

Около данного квадрата описана окружность. На каждой его стороне, как на диаметре построены еще четыре окружности (рис. 42, с. 52). Докажите, что площадь квадрата равна сумме площадей четырех полученных лунок [31].

Решение. Рассмотрим часть приведенной в условии конструкции (рис. 43, с. 52). Докажем, что площадь одной луночки равна четверти площади данного квадрата. Откуда и будет следовать необходимое доказательство. Площадь луночки $ACMD$ равна площади полукруга ACD без площади сегмента CMD .

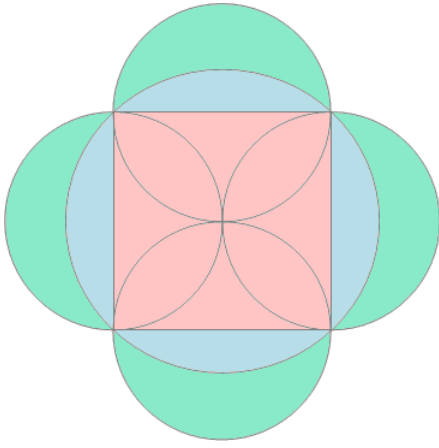


Рис. 42

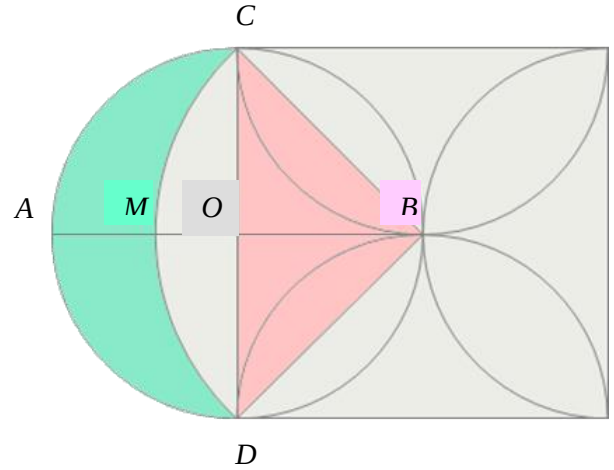


Рис. 43

Так как $S_{ACD} = \frac{1}{2} \pi r^2$ и $S_{CMD} = S_{BCMD} - S_{\triangle BCD} =$
 $= \frac{1}{4} \pi BC^2 - \frac{1}{2} CD \cdot OB = \frac{1}{4} \pi \cdot 2r^2 - \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r = \frac{1}{2} \pi r^2 - r^2$, то $S_{ACMD} =$
 $= S_{ACD} - S_{CMD} = \frac{1}{2} \pi r^2 - (\frac{1}{2} \pi r^2 - r^2) = r^2 = S_{\triangle BCD}$, что и требовалось доказать.

Задача 6. Три окружности в квадрате

Дан квадрат и три окружности, размещенные в нем, как показано на рисунке 44 (с. 53). Докажите, что, если две нижние окружности равны, то и верхняя окружность равна им [31].

Решение. Будем считать, что длина стороны квадрата в некоторых условных единицах длины равна 1. Тогда очевидно, что $BK = \frac{3}{4}$, $KO_1 = \frac{1}{4}$,

$BL = \frac{1}{2}$. Покажем, что $LO_3 = \frac{1}{4}$. Полагая $\angle KBO_1 = \frac{\alpha}{2}$, имеем, из

прямоугольного $\triangle KBO_1$: $tg \frac{\alpha}{2} = \frac{KO_1}{BK} = \frac{1}{4} : \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$. Очевидно, что

$\angle KBM = \angle BML = \alpha$ и $tg \alpha = \frac{3}{4}$, в чем можно убедиться с помощью формулы

$$tg 2\alpha = \frac{2tg \alpha}{1 - tg^2 \alpha} \text{ и уже найденного значения } tg \frac{\alpha}{2}.$$

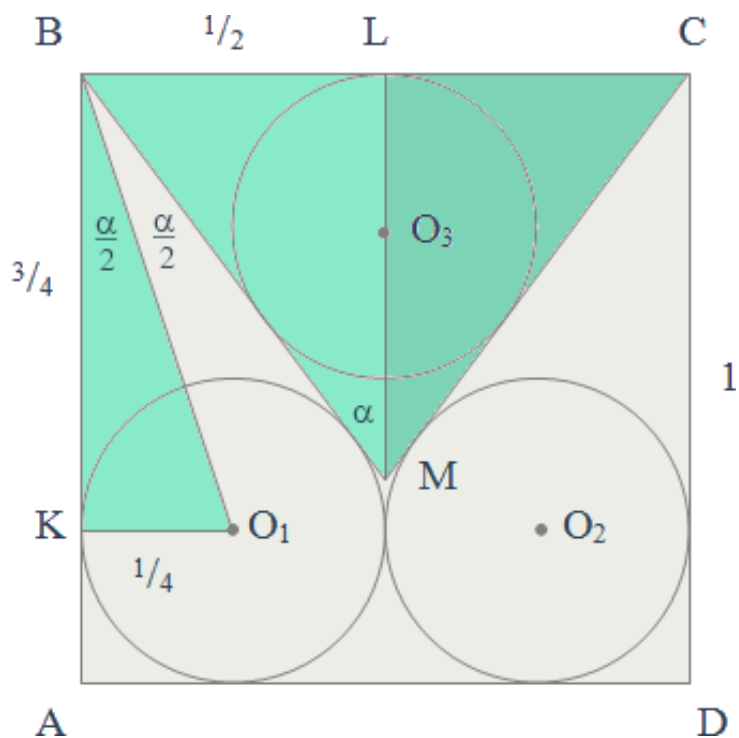


Рис. 44

В прямоугольном $\triangle BML$: $LM = \frac{BL}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$,

$$BM^2 = LM^2 + BL^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{36} \text{ и } BM = \frac{5}{6}.$$

Так как $2S_{\triangle BMC} = BC \cdot ML = P_{\triangle BMC} \cdot LO_3$, то

$$LO_3 = \frac{BC \cdot ML}{P_{\triangle BMC}} = \frac{BC \cdot ML}{BC + 2BM} = \frac{1}{4}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

3.3. Нерешенные задачи сангаку

Несмотря на доступность задач японской храмовой геометрии современным продвинутым (иногда довольно значительно) методам, в *сангаку* есть несколько еще нерешенных до наших дней задач. Ниже приведены три из них.

Задача 1. Задача храма Гиоу.

Дан круговой сектор с основанием a и высотой m . В одну его половину вписан квадрат со стороной d , а в другую – круг радиуса r (рис. 45).

Выразить a , m , d и r через $p = a + m + d + r$ и $q = \frac{m}{a} + \frac{r}{m} + \frac{d}{r}$.

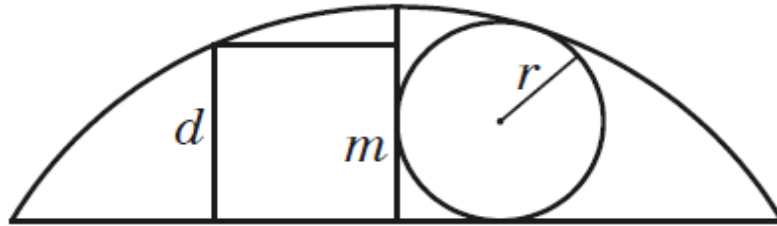


Рис. 45. Задача таблички 1749 года. Автор TzudaNobuhisa.

Задача ждет своего решения вот уже 268 лет!

Задача 2. Задача Момота.

В сангаку 1807 года Момота привел арифметическую задачу решения системы уравнений в целых числах [31]:

$$\begin{cases} x - y = 61741, \\ y - z = 14197, \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 12. \end{cases}.$$

В ответе на табличке приведено: $x = 5^7 = 78125$, $y = 4^7 = 16384$, $z = 3^7 = 2187$. Кроме того, поставлена задача, найти все решения этой системы при произвольных правых частях уравнений. Система сводится к одному уравнению 49–ой степени, которое приведено в табличке Момота. Непростой процедурой является уже само получение этого уравнения.

Задача 3. Задача Морикавы. (Год появления неизвестен).

Рассмотрим две внешне касающиеся окружности и их общую внешнюю касательную. Квадрат расположен так, как на рисунке 46 (с. 55). Одна его вершина расположена на касательной и еще по одной вершине – на окружностях. Найти минимальное значение стороны x квадрата через радиусы a и b [31].

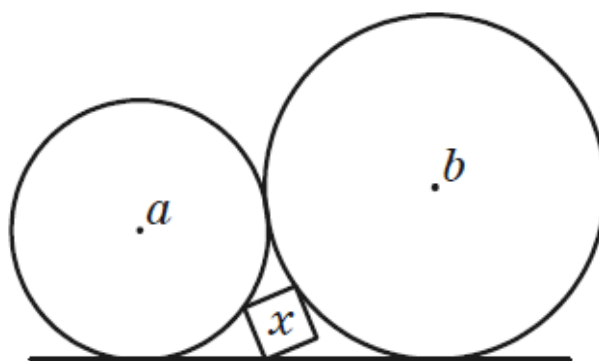


Рис. 46

Таким образом, в главе 3 приведены сведения о зарождении японской геометрии, представлен материал об учении «сангаку» – японской храмовой геометрии, а также о выдающемся ученом Эпохи Эдо – Секи Кове и его научных исследованиях. На основе перевода и анализа использованной литературы в главе 3 рассмотрены приемы и методы решения 6 геометрических задач, а также сформулированы 3 нерешенные до наших дней задачи *сангаку*. Представлен вклад Секи Ковы и других японских ученых в создании геометрии эпохи Эдо.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе выполнения исследования были решены все поставленные во введении задачи:

- найдена и проанализирована относящаяся к выбранной тематике литература, в том числе иностранная: Smith D.E. A History of Japanese Mathematics, Mikami Y. The Development of Mathematics in China and Japan и другие;

- представлены арифметические сведения японцев эпохи Эдо: приведены примеры записи чисел при помощи счетных палочек *sangi*, показан первый вычислительный прибор соробан и разобраны четыре примера арифметических действий при помощи этого счетного инструмента, представлены примеры решения 12 арифметических задач;

- показаны достижения в алгебре рассматриваемого периода: представлен вклад японского ученого Секи Ковы в алгебру, его достижения в изучении неопределенных уравнений, уравнений с n неизвестными, детерминанта, приведено решение 7 алгебраических задач;

- выяснена специфика геометрических знаний: представлен материал об учении «сангаку» – японской храмовой геометрии, приведены примеры решения 6 геометрических задач, а также сформулированы 3 нерешенные до наших дней задачи сангаку.;

- систематизированы исторические сведения о японской математике в эпоху Эдо;

- выполнен сравнительный анализ достижений в области математики ученых Японии и Западной Европы рассматриваемого периода: Секи Кова на 10 лет раньше использовал буквенную индексацию, на 67 лет ранее Габриеля Крамера сформулировал правила вычисления определителей 2-го и 3-го

порядков, приблизительно на 150 лет раньше Паоло Руффини и Уильяма Джорджа Горнера рассматривал новый численный метод решения уравнений любых порядков, изучал «числа Бернулли» почти на 35 лет раньше самого Якоба I Бернулли.

Так как все задачи исследования решены, значит, достигнута и поставленная цель.

Материалы выпускной квалификационной работы были апробированы на межрегиональных научно-практических конференциях студентов математических факультетов с публикацией тезисов докладов:

Апрышкина А.А Начала японской арифметики / А.А. Апрышкина // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах. – Пермь : Изд-во ПГГПУ, 2014 г. – Вып. 7. – С. 19-20.

Апрышкина А.А Из истории японской алгебры эпохи Эдо / А.А. Апрышкина // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах. – Пермь : Изд-во ПГГПУ, 2015 г. – Вып. 8. – С. 7-8.

Апрышкина А.А Из истории японской геометрии эпохи Эдо / А.А. Апрышкина // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах. – Пермь : Изд-во ПГГПУ, 2016 г. – Вып. 9. – С. 8-9.

Апрышкина А.А Васан – японская математика эпохи Эдо / А.А. Апрышкина // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах. – Пермь : Изд-во ПГГПУ, 2017 г. – Вып. 10. – С. 10.

Изученный материал будет использован в будущей профессиональной деятельности. Другие материалы будут рассмотрены в дальнейшем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белл Э.Т.* Творцы математики. Предшественники современной математики / Э.Т. Белл. – М.: Просвещение, 1979. – 256 с.
2. *Березкина Э.И.* Математика Древнего Китая / Э.И. Березкина. – М.: Наука, 1980. – 312 с.
3. *Болгарский Б.В.* Очерки по истории математики / Б.В. Болгарский. – М.: Высшая школа, 1979. – 368 с.
4. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики / Н.Бурбаки. – М.: Иностранная литература, 1963. – 292 с.
5. Васан – японская математика периода Эдо [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://j-in.org.ua/article/edomath/>. (Дата обращения: 5 марта 2017 г.).
6. Соробан // Википедия[Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D1%EE%F0%EE%E1%E0%ED>. (Дата обращения: 7 мая 2017 г.).
7. *Выгодский М.Я.* Арифметика и алгебра в древнем мире / М.Я. Выгодский. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
8. *Горячкин В.П.* Очерк по истории математики в Японии / В.П. Горячкин. – Владикавказ, 1930. – С. 43–58.
9. *Депман И.Я.* Рассказы о старой и новой алгебре / И.Я. Депман. – М.: Просвещение, 1967. – 144 с.
10. *История Японии* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/История_Японии. (Дата обращения: 29 апреля 2017 г.)
11. *Кольман Э.* История математики в древности / Э. Кольман. – М.: Физматлит, 1961. – 236 с.

12. *Малых А.Е.* Приемы решения старинных арифметических задач / А.Е. Малых, И.В. Мусихина. – Пермь: Изд-во ПГПИ, 1999. – 88 с.
13. *Матвиевская Г.П.* Из истории физико-математических наук на средневековом Востоке / Г.П. Матвиевская. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
14. *Олехник С.Н.* Старинные занимательные задачи / С.Н. Олехник. – М.: Наука, 1988. – 160 с.
15. *Раик А.Е.* Очерки по истории математики в древности / А.Е. Раик. – М.: Просвещение, 1977. – 370 с.
16. *Рыбников К.А.* История математики / К.А. Рыбников. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – Вып. 2. – 191 с.
17. *Священная математика* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.shogi.ru/wasan/Fukagawa/index.htm>. (Дата обращения: 19 февраля 2016 г.)
18. *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк. – М.: Наука, 1990. – 256 с.
19. *Храмовая геометрия* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://math4school.ru/sangaku.html>. (Дата обращения: 2 марта 2016 г.)
20. *Цейтен Г.* История математики в древности и в средние века / Г. Цейтен. – М.: ГТТИ, 1932. – 232 с.
21. *Чистяков В.Д.* Сборник старинных задач по математике с историческими экскурсами и подробными решениями / В.Д. Чистяков. – М.: Минобраз. БССР, 1962. – 204 с.
22. *Эйдус Х.Т.* История Японии с древнейших времен до наших дней / Х.Т. Эйдус. – М.: Наука, 1968. – 222 с.
23. *Юшкевич А.П.* История математики в средние века / А.П. Юшкевич. – М.: Наука, 1960. – 448 с.
24. *Юшкевич А.П.* История математики с древнейших времен до конца XIX столетия / А.П. Юшкевич. – М.: Наука, 1970. – 353 с.
25. *Юшкевич А.П.* Физико-математические науки в странах Востока / А.П. Юшкевич. – М.: Наука, 1969. – 128 с.

26. *Юшкевич А.П.* Хрестоматия по истории математики / А.П. Юшкевич. – М.: Просвещение, 1976. – 318 с.
27. *Яглом И.М.* Элементарная геометрия прежде и теперь / И.М. Яглом. – М.: Знание, 1972. – 48 с.
28. *Fukagawa H.* Sacred Mathematics. Japanese Temple Geometry / H. Fukagawa, T. Rothman. – М.: Princeton University Press, 2008.
29. *Martzloff J.* A History of Chinese Mathematics / J. Martzloff. – М.: Springer, 2006. – 509 с.
30. *Mikami Y.* The Development of Mathematics in China and Japan / Y. Mikami. – М.: Chelsea New York, 1974. – 107 с.
31. *Smith D.E.* A History of Japanese Mathematics / D.E. Smith, Y. Mikami. – М.: Open Court, 1914. – 288 с.