МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра высшей математики

Выпускная квалификационная работа

ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

Работу выполнила:
студентка группы Z151
Направление подготовки 44.03.01
«Педагогическое образование»,
профиль «Математика»
Верещагина Маргарита
Николаевна

____
подпись

«Допущена к защите в ГЭК»
Зав. кафедрой

____
подпись

«____» __________ 2017 г.

Научный руководитель:
старший преподаватель кафедры
высшей математики
Недре Лариса Георгиевна

____
подпись

ПЕРМЬ
2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Школа готовит учащихся к тому, чтобы в будущем они умели решать разнообразные практические и теоретические задачи. Поэтому надо стараться формировать у учащихся общие методы мышления и деятельности, общие способы подхода к любой задаче.

Материал, связанный с неравенствами, составляет значительную часть школьного курса математики. Неравенства используются в различных разделах математики при решении важных прикладных задач. Неравенства сами по себе представляют интерес для изучения еще и потому, что именно с их помощью на математическом (символьном) языке записываются важные задачи познания реальной действительности. Тема «Неравенства» связана со всеми темами курса алгебры. Например, неравенства используются при изучении свойств функции (монотонность, ограниченность, нахождение промежутков знакопостоянства и др.), решении задач, связанных с прогрессиями, а также текстовых задач, в которых построение математической модели приводит к неравенству или системе неравенств.

В настоящее время выпущено большое количество сборников с заданиями по математике для учащихся основного звена школы, содержащих исследуемую мной тему. Учителя используют в своей работе методические разработки различных авторов, предусматривающие разный уровень интерпретации материала в зависимости от обучаемого класса, а так же сборники для подготовки к ОГЭ под редакцией И.В. Ященко, А.Р. Рязановского, Д.Г. Мухина, Л.Д. Лаппо, М.А. Попова, В.В. Кочагина, М.Н. Кочагиной и других авторов. Данные пособия содержат тестовые и обучающие задания, чаще всего тестового характера разноуровневой сложности или в виде полных вариантов работ. Рассматриваются различные подходы к составлению тестов, проверке и оценке заданий, а также методы контроля в виде итоговых работ с последующими указаниями ответов к заданиям (чаще всего). Эти пособия помогают развивать у учащихся логическое мышление, сообразительность, формировать базовые математические навыки, умение самостоятельно находить решение. Не смотря на наличие большого количества литературы, посвящённой данной теме, отсутствует база, имеющая одновременно теоретические и практические задания, которая могла бы помочь не только учителям ориентироваться в учебном материале и организовать самостоятельную работу учащихся при изучении неравенств и их систем, но и самим обучающимся данная методика поможет восполнить «пробелы» по данной теме: методы решения, примеры, самостоятельные задания с ключами для самопроверки.

Большое значение, на наш взгляд, имеет не только само изучение линии неравенств, но и подготовка к основному государственному экзамену (далее по тексту – *ОГЭ*), как один из показателей сформированности навыков решения неравенств и их систем. Последовательная и логично выстроенная подготовительная работа способствует развитию учебных навыков учащихся основной школы в рамках темы.

Цель исследования: разработать методические рекомендации к изучению неравенств и систем неравенств в основной школе.

Задачи исследования:

1. Представить исторические сведения о возникновении в школьном курсе линии неравенств.
2. Выделить основные типы преобразований неравенств и их систем.
3. Изучить содержание и организацию обучения решению неравенств и систем неравенств в рамках учебной программы основной школы.
4. Описать методические особенности изучения основных классов неравенств в основной школе.
5. Разработать программу элективного курса «Неравенства и их системы» для учащихся 9-х классов ОСОШ № 2 (г. Очер Пермского края).
6. Провести анализ решений неравенств и систем неравенств учащимися основной школы в формате ОГЭ за 2016-й и 2017-й годы.

Объект исследования: процесс обучения решению неравенств и их систем у учащихся основного звена школы.

Предмет исследования: практико-теоретическая направленность организации обучения решению неравенств и их систем у обучающихся основной школы.

Цель и задачи исследования обусловили выбор методов исследования:

1. Анализ педагогической, психологической и методической литературы.

2. Изучение и обобщение педагогического опыта.

3. Опытно-экспериментальная работа со школьниками.

4. Анализ результатов эксперимента.

Исследование проводилось на базе 9-х классов МБОУ «Очерская СОШ № 2».

Практическая значимость: материалы исследовательской работы могут быть использованы учителями математики, преподающими в основном звене школы, с целью подготовки учащихся к итоговой государственной аттестации.

Структура работы: выпускная квалификационная работа насчитывает 58 страниц и состоит из введения, двух глав, заключения, библиографического списка, включающего в себя 48 источников, 3 приложений, 3 таблиц, 9 иллюстраций.

Во введении обосновывается актуальность темы, выявляются цель и задачи, объект и предмет, описываются теоретико-методологическая основы исследования, методы, база исследования, указана практическая значимость.

В первой главе рассмотрены такие аспекты, как исторические сведения о возникновении неравенств, классификация линии изучения неравенств, общая последовательность их изучения, формирования общих принципов решения, методика изучения линии неравенств и их систем, показаны требования к знаниям и умениям учащихся, особенности восприятия ими учебного материала с учетом возрастных особенностей, а также представлены краткие сведения о методах и способах решения неравенств и их систем, что более подробно рассматривается во 2 главе.

Во второй главе описывается опытно-экспериментальная работа по формированию учебных навыков при решении неравенств и их систем, представлена программа элективного курса «Неравенства и их системы в основной школе» и методики изучения неравенств, показаны результаты итоговых работ обучающихся за курс основной школы до и после введения представленной методики, проведен анализ данных работ обучающихся.

В заключении изложены результаты и выводы по проведённому теоретическому и экспериментальному исследованиям.

Библиографический список насчитывает 48 наименований.

В приложения вынесена информация о результатах итоговой аттестации в ОСОШ № 2 (г. Очер Пермского края) за 2016 и 2017 годы в виде таблиц, содержащих данные обучающихся 9-х классов, а так же содержит дидактические материалы для проведения элективного курса «Неравенства и их системы в основной школе».

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ

Часто говорят, что математика – это язык современной науки. Однако, представляется, что это высказывание имеет существенный дефект. Язык математики распространен так широко и так часто оказывается эффективным именно потому, что математика к нему не сводится.

Выдающийся отечественный математик А.Н. Колмогоров писал: «Математика не просто один из языков. Математика – это язык плюс рассуждения, это как бы язык и логика вместе. Математика – орудие для размышления. В ней сконцентрированы результаты точного мышления многих людей. При помощи математики можно связать одно рассуждение с другим. Очевидные сложности природы с ее странными законами и правилами, каждое из которых допускает отдельное очень подробное объяснение, на самом деле тесно связаны. Однако, если вы не желаете пользоваться математикой, то в этом огромном многообразии фактов вы не увидите, что логика позволяет переходить от одного к другому» [25].

Линия уравнений и неравенств является стержнем алгебраического материала школьного курса математики. Тема «Неравенства» занимает важное место в курсе алгебры. Она богата по содержанию, по способам и приемам решения неравенств, по возможностям ее применения при изучении ряда других тем школьного курса алгебры. Это объясняется тем, что уравнения и неравенства широко используются в различных разделах математики, в решении важных прикладных задач.

1.1. Исторические сведения о возникновении неравенств

История развития неравенств и их систем тесно связана с историей развития уравнений и систем уравнений. Знаки неравенств «>», «<»

появились впервые лишь в XVII в., но понятие неравенства, как и понятие равенства, возникло в глубокой древности.

В развитии математической мысли без сравнения величин, без понятий «больше» и «меньше» нельзя было дойти до понятия равенства, тождества, уравнения. Так, при расширении понятия числа – переходя от целых чисел к рациональным, затем к действительным – мы должны определить отношение «меньше» на новом множестве так, чтобы сохранялись основные его свойства [21]. С помощью неравенств задаются основные числовые, формулируются определения предела, монотонной последовательности и функции и др.

На языке неравенств нередко формулируется постановка задачи во многих приложениях математики. Например, многие экономические задачи сводятся к исследованию систем линейных неравенств с большим числом переменных [21]. Часто то или иное неравенство служит важным вспомогательным средством, основной леммой, позволяющей доказать или опровергнуть существование каких-то объектов (скажем, решений уравнения), оценить их количество, провести классификацию. Например, чтобы классифицировать все правильные многогранники, нужно прежде всего вспомнить, какие углы могут иметь правильные многоугольники, и воспользоваться неравенством: «сумма величин плоских углов выпуклого многогранного угла *не больше* 360°» [35].

Неравенство – это не только вспомогательный инструмент. В каждой области математики – алгебре и теории чисел, геометрии и топологии, теории вероятностей и математической статистике – получены фундаментальные результаты, формулируемые в виде неравенств [21]. Во многих разделах математики, особенно в математическом анализе, в прикладной математике, неравенства встречаются значительно чаще, чем равенства.

Рис. 1. Архимед

Понятиями неравенства пользовались уже древние греки. *Архимед* (III в. до н. э.), занимаясь вычислением длины окружности, установил, что «периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых». Иначе говоря, *Архимед* указал границы числа π [25].

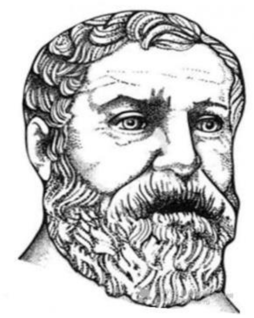


Рис. 2. Папп Александ-рийский

Словесное описание знаков неравенств присутствовало и в трудах Паппы Александрийского (III в.) «Математическое собрание».

Рис. 3. Евклид

Самые первые геометрические неравенства («перпендикуляр меньше наклонной, проведенной из одной и той же точки к данной прямой», «сторона треугольника меньше суммы двух других сторон», «против большего угла треугольника лежит большая сторона») принадлежит еще древнегреческой математике – она содержалась в знаменитых началах Евклида [25].

Рис. 3. Томас Гарриот

После введения знака равенства английский ученый *Томас Гарриот* в своей посмертной публикации «Artis Analitical Praris» (1631) ввел употребляемые нами знаки неравенства «<» и «>». Он обосновал свое нововведение следующим образом: если две величины не равны, то отрезки, фигурирующие в соотношении, не параллельны, а пересекаются. Пересечение может быть справа (>) или слева (<) [25].

Рис. 4. Пьер Буге

100 лет спустя *Пьером Буге* – французским физиком и математиком были употреблены знаки «≤ » и « ≤ » и быстро вошли в обиход. Отдельные свойства систем линейных неравенств рассматривались еще в первой половине IX века в связи с некоторыми задачами аналитической механики. Систематическое изучение таковых систем началось в самом конце IX века, однако о теории линейных неравенств стало возможным говорить лишь в конце 20-х гг. XX века [25].

1.2. Основные виды преобразований неравенств и их систем

При решении неравенств выделяют три типа преобразований:

1) преобразуют одну из частей неравенства (используется при необходимости упрощения выражения, входящего в запись неравенства, данный навык является самым важным для изучения линии неравенств в дальнейшем);

2) согласованно преобразуют обе части неравенства (являются результатом применения к обеим частям арифметических действий или элементарных функций, например прибавление к обеим частям неравенства

одного и того же выражения, умножение или деления обеих частей на одно и то же положительное выражение, умножение или деления обеих частей на одно и то же отрицательное выражение с последующей сменой знака неравенства);

3) преобразуют логическую структуру.

Среди преобразований второго типа преобразования неравенств образуют сложную в изучении, обширную систему. Этим в значительной степени объясняется то, что навыки решения неравенств формируются медленнее навыков решения уравнений и не достигают у большинства учащихся такого же уровня [32].

Изучение и использование преобразований неравенств и их систем, с одной стороны, предполагают достаточно высокую логическую культуру учащихся, а с другой стороны, в процессе изучения и применения таких преобразований имеются широкие возможности для формирования логической культуры [26].

Большое значение имеет выяснение вопросов при выполнении преобразований: являются ли они равносильными или логическим следованием, требуется ли рассмотрение нескольких случаев, нужна ли проверка?

В основе решения неравенств с одной переменной лежит понятие равносильности.

Определение. ***Два неравенства называются равносильными, если их множества решений равны.***

Например, неравенства $2x + 7 > 10$ и $2x > 3$ равносильны, так как их множества решений равны и представляют собой промежуток $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Теоремы о равносильности неравенств и следствия из них аналогичны соответствующим теоремам о равносильности уравнений. При их доказательстве используются свойства истинных числовых неравенств [34].

Теорема 3. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве.

Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$ равносильны на множестве X.

Из этой теоремы вытекают следствия, которые часто используются при решении неравенств:

1. Если к обеим частям неравенства $f(x) > g(x)$ прибавить одно и то же число d, то получим неравенство $f(x) + d > g(x) + d$, равносильное исходному.

2. Если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному [14].

Теорема 4. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ - выражение, определенное на том же множестве, и для всех x из множества X выражение $h(x)$ принимает положительные значения. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ *и* $f(x)\cdot h(x) > g(x)\cdot h(x)$ равносильны на множестве X.

Из этой теоремы вытекает следствие: если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же положительное число d, то получим неравенство $f(x)\cdot d > g(x)\cdot d$, равносильное данному [14].

Теорема 5. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ - выражение, определенное на том же множестве, и для всех x их множества X выражение $h(x)$ принимает отрицательные значения. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ *и* $f(x)\cdot h(x) > g(x)\cdot h(x)$ равносильны на множестве X.

Из этой теоремы вытекает следствие: если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же отрицательное число d и знак неравенства поменять на противоположный, то получим неравенство $f(x)\cdot d > g(x)\cdot d$, равносильное данному [14].

Рассмотрим решение неравенств **с одной переменной**.

Решим неравенство $5x - 5 < 2x - 16$, $x \in \mathrm{R}$, и обоснуем все преобразования, которые мы будем выполнять в процессе решения (табл.1).

Таблица 1

Преобразование неравенства $5x - 5 < 2x - 16$

Преобразования	Обоснование преобразования
1. Перенесем выражение $2x$ в левую часть, а число –5 в правую, поменяв их знаки на противоположные: $5x - 2x < 16 + 5$.	Воспользовались следствием 2 из теоремы 3, получили неравенство, равносильное данному.
2. Приведем подобные члены в левой и правой частях неравенства: $3x < 21$.	Выполнили тождественные преобразования выражений в левой и правой частях неравенства - они не нарушили равносильности неравенств: данного и исходного.
3. Разделим обе части неравенства на 3: $x < 7$.	Воспользовались следствием из теоремы 4, получили неравенство, равносильное исходному.

Решением неравенства $x < 7$ является промежуток $(-\infty, 7)$ и, следовательно, множеством решений неравенства $5x - 5 < 2x + 16$ является промежуток $(-\infty, 7)$.

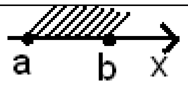
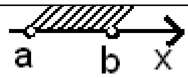
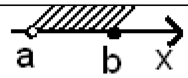
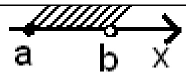
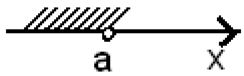
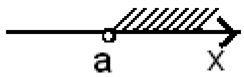
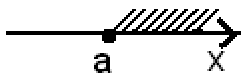
Сложности, которые приходится преодолевать в данном случае, связаны с тем, что далеко не всегда возможно привести равносильность одного и того же преобразования однозначно: в некоторых случаях оно может оказаться, например, равносильным, в других равносильность будет нарушена [23].

Решением неравенства называется значение переменной (неизвестного), при котором неравенство превращается в правильное числовое неравенство. *Например*, число 5 является решением неравенства $x^2 - 6x < 0$, поскольку $5^2 - 6 \cdot 5 < 0$.

Решить неравенство – означает найти все его решения или доказать, что их нет. Решениями неравенства является некоторое подмножество действительных чисел.

Рассмотрим общепринятые обозначения и изображения множеств чисел (табл.2):

Таблица 2

Название	**Обозначение**	**Изображение**	**Запись в виде неравенства**
Числовая прямая	$(-\infty;+\infty), R$		$-\infty < x < +\infty$
Закрытый промежуток (отрезок)	$[a;b]$		$a \leq x \leq b$
Открытый промежуток (интервал)	$(a;b)$		$a < x < b$
Полуоткрытый промежуток	$[a;b)$		$a \leq x < b$
	$(a;b]$		$a < x \leq b$
Бесконечный промежуток (луч)	$(-\infty;a]$		$x \leq a$
	$(-\infty;a)$		$x < a$
	$(a;+\infty)$		$x > a$
	$[a;+\infty)$		$x \geq a$

Если ставится задача найти множество общих решений двух или более неравенств, то говорят, что надо решить ***систему неравенств***. Неравенства, входящие в систему, объединяются фигурной скобкой.

Решением системы неравенств называется ***число***, которое при его подстановке в систему обращает каждое неравенство в верное числовое неравенство.

Решить систему неравенств – значит найти решения для всей системы, либо доказать, что у данной системы решений нет.

Чтобы решить систему неравенств с одной переменной, надо:

1) отдельно решить каждое неравенство;

2) найти пересечение найденных решений, отметив решение каждого неравенства на числовой прямой.

Это пересечение и является множеством решений системы неравенств [22].

Основные виды решения линейных неравенств покажем схематично (рис. 5, рис. 6):

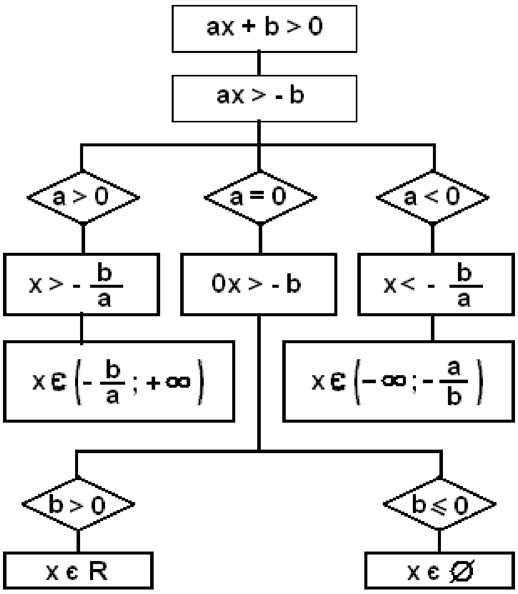


Рис. 5.

Схема решения линейного неравенства ax + b > 0

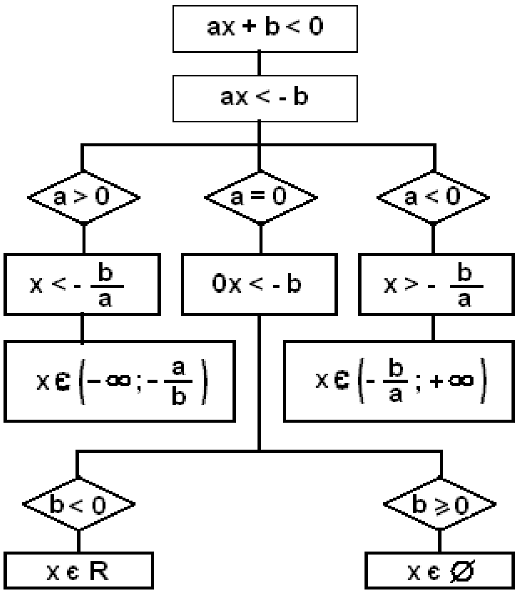


Рис.6.

Схема решения линейного неравенства ax + b < 0

Рассмотрим алгоритмы решения неравенств и систем неравенств, рассматриваемых в курсе основной школы.

Алгоритм решения линейного неравенства.

1. Раскрыть скобки (если нужно);

2. *Неизвестные* перенести *в левую часть* неравенства, *известные в правую часть*. (При переносе *знаки перед слагаемыми изменить* на противоположные *«–» на «+»;«+» на «–»; знак неравенства сохраняется*);

3. В каждой части *привести подобные* слагаемые, получаем неравенство вида: $ax < b$, $ax > b$, $ax \leq b$, $ax \geq b$;

4. Чтобы найти x, число b, стоящее в правой части разделить на коэффициент при $x(a)$, причём, если $a > 0$, то *знак неравенства сохраняется*, если $a < 0$, то *знак меняется* на противоположный (*«<»* на *«>»*; *«>»* на *«<»*;*«≤»* на *«≥»*;*«≥»* на *«≤»*);

5. Решение *изобразить на числовой прямой* и *ответ записать промежутком* [16].

Алгоритм решения системы неравенств с одной переменной.

1. Решить первое неравенство, найти его решение;

2. Решить второе неравенство, найти решение второго неравенства;

3. Найти пересечение двух множеств значений x [26].

Алгоритм решения неравенств второй степени с одной переменной.

1. *Рассмотреть* функцию, заданную формулой $y = ax^2 + bx + c$ и определить куда направлены ветви параболы ($a > 0$ – вверх, $a < 0$ – вниз);

2. Найти *координаты* точек пересечения параболы с осью X, решив уравнение $y = ax^2 + bx + c$, т.е. определить *нули функции*.

3. *Отметить нули функции* на координатной плоскости, используя обозначения точек при решении неравенств.

4. *Схематично* построить параболу согласно описанию (см. п.1 данного алгоритма).

5. Записать ответ в виде промежутка(промежутков), применяя обозначения скобок [18].

Алгоритм решения неравенств методом интервалов.

1 тип

1. Записать неравенство в виде: $(x–x_1)(x–x_2)(x–x_3)\ldots(x–x_n)>0$;

2. Рассмотреть функцию, заданную формулой:

$$f(x)= (x–x_1)(x–x_2)(x–x_3)\ldots(x–x_n);$$

3. Выписать *нули функции*: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$;

4. *Отметить нули функции* на числовой прямой, используя соответствующие обозначения точек;

5. Отметить *интервалы* на числовой прямой;

6. Проверить *знаки функции* на каждом полученном интервале;

7. Записать ответ в виде числового промежутка(промежутков), используя соответствующие обозначения скобок.

2 тип

1. Найти область определения функции $y = f(x)$;

2. Найти нули функции $y = f(x)$;

3. На числовую прямую нанести область определения и нули функции. Нули функции разбивают ее область определения на промежутки, в каждом из которых функция сохраняет постоянный знак;

4. Найти знаки функции в полученных промежутках, вычислив значение функции в какой-либо одной точке из каждого промежутка;

5. Записать ответ [18].

Алгоритм решения неравенства с двумя переменными.

1. Строим график функции $y = f(x)$, который разбивает плоскость на две области.

2. Выбираем любую из полученных областей и рассматриваем в ней произвольную точку. Проверяем выполнимость исходного неравенства для этой точки. Если в результате проверки получается верное числовое неравенство, то заключаем, что исходное неравенство выполняется во всей области, которой принадлежит выбранная точка. Таким образом, множеством

решений неравенства – область, которой принадлежит выбранная точка. Если в результате проверки получается неверное числовое неравенство, то множеством решений неравенства будет вторая область, которой выбранная точка не принадлежит.

3. Если неравенство строгое, то границы области, то есть точки графика функции $y = f(x)$, не включают в множество решений и границу изображают пунктиром. Если неравенство нестрогое, то границы области, то есть точки графика функции $y = f(x)$, включают в множество решений данного неравенства и границу в таком случае изображают сплошной линией [29].

Алгоритм решения систем неравенств с двумя переменными.

1. Построить $F(x;y) = 0$ и $G(x;y) = 0$

2. Взяв из каждой области пробную точку установить, являются ли ее координаты решением системы

3. Объединение полученных областей – решение системы неравенств.

В школьном курсе математики ограничиваются изучением только неравенств основных классов; задания, которые требуют сведения к основным классам, встречаются сравнительно редко. Например, не изучаются биквадратные неравенства.

Из числа типов заданий, в которых проявляется прикладная роль неравенств в курсе алгебры, отметим нахождение области определения функции и исследование корней уравнений в зависимости от параметров [29].

1.3. Содержание и организация обучения решению неравенств и систем неравенств в основной школе

В ходе написания работы и анализа учебной литературы, были рассмотрены учебники различных авторов для основной школы и выделены темы, затрагивающие неравенства и системы неравенств.

1) Математика. Учебник для 5 класса общеобразовательных учреждений/ Зубарева И.И., Мордкович А.Г. «Сравнение дробей».

2) Математика. Учебник для 6 класса общеобразовательных учреждений/ Виленкин Н.Я. «Сравнение чисел».

3) Математика. Учебник для 6 класса общеобразовательных учреждений/ Зубарева И.И., Мордкович А.Г. «Сравнение чисел с разными знаками», «Сравнение дробей», в учебнике также содержатся начальные сведения о неравенствах и их решениях на числовой прямой (тема – «Числовые промежутки»).

4) Алгебра. Учебники для 7 класса общеобразовательных учреждений. Тема не рассматривается (проанализировано 3 учебника, в том числе таких авторов, как Кузнецова Е.П., Шнеперман Л.Б., Мордкович А.Г., Миндюк Н.Г., Макарычев Ю.Н.).

5) Алгебра. Учебник для 8-го и 9-го классов общеобразовательных учреждений/ Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др.

В данных учебниках рассматриваются такие темы, как функции, графики функций, системы уравнений и методы их решения, задачи, решаемые с помощью систем уравнений, числовые неравенства с описанием свойств действий с действительными числами, множества чисел с применением числовых промежутков на числовой прямой. Системы неравенств в учебнике 8 класса не рассматриваются. В 9 классе рассматриваются системы линейных неравенств с одной переменной, неравенства второй степени, рациональные неравенства и методы их решения.

6) Алгебра. 8-й и 9-й классы. Учебник (в 2ч. Ч.1, 2.) для учащихся общеобразовательных учреждений/ Мордкович А.Г., Николаев Н.П.

В учебнике 8 класса освещены такие темы, как линейные и квадратные неравенства, доказательство неравенств, приближенные вычисления, стандартный вид положительного числа. В 9 классе рассматриваются системы рациональных неравенств, линейные и квадратные неравенства.

7) Алгебра. 8 класс. 9 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/ Муравин Г.К., Муравин К.С., Муравина О.В.

В учебнике 8 класса данных авторов интересующая нас тема неравенств не рассматривается. В 9 классе – неравенства, свойства неравенств, рациональные неравенства, метод интервалов.

8) Алгебра. 8 класс. 9 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/ Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. и др.

В учебнике 8 класса этих авторов наиболее полно и широко раскрываются темы неравенств: действия с неравенствами и их свойства (подробно), решение систем неравенств, модуль числа (уравнения и неравенства, содержащие модуль), квадратное неравенство, способы решения квадратных неравенств, решение с помощью графика квадратичной функции, метод интервалов, исследование квадратичной функции. В 9 классе изучают неравенства, содержащие степень.

9) Алгебра. 8 класс. 9 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/ Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Сурвилло Г.С. и др.

Рассматриваются следующие темы уроков по изучению неравенств и их систем: неравенства первой степени с одним неизвестным, квадратные неравенства, решение неравенств, сводящихся к квадратным неравенствам, системы неравенств с одним неизвестным, неравенства и системы неравенств с двумя неизвестными.

10) Алгебра. 9 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/ Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и др.

Этот учебник взят за основу при дальнейшем рассмотрении подробного описания методов решения систем неравенств с одной переменной, так как именно он является основным при обучении в МБОУ «ОСОШ № 2». Рассматривается: числовые неравенства и их свойства, сложение и умножение числовых неравенств, погрешность и точность приближения, пересечение и объединение множеств, числовые промежутки, решение неравенств с одной переменной, решение систем квадратных и рациональных неравенств с одной переменной, а так же в блоке «Для тех, кто хочет знать больше» показана тема доказательства неравенств.

Учебная деятельность в основной школе требует от ученика умения мыслить и организовывать свою деятельность самостоятельно. Многие подростки оказываются к этому не готовы. Присутствуют недостатки в формировании отдельных познавательных процессов. Прежде всего неумение обобщать и классифицировать. Продолжает доминировать наглядно-действенное и наглядно-образное мышление, в то время как обучение на основной ступени требует определенного уровня сформированности мышления в понятиях.

В учебной деятельности присутствует много заданий, успешность выполнения которых зависит от индивидуальных качеств и свойств нервной системы ученика (выносливость нервной системы и ее устойчивость к раздражителям). Неумение применять полученные знания на практике или новом материале, отсутствие должной сформированности учебных умений и навыков, отсутствие привычки выполнять задания самостоятельно – все это не способствует успеваемости ученика [20].

Перечисленные факторы необходимо рассматривать как факторы риска, которые могут стать причинами школьной неуспеваемости.

Требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Неравенства и их системы»:

▪ правильно применять термин «неравенство» и «система неравенств», понимать их в тексте, в речи учителя, понимать и применять формулировку «решить неравенство», решить «систему неравенств»;

▪ уметь решать линейные неравенства и системы линейных неравенств, квадратных и рациональных неравенств применять данное умение при решении задач нестандартного типа, геометрических задач, т.е. прикладное применение данной темы;

▪ уметь логически мыслить, обобщать, четко и правильно формулировать ответы, полученные при решении, в форме, предполагаемой условием задачи.

При выполнении экзаменационной работы предъявляются такие требования, как:

– умение выполнять вычисления и преобразования;

– решать линейные и квадратные неравенства и их системы;

– применять графические представления при решении неравенств и их систем [32].

1.4. Методические особенности изучения основных классов неравенств и их систем

В ходе изучения неравенств становится все более заметной роль общих, универсальных средств решения и исследования. Такие обобщенные средства, приемы можно разделить на три группы.

Первая группа состоит из логических методов обоснования решения. Используя эти методы (например, равносильные преобразования или логическое следование), переходят от исходных неравенств к новым. Такие переходы делаются до тех пор, пока не получаются задания, относящиеся к известным классам [26].

Вторая группа состоит из вычислительных приемов, посредством которых производятся упрощения одной из частей данного неравенства, проверка найденных корней при помощи подстановки вместо неизвестного, различные промежуточные подсчеты в т.д. [26].

В третью группу входят наглядно-графические приемы. Большинство этих приемов используют в качестве основы координатную прямую либо координатную плоскость. Использование координатной прямой позволяет решать некоторые неравенства и системы неравенств с одним неизвестным, а также неравенства с модулями. Например, прием решения систем линейных неравенств с одним неизвестным состоит в том, что на координатную прямую наносятся множества решений каждого неравенства, а потом выделяется их общая часть. Решение неравенств с модулями связывается с геометрической интерпретацией модуля разности чисел [26].

Использование координатной плоскости позволяет применить графические методы к решению и исследованию неравенств и их систем как с одним, так и с двумя неизвестными. Графические приемы эффективно применяются для изображения результатов исследования там, где чисто аналитическая запись громоздка [35]. Характерным примером служит схема, на которой приведены различные случаи решения неравенства $ax^2 + bx + c > 0$, помещенная на рис.7. В результате определенной тренировки учащиеся привыкают пользоваться такой схемой, а затем ее мысленным образом.

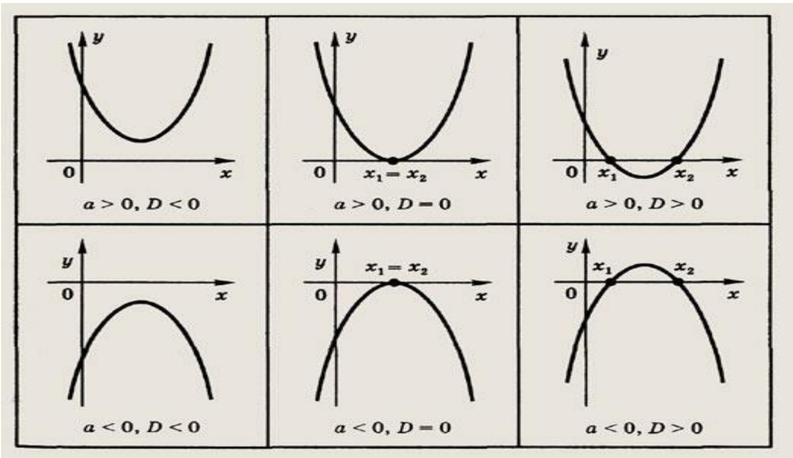


Рис. 7.

Случаи решения неравенства $ax^2 + bx + c > 0$

Классы неравенств можно разбить на **две группы**. Первая группа – рациональные неравенства и системы. Вторая группа – иррациональные и трансцендентные неравенства и системы (нами не рассматриваются). В состав этой группы входят иррациональные, показательные, логарифмические и тригонометрические неравенства (рис.8).

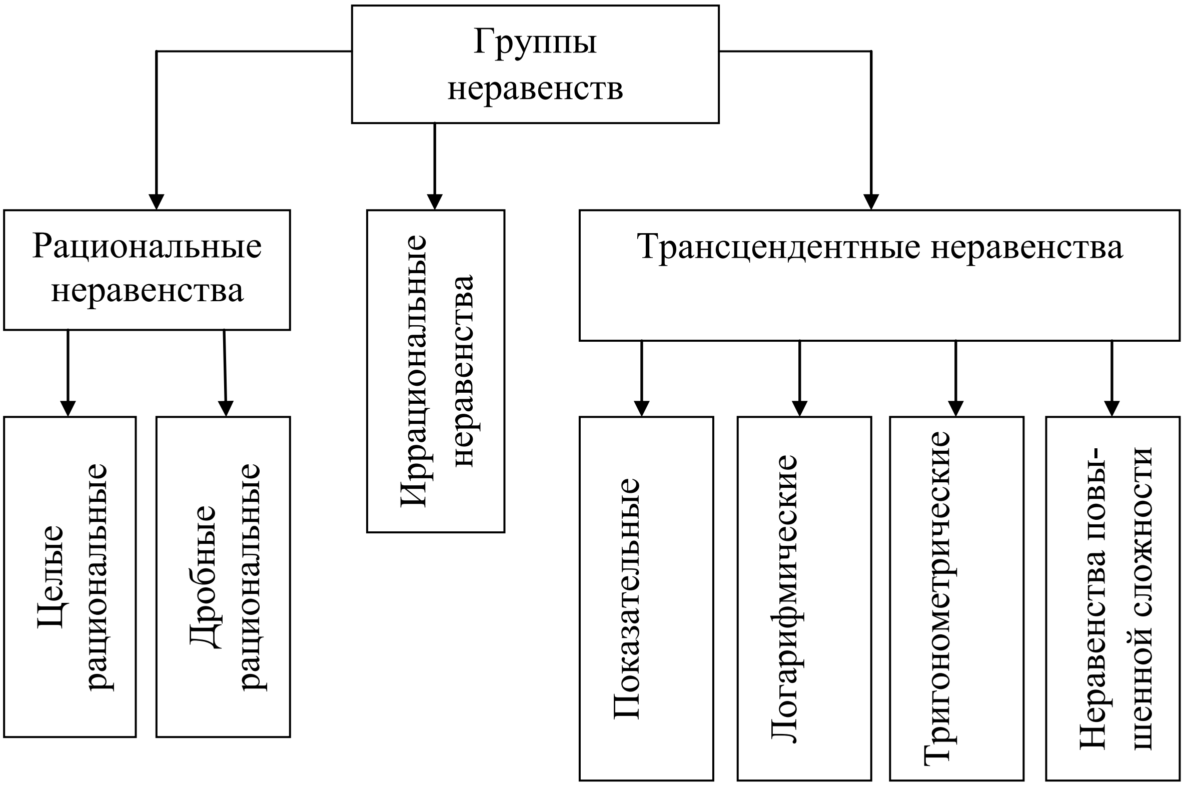


Рис. 8.

Группы неравенств

Последовательность изучения различных классов неравенств и систем различна в разных учебниках. Однако количество возможных вариантов для последовательности их введения не слишком велико – классы находятся в определенной логической зависимости друг от друга, которая предписывает порядок их появления в курсе.

Наличие такого разнообразия подходов затрудняет методическое описание, поскольку принятие того или иного пути требует различных приемов изучения материала.

Отметим ряд особенностей в изучении неравенств:

1) как правило, навыки решения неравенств, за исключением квадратных, формируются на более низком уровне, чем уравнений соответствующих классов;

2) большинство приемов решения неравенств состоит в переходе от

данного неравенства $a > b$ к уравнению $a = b$ и последующем переходе от найденных корней уравнения к множеству решений исходного неравенства. Пожалуй, такого перехода не производится лишь при рассмотрении линейных неравенств, где в нем нет необходимости из-за простоты процесса решения таких неравенств. Эту особенность необходимо постоянно подчеркивать, с тем, чтобы переход к уравнениям и обратный переход превратились в основной метод решения неравенств, в старших классах он формализуется в виде «метода интервалов»;

3) в изучении неравенств большую роль играют наглядно-графические средства. Указанные особенности могут быть использованы для обоснования расположения материала, относящегося к неравенствам, количества заданий, необходимых для усвоения программного минимума.

Первая особенность может быть истолкована так: при выполнении одного и того же числа упражнений, техника решения неравенств какого-либо класса будет ниже, чем уравнений соответствующего класса. Следовательно, если имеется необходимость формирования прочных навыков решения неравенств, то для этого требуется большее число заданий [32].

Вторая особенность объясняет то, что темы, относящиеся к неравенствам, расположены после тем, относящихся к соответствующим классам уравнений. В соответствии с третьей особенностью изучение неравенств зависит от качества изучения функциональной линии школьного курса (построение графиков и графическое исследование функций) [32].

Перечисленные особенности показывают, что изучение предшествующего материала сильно влияет на изучение неравенств. Поэтому роль этапа синтеза в изучении неравенств особенно возрастает [20].

Из числа типов заданий, в которых проявляется прикладная роль неравенств в курсе алгебры, отметим нахождение области определения функции и исследование корней уравнений в зависимости от параметров.

Общая последовательность изучения материала линии неравенств представляет собой соблюдение следующих процессов [25]:

- необходимо учитывать два противоположных направленных процесса, сопровождающие обучение.

Первый процесс – постепенное возрастание количества классов неравенств и приемов их решения, различных преобразований применяемых в решении. За счет увеличения объема материал как бы дробится, изучение его новых фрагментов затрудняется наличием уже изученных.

Второй процесс – установление разнообразных связей между различными классами уравнений, выявление все более общих классов, закрепление все более обобщенных типов преобразований, упрощение описания и обоснования решений.

- в результате взаимодействия этих процессов изученный материал должен представляться учащимся в сравнительно компактном виде, не затрудняющем, а, наоборот, облегчающем усвоение нового. Необходимость установления такого взаимодействия обусловливает применяемые в линии уравнений и неравенств методические приемы, в частности распределение материала обучения по ступеням.

Введение каждого нового основного класса неравенств сопровождается введением новой области числовых выражений, входящих в стандартную форму записи ответа. Вместе с тем, когда материал усвоен, целесообразно изредка предлагать и такие задания, в которых могут возникать нестандартные для данного класса неравенств ответы.

Каждый из основных классов неравенств и их систем требует проведения исследования зависимости результата от коэффициентов, поскольку множества решений у заданий, входящих в один и тот же класс, могут существенно различаться. Для неравенств и их систем в качестве меры различия обычно берутся простейшие особенности геометрических фигур, изображающих их множества решений на координатной прямой или плоскости. Изредка требуется выяснить положительность или отрицательность корней (если неизвестное одно), принадлежность решений уравнений с двумя неизвестными одной из координатных четвертей [46].

На основании изложенного материала можно сделать вывод, что отдельные вопросы методики обучения решению неравенств и их систем в школьном курсе математики освещены достаточно полно.

Несмотря на значительный положительный опыт в методике преподавания темы «Неравенства», как показывает анализ результатов тестов, контрольных, выпускных экзаменационных работ, учащиеся основной школы недостаточно полно владеют основными знаниями и умениями по решению неравенств.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ФОРМИРОВАНИЮ УЧЕБНЫХ НАВЫКОВ ПРИ РЕШЕНИИ НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

Ученик обязан знать формулы решения основных типов простейших неравенств и применять их на практике; применять простейшие тождественные преобразования для приведения неравенств к стандартному виду. Данная тема выбрана мной, исходя из актуальности и сложности изучения решения неравенств. Неравенства применяются как при решении алгебраических, так и геометрических задач. Для успешного усвоения этой важной темы применяется алгоритм решения неравенств. Знания, умения, навыки решения неравенств необходимы при подготовке к ОГЭ, ЕГЭ.

Неравенства встречаются на протяжении всего курса математики. С точки зрения математической логики неравенство является высказыванием. С помощью неравенства задаются основные числовые множества, на языке неравенств нередко формулируется постановка задачи во многих приложениях математики.

Областям функционирования и возникновения понятия неравенств в алгебре соответствуют следующие основные направления раскрытия темы неравенств в школьном курсе математики [28]:

а) главным образом при изучении алгебраического метода решения задач, в том числе текстовых. Этот метод широко применяется в школьной математике.

б) математическое моделирование. Прикладное значение неравенств и их систем определяется их значимостью при данном направлении.

в) теоретико-математическая раскрывается в двух аспектах:

1) изучении наиболее важных классов неравенств;

2) изучении обобщенных понятий и методов в целом.

Использование обобщенных понятий и методов задает упорядоченное изучение линии неравенств и их систем в целом, в свою очередь эти понятия опираются на такие основные понятия, как неравенство, равносильность, логическое следование, что имеет важное значение при изучении темы.

г) направленность на установление связей с предыдущим и последующим содержанием курса математики. Это направление тесно связано с числовой линией. Основная идея, которая реализуется в процессе установления данной взаимосвязи этих линий, – идея последовательного расширения числовой системы. Например, числовые промежутки выделяются линиями неравенств или их системами.

Обратное же влияние состоит в том, что каждая вновь введенная числовая область расширяет возможности составления и решения различных неравенств.

Процесс изучения неравенств тесно связан с функциональной линией. Одна из важнейших связей – приложение методов к исследованию (например, к заданиям на нахождение области определения некоторых функций, их корней, промежутков знакопостоянства и т.д.).

С другой стороны, функциональная линия оказывает существенное влияние как на содержание линии уравнений и неравенств, так и на стиль ее изучения. В частности, функциональные представления служат основой привлечения графической наглядности к решению и исследованию уравнений, неравенств и их систем.

2.1. Пояснительная записка к элективному курсу «Неравенства и их системы в основной школе»

Программа рассчитана на 10 часов. Элективный курс предназначен для повышения эффективности подготовки учащихся 9-го класса к сдаче ОГЭ.

Цель курса: совершенствовать математическую культуру и творческие способности учащихся; обобщить и систематизировать, расширить и углубить, развить умение анализировать и сопоставлять знания по теме, повысить уровень математической подготовки на основе коррекции базовых математических знаний. Курсу отводится 1 час в неделю (вторая – третья четверть учебного года). Всего 10 часов.

Умения и навыки учащихся, формируемые курсом:

- навык самостоятельной работы с таблицами и справочной литературой;
- составление алгоритмов решения уравнений, неравенств и систем уравнений;
- умение анализировать, сравнивать, систематизировать и обобщать;
- уметь решать нестандартные уравнения различными методами.

Особенности курса:

- Краткость изучения материала.
- Практическая значимость для учащихся.

Формы контроля:

1. Контрольно-самостоятельная работа.
2. Тематический контроль-тест.
3. Итоговая работа.

Подбор индивидуальных заданий осуществляется с учетом уровневой дифференциации, причем выбор делают сами ученики, оценивая свои возможности и планируя перспективу развития. Учащимся, ориентированным на выполнение заданий более высокого уровня сложности, предлагается самостоятельный подбор задач на изучаемую тему курса из дополнительной математической литературы.

Ожидаемый результат в результате прохождения курса:

- раскрытие способностей обучающихся;

- возможность приобрести навыки самообразования;

- самореализация своих возможностей;

- умение обращаться к дополнительным источникам;

- возможность применения полученных знаний при решении задач повышенной сложности.

***Учебно-тематический план*:**

№ п/п	Тема	Количество часов	Из них лекционные	практические
1	Линейные и квадратные неравенства	3	1	2
3	Составление математической модели по условию задачи	1	0	1
4	Неравенства с одной переменной и системы неравенств	4	1	3
5	Итоговое занятие (контрольный тест)	2	0	2
	Итого часов	10	2	8

2.2. Особенности обучения решению неравенств и систем неравенств в рамках элективного курса

Разработанное нами пособие представляет собой сборник заданий для повторения темы неравенств и их систем для учащихся 9-х классов основной школы. Содержит краткий теоретический материал по теме, информацию для запоминания, образцы решения типовых заданий и задания для самостоятельной работы, соответствующие требованиям государственной итоговой аттестации, итоговую работу, предназначенную для самопроверки или проверки знаний, в зависимости от плана преподавателя, а так же рекомендации учителю.

В методике даны ответы к каждому примеру для самостоятельного решения и итоговому тесту.

Цель пособия – научить выпускников основной школы ориентироваться в незнакомой математической ситуации, опираясь на основы теоретических знаний.

Если обучающийся запомнит теорию, алгоритм выполнения заданий такого типа, обратит внимание на рекомендации, ему будут посильны любые задания по данной теме [20].

Обучение решению неравенств и систем неравенств.

В краткой форме в пособии представлены следующие теоретические сведения.

Решением неравенства называется значение переменной (неизвестного), при котором неравенство превращается в правильное числовое неравенство.

Решить неравенство **–** означает найти все его решения или доказать, что их нет. Решениями неравенства является некоторое подмножество действительных чисел.

Выражения вида $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ называются неравенствами.

Неравенства вида $f(x) > g(x)$ являются **строгими** неравенствами, а$f(x) \geq g(x)$ – **нестрогими**.

При решении любого неравенства необходимо привести его к более простому путем равносильных преобразований. Все произведения проводятся с учетом свойств числовых неравенств.

§1. Свойства числовых неравенств

1. Если $a > b$, то $a - b > 0$; если $a < b$, то $a - b < 0$.

2. Если $a > b$, то $b < a$.

3. $a > b, b > c \Rightarrow a > c$; $a < b, b < c \Rightarrow a < c$.

4. К двум частям неравенства можно прибавить (или вычесть) равные числа или выражения

$a > b \Leftrightarrow a \pm c > b \pm c$.

5. Два неравенства одинакового смысла можно почленно складывать

$a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$.

6. Из одного неравенства можно почленно вычесть другое неравенство противоположного смысла, оставляя знак первого неравенства

$a > b, c < d \Rightarrow a - c > b - d.$

7. Если две части неравенства умножить или разделить на положительное число, то смысл (знак) неравенства не изменится.

Если две части неравенства умножить или разделить на отрицательное число, то смысл (знак) неравенства изменится на противоположный.

8. Если $a > b$, то $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

9. Если $a > b > 0$, то $a^n < b^n, n \in N$.

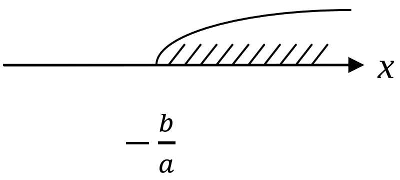
§2. Линейные неравенства

Неравенства вида $ax + b > 0$ или $ax + b < 0$ $(a \neq 0)$ называются *линейными* неравенствами.

$$ax + b > 0$$

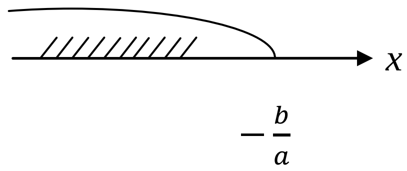
1. Если $a > 0$

$x > -\dfrac{b}{a}$



2. Если $a < 0$

$x < -\dfrac{b}{a}$



3. Если $a = 0$, тогда неравенство принимает вид $0 \cdot x > -b$.

Если $b > 0 \Rightarrow -b < 0$, тогда получим 0 больше отрицательного числа, то есть $x \in R$.

Если $b < 0 \Rightarrow -b > 0$, тогда получим 0 больше положительного числа, то есть неравенство не имеет решения.

Практическое применение преобразований неравенств рассмотрим **на примерах.**

Решить неравенство:

№ 1. $3(x - 2) - 4(x + 1) < 2(x - 3) - 2$

Упростим левую и правую части неравенства:

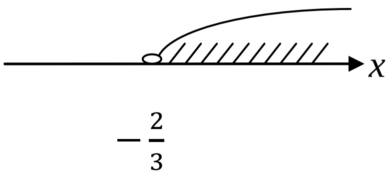
$3x - 6 - 4x < 2x - 6 - 2$

$-x - 10 < 2x - 6 - 2$

$-3x < 2$

$x > -\frac{2}{3}$

Множество чисел x, удовлетворяющих конечному неравенству, на числовой оси изображается лучом, а точка $x = -\frac{2}{3}$ не принадлежит этому лучу (отмечается не закрашенной точкой на числовом луче), сам луч изображен штриховкой.



Ответ: $x \in (-\frac{2}{3}; +\infty)$.

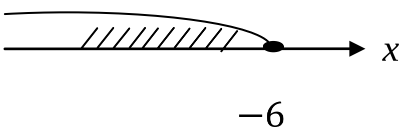
№ 2. $3{,}5(x+1) \le 4x - \frac{2x-1}{2}$

Умножим обе части неравенства на 2:

$7x + 7 \le 8x - 2x + 1$

$7x - 6x \le 1 - 7$

$x \le -6$



Ответ: $x \in (-\infty; -6]$.

Задачи для самостоятельного решения № 1[45]***:***

Решите неравенства:

1. $-2x < 4$
2. $x - 8 \le 3x + 6$
3. $4(x+1) - 6(2-x) > 2$
4. $3x - 5(0{,}6x - 1) < 3$
5. $3x > -9$

6. $-0{,}3x < 9{,}6$

7. $2(x+3) \geq 2x$

8. $3(x+2) - 2(5-x) < 1$

9. $6x - 3(0{,}2x+3) > 2x$

10. $\frac{x+1}{4} - \frac{4x+1}{5} \leq \frac{7-3x}{10}$

При объяснении этой темы учителю необходимо обратить внимание на то, что два неравенства одинакового смысла нельзя вычитать друг из друга, так как в результате можно получить как верное, так и неверное неравенство.

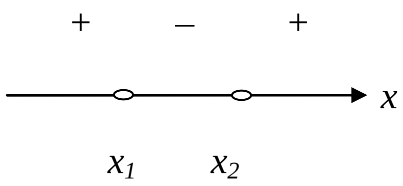
§3. Квадратные неравенства

Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$ $(a \neq 0)$ называются квадратными.

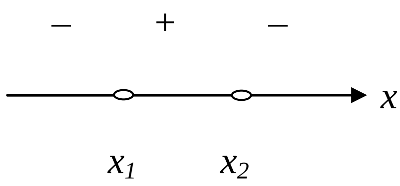
При решении квадратных неравенств используется свойство знакопостоянства квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c > 0, a \neq 0:$$

1. $a > 0, D > 0$



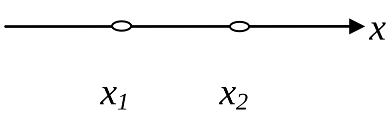
2. $a < 0, D > 0$



План решения квадратного неравенства:

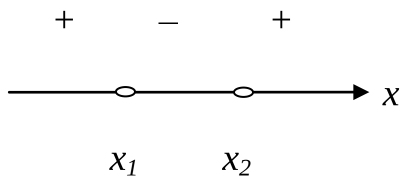
1. Если $D > 0$, трехчлен имеет два различных корня.

1) Найдите корни квадратного трехчлена, то есть решите квадратное уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$. Нанесите числа x_1 и x_2 на числовую ось:

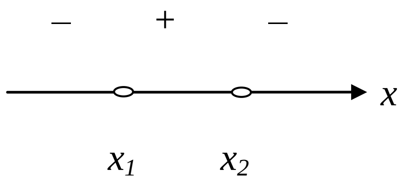


2) Поставьте знаки квадратного трехчлена в полученных интервалах соответственно знаку коэффициенту при x^2.

$a > 0, D > 0$



$a < 0, D > 0$



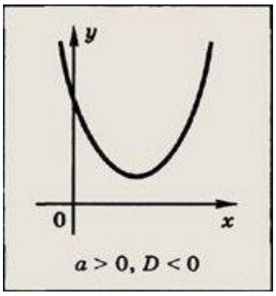
3) Выберите интервалы:

• со знаком «+», если дано неравенство $ax^2 + bx + c > 0$

• со знаком «–», если дано неравенство $ax^2 + bx + c < 0$.

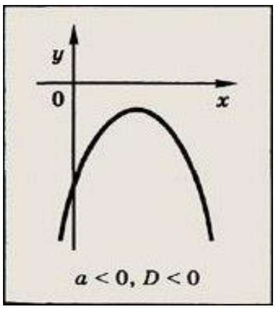
Если данное неравенство нестрогое, то x_1иx_2принадлежат выбранным интервалам.

2. Если $D < 0$,трехчлен имеет следующие решения (см. рисунок ниже):



$ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow x \in R$

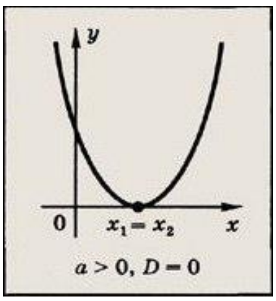
$ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow \emptyset$ (нет решений)



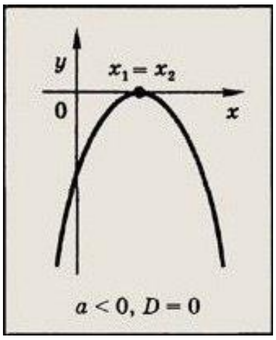
$ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow \emptyset$ (нет решений)

$ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow x \in R$

3. Если $D = 0$, трехчлен имеет следующие решения (см. рисунок далее):



$ax^2 + bx + c \geq 0 \rightarrow x \in R$



$$ax^2 + bx + c \leq 0 \rightarrow x \in R$$

Рассмотрим примеры решения квадратных неравенств.

Решите неравенства:

№ 1. $(4 - 3x)(3x + 4) \geq (2 + 9x)(x + 8)$

Раскроем скобки и перенесем все члены неравенства в левую часть $16 - 9x^2 - (74x + 9x^2 + 16) \geq 0$.

Приведем подобные члены: $-18x^2 - 74x \geq 0 : (-2)$; $9x^2 + 36x \leq 0$ (знак неравенства меняем на противоположный).

Найдем корни квадратного трехчлена:

$9x^2 + 36x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{37}{9}$.

Нанесем корни на числовую прямую

\+ – +

x $\Rightarrow x \in [-\frac{37}{9};0]$

$-\frac{37}{9}$ 0

Ответ: $x \in [-\frac{37}{9};0]$.

№ 2. $8x^2 + 11x + 4 \leq 0$

Найдем корни квадратного трехчлена $8x^2 + 11x + 4 = 0$.

$D = -7 < 0$,значит уравнение не имеет действительных корней, коэффициент при x^2 положительный, парабола находится в верхней полуплоскости. Значит, нет таких значений x, при которых данный трехчлен равен нулю или принимает отрицательные значения. Следовательно, решений нет.

Ответ: $\emptyset$.

№ 3. $5x^2 + 6x + 2 > 0$

Аналогично предыдущему примеру, найдем корни квадратного трехчлена. Получим $D_1 = -1 < 0$, нет действительных корней. Коэффициент при x^2 положительный, парабола находится в верхней полуплоскости. Значит, $5x^2 + 6x + 2$ принимает только положительные значения. Следовательно, x – любой.

Ответ: $x \in R$.

§4. Метод интервалов

Если левая часть неравенства с переменной $y > 0$ $(y < 0)$ разложена на линейные множители, то есть $y = (k_1x + b_1)(k_2x + b_2) \dots (k_nx + b_n)$, **(1)**
то такое неравенство можно решить методом интервалов (его иногда называют еще методом промежутков).

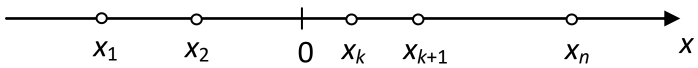
Метод интервалов основан на свойствах функции и заключается в следующем:

Пусть дано неравенство $y > 0$ $(y < 0)$, где y имеет вид **(1)**.

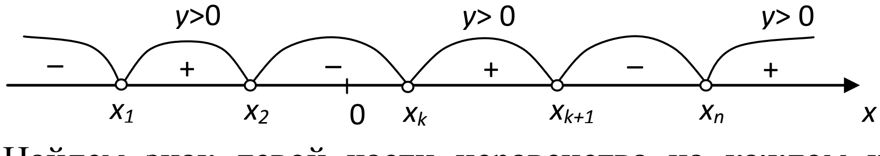
1. Найдем корни уравнения $y = 0$

$$x_1 = -\frac{b_1}{k_1};\ x_2 = -\frac{b_2}{k_2};\ \dots;\ x_n = -\frac{b_n}{k_n}$$

2. Нанесем корни уравнения на числовую прямую



Эти корни разбивают числовую прямую на $n + 1$ промежуток, на каждом из которых левая часть неравенства $y > 0$ $(y < 0)$ сохраняет знак (то есть во всех точках промежутка либо $y > 0$, либо $y < 0$), поскольку, по свойствам функции, изменить знак она может только при переходе через корни ее множителей.



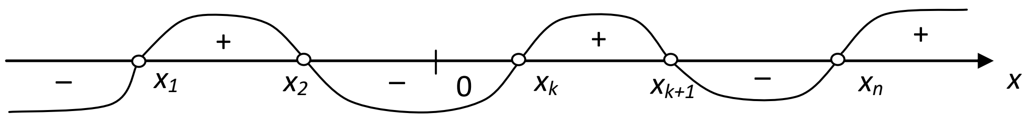
3. Найдем знак левой части неравенства на каждом из полученных интервалов. Для этого на каждом из интервалов выберем какое-то значение

$x = x_0$ и, подставив это значение в левую часть неравенства, определим ее знак (метод пробных точек).

4. Выберем те промежутки, где выполняется это неравенство.

Замечание 1. Неравенство $y \geq 0$ $(y \leq 0)$ тоже можно решать методом интервалов. В этом случае корни уравнения $y = 0$, *где* y имеет вид ***(1)***, являются решениями и неравенства.

Замечание 2. В п.2, предложенного выше алгоритма, достаточно было найти знак левой части неравенства на промежутке $(x_n; +\infty)$, а потом учесть, что она меняет знак при переходе от одного промежутка к соседнему и нарисовать «кривую знаков».



Там, где кривая расположена выше оси, левая часть неравенства положительна, а там, где эта кривая расположена ниже оси, левая часть неравенства отрицательна. Однако метод «кривой знаков» годится без дальнейших оговорок лишь в случае, когда все множители в левой части имеют первую степень.

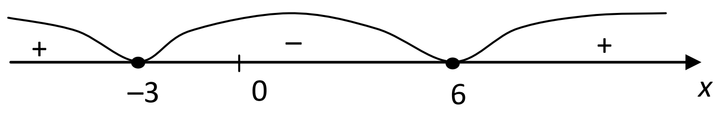
Рассмотрим примеры решения неравенств методом интервалов.

№ 1. $(x - 6)(x + 3) \geq 0$

1. Найдем корни уравнения

$$(x-6)(x+3)=0 \Leftrightarrow \begin{array}{lll} x-6=0 & \Leftrightarrow & x=6 \quad \text{или} \\ x+3=0 & \Leftrightarrow & x=-3 \end{array}$$

2. Нанесем полученные корни на числовую прямую, причем, так как неравенство нестрогое и эти корни являются решениями и неравенства, изобразим их черными точками.



3. Найдем знак левой части на каждом из полученных промежутков

1) $[6; +\infty)$

$x = 7$, $y(7) = (7 - 6)(7 + 3) = 1 \cdot 10 = 10 > 0 \Rightarrow y > 0$;

2) [–3; 6]

$x = 0$, $y(0) = (0 - 6)(0 + 3) = -6 \cdot 3 = -18 < 0 \Rightarrow y < 0$;

3) (–∞; –3]

$x = -4$, $y(-4) = (-4 - 6)(-4 + 3) = -10 \cdot (-1) = 10 > 0 \Rightarrow y > 0$.

4. Нашему неравенству удовлетворяют два промежутка:

(–∞; –3] и [6; +∞), поэтому

Ответ: $(-\infty; -3] \cup [6; +\infty)$.

№ 2. $-x^2 - 2x + 48 < 0$

1. Разложим левую часть неравенства на множители

$-x^2 - 2x + 48 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 48 = 0$

Для решения этого квадратного уравнения воспользуемся теоремой Виета.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2, \\ x_1 \cdot x_2 = -48; \end{cases} \Rightarrow x_1 = -8; \; x_2 = 6.$$

Разложим квадратный трехчлен $-x^2 - 2x + 48$ на множители:

$-x^2 - 2x + 48 = -(x + 8)(x - 6)$, таким образом имеем неравенство:

$-(x + 8)(x - 6) < 0$.

Домножим обе части неравенства на (–1), при этом поменяется и знак неравенства: $(x + 8)(x - 6) > 0$

Решим его методом интервалов:

1. корни уравнения $(x + 8)(x - 6) = 0$ мы нашли: $x_1 = -8$, $x_2 = 6$.

2. нанесем их на числовую прямую

3. определим знак неравенства на промежутке (6; +∞)

$x = 7$, $y(7) = (7 + 8)(7 - 6) = 15 \cdot 1 = 15 > 0$ и проведем кривую знаков.

Ответ: $(-\infty; -8) \cup (6; +\infty)$.

№ 3. $\frac{(x-1)^2}{5} - \frac{x+4}{6} < \frac{2x-2}{3}$

1. Приведем неравенство к виду $y < 0$

1.1. Для этого, все члены из правой части перенесем в левую с противоположным знаком и приведем все дроби к общему знаменателю

$$\frac{6(x-1)^2-5(x+4)-10(2x-2)}{30}<0$$

1.2. Домножим обе части неравенства на 30 (так как 30>0, знак неравенства не изменится), раскроем скобки и приведем подобные члены

$$6x^2-12x+6-5x-20-20x+20<0$$

$$6x^2-37x+6<0$$

1.3. Разложим левую часть полученного неравенства на множители

$$6x^2-37x+6=0$$

$$x_{1,2}=\frac{37\pm\sqrt{37^2-4\cdot 6\cdot 6}}{12}=\frac{37\pm\sqrt{1225}}{12}$$

$$x_1=\frac{37+35}{12}=\frac{72}{12}=6;\ x_2=\frac{37-35}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

$$6x^2-37x+6=6(x-6)\left(x-\frac{1}{6}\right)$$

2. Методом интервалов решим полученное неравенство, которое равносильно первоначальному.

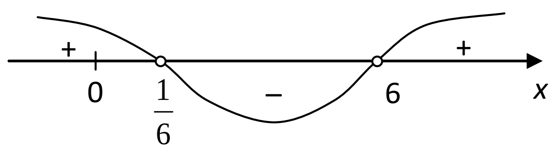
$$6(x-6)(x-\frac{1}{6})<0$$

Нанесем на числовую прямую корни уравнения $y = 0$

Найдем знак левой части на промежутке $(6; +\infty)$:

$x = 7,\ y(7) = 6(7-6)(7-\frac{1}{6}) = 6\cdot\frac{41}{6} = 41 > 0 \Rightarrow y > 0.$

Проведем кривую знаков.



Ответ: $\left(\frac{1}{6};6\right)$.

Метод интервалов применим и к неравенствам, левая часть которых – дробь, у которой числитель и знаменатель разложены на линейные множители, например, к неравенству

$$\frac{4(x-5)(2x+6)}{(6-3x)(x+8)} \le 0$$

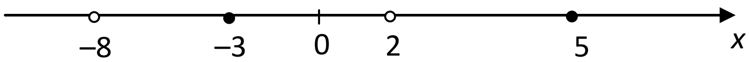
В этом случае находим значения x, которые обращают в нуль и числитель и знаменатель (то есть решаем уравнения $(x – 5)(2x + 6) = 0$ и $(6 – 3x)(x + 8) = 0$), а затем, действуем по алгоритму приведенному выше, учитывая, что значения x, обращающие в нуль знаменатель не являются решениями неравенства (изображаем их «дырками»).

Решим записанное неравенство:

1. $(x – 5)(2x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ или $x = -3$;

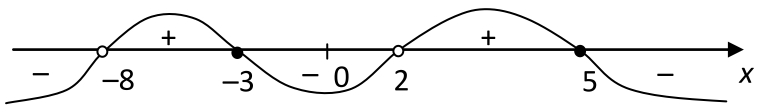
$(6 – 3x)(x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ или $x = -8$.

2. Нанесем полученные значения x на числовую прямую



3. Определим знак левой части неравенства на интервале $[5; +\infty)$.

$x = 6$, $y(6) = \dfrac{4(6-5)(2\cdot 6+6)}{(6-3\cdot 6)(6+8)} = \dfrac{32}{-12\cdot 14} < 0$ и проведем кривую знаков.



Ответ: $(-\infty;\ -8)\cup[-3;\ 2)\cup[5;\ +\infty)$

№ 4. Найти при каких значениях x выражение имеет числовое значение

$$\sqrt{\frac{-2x-10}{5x+15}}.$$

Так как арифметический квадратный корень вычисляется только из неотрицательного числа, то для того, чтобы выражение имело числовое значение, нужно чтобы выполнялось неравенство $\dfrac{-2x-10}{5x+15} \ge 0$

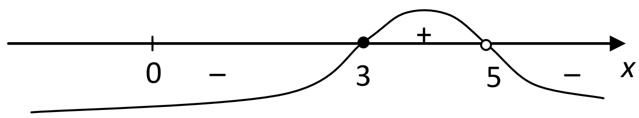
Найдем значения x, при которых это неравенство выполняется, то есть решим это неравенство. Для решения воспользуемся методом интервалов.

1. Решим уравнения

$-2x - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow x = 5$

$5x + 15 = 0 \quad \Leftrightarrow x = 3$

2. Нанесем полученные значения на числовую прямую, найдем знак



левой части неравенства на промежутке (5; +∞), проведем кривую знаков.

$x = 6$, $y(6) = \dfrac{-2\cdot 6 - 10}{5\cdot 6 + 15} = \dfrac{-22}{45} < 0 \Rightarrow$ на (5; +∞) $y < 0$

Решением неравенства является промежуток [3; 5).

Ответ: выражение $\sqrt{\dfrac{-2x-10}{5x+15}}$ имеет числовое значение при $3 \le x < 5$.

Задачи для самостоятельного решения № 2 [45]***:***

Решите квадратное неравенство (в том числе методом интервалов):

1. $(x+5)(x-3) < 0$;
2. $(x-2)(x+1) > 0$;
3. $(x-1)(x-8) \geq 0$;
4. $(x+5)(x+7) \leq 0$;
5. $2x^2 \geq 4x$;
6. $3x^2 \leq 12x$;
7. $x^2 - 16 > 0$;
8. $x^2 - 9x < 0$;
9. $x^2 < 25$;
10. $x^2 > 4$;
11. $x^2 - 3x - 4 \leq 0$;
12. $x^2 + 3x - 4 \geq 0$;
13. $x^2 - 6x + 9 \geq 0$;
14. $x^2 + 10x + 25 \leq 0$;
15. $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$;

16. $-x^2 + 4x - 4 < 0$;

17. $4x^2 + 4x + 1 > 0$;

18. $x^2 - 2x + 1 < 0$;

19. $-5x^2 + x - 2 > 0$;

20. $-6x^2 - 2x + 1 < 0$.

При повторении этой темы учителю необходимо сделать акцент на том, что нельзя умножать и делить две части неравенства на 0 или выражение, равное 0, а так же нельзя умножать или делить (сокращать) неравенства на выражение, содержащее переменную величину, так как неизвестен знак этого выражения (и не известно, меняется или нет смысл неравенства).

Важно указать и на то, что квадратный трехчлен можно разложить на множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена, $a \neq 0, D \geq 0$, а затем решить его методом интервалов.

§5. Системы неравенств

Система неравенств – это несколько неравенств с одной переменной.

Решение системы неравенств – это значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство.

Рассмотрим ***системы линейных уравнений с одной переменной***, их виды и методы решения.

Системы вида : $\begin{cases} a_1x > b_1 \\ a_2x > b_2 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1x < b_1 \\ a_2x > b_2 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1x > b_1 \\ a_2x < b_2 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1x < b_1 \\ a_2x < b_2 \end{cases}$.

называются системами двух линейных уравнений с одной переменной. (Вместо знаков >, < могут быть знаки ≥, ≤).

Чтобы решить систему неравенств, надо каждое неравенство системы решить отдельно, а потом найти решение системы как пересечение множеств решений полученных неравенств.

№ 1. Решите системы неравенств:

$$\begin{cases} 3x \geq 45 \\ 2x + 12 < 6 \end{cases}.$$

Решение: после преобразований получим: $\begin{cases} x \geq 15 \\ x < -3 \end{cases}$.

Перенесем эти значения на числовую прямую. Пересечений данных множеств нет. Следовательно, решений нет.

Ответ: $\emptyset$.

Часто встречаются задания, рассматривающие **двойные неравенства**, например:

№ 2. Решите двойное неравенство: $-4 < 2 + 3x < 7$ и укажите наибольшее и наименьшее целое число, которое является его решением.

Решение: преобразуем левую и правую части неравенства, прибавив к каждой части (–2) (и к центральной части тоже), а далее разделим все части неравенства на коэффициент при неизвестном и получим:

$-6 < 3x < 5$

$-2 < x < 1\frac{2}{3}$ Отсюда следует, что значения $x \in (-2; 1\frac{2}{3})$.

Ответ: $x = -1$ – наименьшее целое значение, $x = 1$ – наибольшее целое значение.

Приходится решать системы неравенств, содержащие **дробные неравенства**, но и здесь, путем дополнительных преобразований (приведение к общему знаменателю, умножение каждого слагаемого на общий знаменатель) учащиеся находят требуемое решение без особых затруднений.

Система неравенств может содержать **не два, а три и более неравенств**. Необходимо произвести с ними типичные преобразования, предусмотренные данной темой, что позволит опять прийти к стандартному ответу.

№ 3. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x - 4 < 8 \\ 2x + 5 < 13 \\ 3 - x > 1 \end{cases}$.

Решив каждое неравенство, получим новую систему:

$$\begin{cases} x < 12 \\ x < 4 \\ 3 - x > 1 \end{cases}.$$

Построив числовую прямую с пересечением решений данных неравенств, получим $x < 2$.

Ответ: $x \in (-\infty; 2)$

Доказательство неравенств сводится к тому, что сначала преобразуется его левая или (и) правая часть, далее их сравнивают. Если полученный знак неравенства верен, данное неравенство считают доказанным.

Задания с неравенствами и их системами находят **применение в геометрии**. Например: оцените длину средней линии треугольника ABC, которая параллельна стороне AB, если $10{,}4 < AB < 10{,}5$.

При решении задачи, необходимо вспомнить формулу вычисления средней линии треугольника, далее получим новое неравенство:

$10{,}4:2 < AB : 2 < 10{,}5:2$

$5{,}2 < AB : 2 < 5{,}25$. Конечное неравенство будет являться решением задачи.

Задачи для самостоятельного решения № 3 [45]***:***

Решите системы неравенств:

1. $\begin{cases} x > 3 \\ x \geq 7 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} x > -3 \\ x < 6{,}5 \end{cases}$;
3. $\begin{cases} 2x > 5 \\ -3x \geq 9 \end{cases}$;
4. $\begin{cases} -5x < -1 \\ 6x - 5 < 4x \end{cases}$;
5. $\begin{cases} 5x > 5x - 3 \\ -3x < 2 \end{cases}$;
6. $\begin{cases} 3x + 2 > 0 \\ 5x - 3 \leq 0 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} 5 - 3x \leq 0 \\ 4 - x < 6 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 4x - 7 \leq 0 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} 12x - 5 \leq 0 \\ 3x + 14 > 0 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} 4x + 2 > 0 \\ 3x - 6 \leq 0 \end{cases}$;

11. $\begin{cases} 5 + 2x < 0 \\ x - 7 \leq 4 \end{cases}$;

12. $\begin{cases} -x < 3 \\ 2x \leq 5 \end{cases}$;

13. $\begin{cases} x^2 + 5x - 6 < 0 \\ -3x \leq 12 \end{cases}$;

14. $\begin{cases} 3x^2 - 3x - 36 \geq 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases}$.

Во время прохождения этой темы учителю необходимо обратить внимание учащихся на то, что система неравенств с одной переменной может иметь как конечное, так и бесконечное множество решений, и если хотя бы одно из неравенств системы не имеет решений, то и вся система не имеет решений, а пересечение непустого и пустого множеств дает в результате пустое множество.

Итоговая работа для самостоятельного решения [19]**.**

Вариант 1.

1. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 3x < 4 \\ -2x > 1{,}8 \end{cases}$.

2. Решите неравенство: $3x - 4 < 2(x + 1)$.

3. Решите неравенство: $x^2 - 5x - 6 \geq 0$.

4. При каких значениях c выражение $c + 18$ принимает положительные значения?

5. Укажите неравенство, решением которого является любое число. Запишите номер правильного ответа.

1) $x^2 - 86 > 0$; 2) $x^2 + 86 > 0$;

3) $x^2 - 86 < 0$; 4) $x^2 + 86 < 0$.

6. Решите систему неравенств: $\begin{cases} (x+2)(x-3) > 0 \\ 2(x+5) - 3(x-7) < 6 \end{cases}$.

7. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2 + 7x + 10 < 0 \\ -21 - 7x \le 0 \end{cases}$.

8. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2 \ge 81 \\ x^2 + 10x < 0 \end{cases}$.

Вариант 2.

1. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 2x < 5 \\ -3x > 1{,}2 \end{cases}$.

2. Решите неравенство: $6x + 1 \le 2x$.

3. Решите неравенство: $x^2 + 3x - 4 \ge 0$.

4. При каких значениях k выражение $15 - 2k$ принимает отрицательные значения?

5. Укажите неравенство, решением которого является любое число. Запишите номер правильного ответа.

1) $-x^2 + 93 > 0$; 2) $-x^2 - 93 > 0$;

3) $-x^2 + 93 < 0$; 4) $-x^2 - 93 < 0$.

6. Решите систему неравенств: $\begin{cases} (x+5)(x-6) \ge 0 \\ 6(x+1) < 7x - 3(2-x) \end{cases}$.

7. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 2x^2 + 3x - 20 > 0 \\ x + 5 \ge 0 \end{cases}$.

8. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2 \le 16 \\ x^2 + 5x > 0 \end{cases}$.

Справочные материалы представлены в виде алгоритма решения полных и неполных квадратных уравнений.

Рекомендации для учащихся включают в себя советы при выполнении заданий и повторении темы.

Учитель проверяет правильность написания самостоятельных работ учащихся с помощью ключей (ответов), представленных далее.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения.

Задачи для самостоятельного решения № 1

1. $x > -2$ **2**. $x \geq -7$ **3**. $x > 1$ **4**. нет решений **5**. $x > -3$

6. $x > -32$ **7**. $x \geq 8$ **8**. любое число **9**. $x < 1$ **10**. $x > 2\frac{11}{17}$

Задачи для самостоятельного решения № 2

1.$-5 < x < 3$ **2**. $x < -1, x > 2$ **3**. $x \leq 1, x \geq 8$ **4**. $-7 \leq x \leq -5$

5. $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$ **6**. $[0; 4]$ **7**. $x < -4, x > 4$ **8**. $0 < x < 9$

9. $-5 < x < 5$ **10**. $x < -2, x > 2$ **11**.$-1 \leq x \leq 4$ **12**. $x \leq -4, x \geq 1$

13. любое число **14**. -5 **15**. 1 **16**. $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

17. $x < -0{,}5, x > -0{,}5$ **18**. нет решений **19**. нет решений **20**. любое число

Задачи для самостоятельного решения № 3

1. $x \geq 7$ **2**. $-3 < x < 6{,}5$ **3**. $x \leq -3$ **4**. $0{,}2 < x < 2{,}5$ **5**. $x > -\frac{2}{3}$

6. $\left(-\frac{2}{3}; 0{,}6\right]$ **7**. $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$ **8**. $\left(1\frac{1}{2}; 1\frac{3}{4}\right]$ **9**. $\left(-\frac{14}{3}; \frac{5}{12}\right]$ **10**. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right]$

Итоговая работа для самостоятельного решения

Вариант 1. **1**. $x < -0{,}9$ **2**. $x < 6$ **3**. $x \leq -1, x \geq 6$ **4**. При $c > -18$

5. 2 **6**. $(25; +\infty)$ **7**. $[-3; -2)$ **8**. $(-10; -9]$

Вариант 2. **1**. $x > -0{,}3$ **2**. $x < -12$ **3**. $-4 \leq x \leq 2$ **4**. При $k > 7{,}5$

5. 4 **6**. $[6; +\infty)$ **7**. $[-5; -4) \cup (2{,}5; +\infty)$ **8**. $(0; 4]$

2.3. Сравнительный анализ результатов итоговой аттестации обучающихся основной школы за два года

При подготовке к итоговой аттестации учащихся ОСОШ № 2 г. Очер в 2017 году были учтены результаты аттестации 2015-2016 учебного года (данные показаны в виде диаграммы на рисунке 9), а также результаты написания пробных экзаменационных работ за курс основного образования в 2017-ом году (диаграмма, изображенная на рисунке 10 отображает результаты).

Как показал анализ этих работ, чаще всего у учащихся возникали проблемы именно при решении неравенств и их систем. В контексте ОГЭ эти задания под № 8 (часть 1).

Типичные ошибки обучающихся:

1) неумение «правильно прочесть» неравенство;

2) чтение знаков и их перемена;

3) правильное изображение данных решения на числовой прямой;

4) запись ответа.

Был сформирован отчет в виде анализа работ учащихся 9-х классов в формате ОГЭ за 2016-й (до проведения занятий по предложенной методике в рамках проведения элективного курса по изучению неравенств и их систем).

При рассмотрении данной темы в процессе обучения учащихся и результатов проведенной работы сделаны следующие выводы:

1) недостаточно иметь лишь представления об общих методах и способах преобразования неравенств, необходимо элементы их преобразований вносить в каждый урок по данной теме в виде повторения;

2) анализ учебников 8-х и 9-х классов показал, что у разных авторов темы неравенств раскрыты по-разному, если в одном учебнике тема раскрыта полно и широко, то в другом учебнике темы неравенств и их систем не рассматриваются вовсе;

3) при дальнейшем изучении темы, решая примеры на преобразование и решение систем неравенств, необходимо расширить изучение неравенств, а именно их виды и способы решения с подробным описанием примеров;

4) необходимо систематизировать подход к решению систем неравенств с одной переменной, создавая алгоритмы решения, что намного упрощает усвоение темы учащимися, формирует умение работать по алгоритму.

При изучении темы особое внимание было уделено 3 пункту.

На методическом совете школы в августе 2016-го года было принято решение разработать и провести апробацию программы, направленной на расширение базовых знаний, навыков решения задач такого типа, а также на устранение «пробелов» в темах, в которых обучающиеся набрали наименьшее количество верно выполненных заданий, в том числе по исследуемой теме.

В итоге мной разработан и представлен на утверждение школьному методическому совету элективный курс по теме «Неравенства и их системы в основной школе», который включил в себя не только тематическое планирование с указанием часов и тем повторения, но и в рамках этого элективного курса разработана и представлена методическая разработка, которая в свою очередь, так же была утверждена школьным объединением в сентябре 2017-го года.

После апробации введенной методики нами проанализированы результаты тренировочного ОГЭ за 2017-й год (обучающимися прослушан элективный курс по предложенной программе и разработанной методике обучения).

Данные проведенных работ в основной школе в развернутом виде за вышеуказанные периоды (в выполнении задания № 8 ОГЭ)представлены в *Приложении 1* (2015-2016 учебный год) и *Приложении 2* (2016-2017 учебный год).

Качество выполнения экзаменационных работ в процентном соотношении за два отчетных года на рисунке ниже (рис.9).

В 2016-м году с заданием справились 5 человек из 10 (процент выполнения составил 50%), в 2017-м процент выполнения оказался выше на 39% , в сумме составив 89% (с заданием справилось 8 из 9 учащихся).

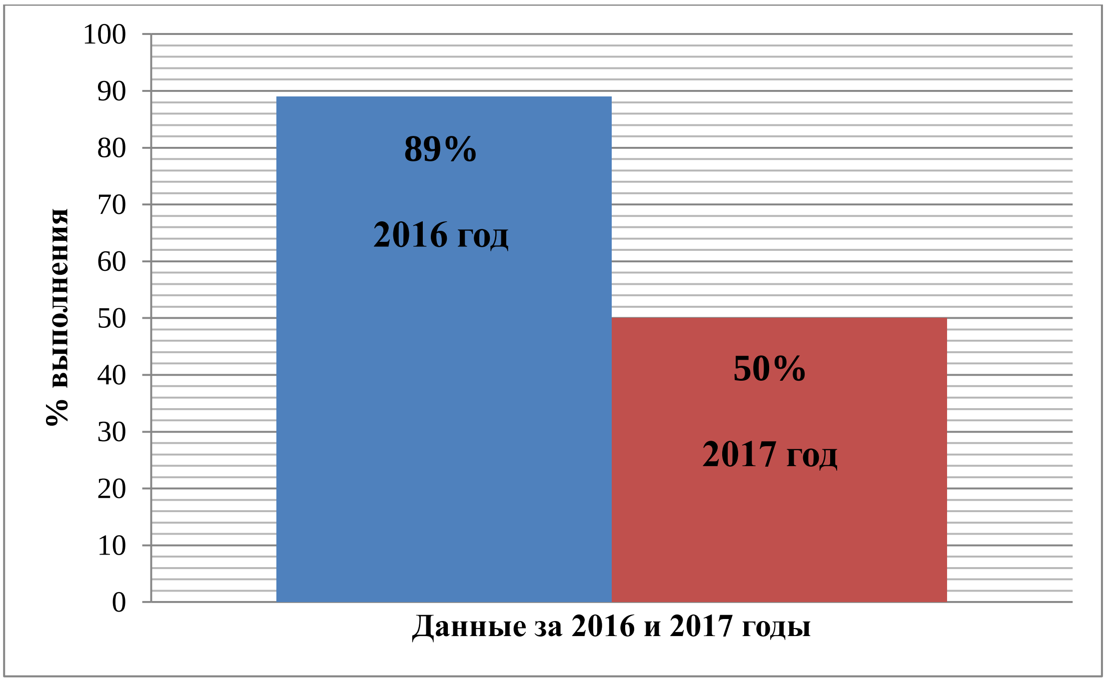


Рис. 9.

Сравнительный анализ выполнения № 8 ОГЭ

в 2016-м и 2017-м годах

Очевидно, что результаты выполнения тестирования за 2016-й год ниже, чем за отчетный период 2017-го года.

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что введенная методическая разработка при повторении темы «Неравенства и их системы» за курс основной школы демонстрирует **положительный результат ее апробации**, что имеет важное значение не только при обучении, но и при подготовке учащихся к итоговой государственной аттестации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной работе представлены результаты исследования, предпринятого с целью разработки методических рекомендаций к изучению неравенств и их систем в процессе обучения в основной школе.

В ходе исследования получены следующие результаты:

1. На основе анализа литературы представлены исторические сведения о возникновении линии неравенств, содержание и организация обучения решению неравенств и систем неравенств в рамках учебной программы основной школы, выделены основные типы их преобразований.

2. Описаны методические особенности изучения основных классов неравенств в рамках обучения в школе.

3. Разработана и апробирована программа элективного курса «Неравенства и их системы» для учащихся 9-х классов ОСОШ № 2 (г. Очер Пермского края), включающая в себя методическую разработку для повторения учащимися темы, предусматриваемой программой элективного курса.

4. Проведен анализ результатов решения неравенств и систем неравенств учащимися основной школы (ОСОШ № 2, г. Очер Пермского края) в формате ОГЭ за 2016-й и 2017-й годы (то есть до и после введения методических рекомендаций).

На основе полученных результатов исследования можно сделать вывод, что введенная методическая разработка при повторении темы «Неравенства и их системы» за курс основной школы в рамках прохождения элективного курса демонстрирует положительный результат ее апробации.

Это демонстрирует практическую значимость выпускной квалификационной работы, материалы которой могут быть использованы учителями математики, преподающими в основном звене школы, с целью подготовки учащихся к итоговой государственной аттестации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Алгебра*: учебник для 7-х классов общеобразовательный учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под. ред. С.А. Теляковского.–М. : Просвещение, 2008. – 240 с.

2. *Алгебра*. 7 класс: В двух частях. Ч. 2: Задачник для общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская; под. ред. А.Г. Мордковича.– М. : Мнемозина, 2008. – 223 с.

3. *Алгебра*: учебник для 8-х классов общеобразовательный учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под. ред. С.А. Теляковского.–М. : Просвещение, 2005. – 238 с.

4. *Алгебра*: учебник для 8 класса общеобразовательных учреждений/ С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников и др. – 3-е изд.– М. : Просвещение, АО «Московские учебники», 2006. – 287 с.

5. *Алгебра*. 8 класс. В 2ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (повышенный уровень)/ А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – 10-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 256 с.

6. *Алгебра*. 8 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/ Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 15-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2013. – 254 с.

7. *Алгебра*. 8 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/ Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин и др. – 18-е изд. – М. : Просвещение, 2011. – 255 с.

8. *Алгебра*. 8 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков и др. – 17-е изд. – М. : Просвещение, 2009. – 271 с.

9. *Алгебра*. 8 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/ Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, Г.С. Сурвилло и др. – 9-е изд., дораб. – М. : Просвещение, 2010. – 303 с.

10. *Алгебра* 8 класс: В двух частях. Ч. 2: Задачник для общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская; под. ред. А.Г. Мордковича.– М. : Мнемозина, 2008. – 255 с.

11. *Алгебра*: учебник для 9-х классов общеобразовательный учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под. ред. С.А. Теляковского.–М. : Просвещение, 2008. – 272 с.

12. *Алгебра.* Нестандартные задачи. Экспресс-репетитор для подготовки к ГИА. 9 класс / Г. В. Сычева, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев – М. : Астрель, 2010. – 128 с.

13. *Алгебра. Сборник заданий* для подготовки к государственной итоговой аттестации в 9 классе. ГИА / / Кузнецова Л.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А., Колесникова Т.В., Рослова Л.О./М. : Просвещение, 2011 – 147 с.

14. *Больше - меньше* (неравенства множеств) / Г. П. Шалаева — М. : АСТ, Слово, 2010.– 64 с.

15. *Вавилов В.В.* Задачи по математике. Уравнения и неравенства / В.В. Вавилов. – М. : Книга по Требованию, 2012. – 237 с.

16. *Вавилов В.В.* Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, и др. – М. : Машиностроение, 1997. – 240 с.

17. *ГИА-9класс.* Математика. Тематические тестовые задания / Л.Д. Лаппо, М.А. Попов /М. : Экзамен, 2011. – 98 с.

18. *Гилемханов Р.Г.* Об одном способе решения неравенства второй степени с одной переменной //Математика в школе. – 2014. – №8. – с. 69

19. *Государственная итоговая аттестация* выпускников 9 классов в новой форме. Математика / Кузнецова Л.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А., Колесникова Т.В., Рослова Л.О./М. : Интелект-Центр, ФИПИ, 2011. – 189 с.

20. *Гусев В.А.* Теория и методика обучения математике: психолого-педагогические основы / В.А. Гусев. – М. : Бином, 2013. – 456 с.

21. *Давыдов В.В.* и др. Обучение математике/ В.В. Давыдов, С.Ф. Горбов и др. – М. : Мирос, 1994. – 192 с.

22. *Денищева Л.О.* Теория и методика обучения математике в школе: Учебное пособие / Л.О. Денищева, А.Е. Захарова, И. Зубарева. – М. : Бином, 2011. – 247 с.

23. *Денищева Л.О.* Теория и методика обучения математике в школе: Учебное пособие / Л.О. Денищева, А.Е. Захарова, И. Зубарева. – М. : Бином, 2014. – 247 с.

24. *Задачи по математике.* Уравнения и неравенства / В.В. Вавилов и др. – М. : Физматлит, 2010. – 240 с.

25. *Имранов Б.* О системе изучения неравенств //Математика в школе. – 2012. – №7. – с. 38

26. *Козловский С.Н.* Методика обучения математике: Учебное пособие / С.Н. Козловский. – СПб.: Лань, 2015. – 512 с.

27. *Кипнис И.М.* Задачи на составление уравнений и неравенств: Пос. для учит-й/ И.М. Кипнис. – М. : Просвещение, 1980. – 68 с.

28. *Левитас Г.Г.* Современный урок математики. Методика преподавания/ Г.Г. Левитас. – М. : Высшая школа, 1989. – 88 с.

29. *Математика*. 9 класс. Неравенства. Системы неравенств. Экспресс-репетитор для подготовки к ГИА / Г.В. Сычева, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев – М. : Астрель, 2012 . – 128 с.

30. *Математика*. Уравнения и неравенства. Экспресс-репетитор для подготовки к ЕГЭ / И.С. Слонимская, Л. И. Слонимский – М. : Астрель, 2010 – 160 с.

31. *Математика. 9 класс.* Экспериментальная экзаменационная работа / Л.Д. Лаппо, М.А. Попов /М. : Экзамен, 2011. – 74 с.

32. *Медведева Т.В.* Психолого-педагогические основы обучения математике. Теория, методика, практика / Т.В. Медведева. – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2011. – 204 с.

33. *Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика*: Уч. пос. для студ. пед. инст-в по спец.2104 «Математика» и 2105 «Физика» / А.М. Блох, Е.С. Канин и др. Сост. Е.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.

34. *Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика*: Уч. пос. для студ. пед. инст-в по физ-мат. спец–м/ А. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др. Сост. В.И. Мишин. – М. : Просвещение, 1987. – 416 с.

35. *Методика преподавания математики в средней школе*/ В.А. Ованесян и др. – М. : Просвещение, 1980. – 368 с.

36. *Мордкович А.Г.* Алгебра 7 класс: В двух частях. Ч. 1: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – М. : Мнемозина, 2008. – 160 с.

37. *Мордкович А.Г.* Алгебра 7 класс: В двух частях. Ч. 2: Задачник для общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская. – М. : Мнемозина, 2008. –223 с.

38. *Мордкович А.Г.* Алгебра 8 класс: В двух частях. Ч. 1: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – М. : Мнемозина, 2008. – 215 с.

39. *Мордкович А.Г.* Алгебра 8 класс: В двух частях. Ч. 2: Задачник для общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская. – М. : Мнемозина, 2008. –255 с.

40. *Мордкович А.Г.* Алгебра: учебник для 9 кл. общеобразоват. учреждений/ А.Г.Мордкович. – 4-е изд. – М. :Мнемозина, 2002. – 192 с.

41. *Мордкович А.Г.* Алгебра: задачник для 9 кл. общеобразовательных учреждений/ А.Г. Мордкович. – 4-е изд. – М. :Мнемозина, 2002. – 143 с.

42. *Мордкович А.Г.* Алгебра 9 класс: В двух частях. Ч. 1: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – М. : Мнемозина, 2004. – 192 с.

43. *Мордкович А.Г.* Алгебра 9 класс: В двух частях. Ч. 2: Задачник для общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская. – М. : Мнемозина, 2004. –144 с.

44. *Никольский С.М.* Алгебра: учебник для 9 кл. общеобразоват. учреждений/ С.М.Никольский. – 5-е изд.– М.: Просвещение, 2008.– 255 с.

45. *Открытый банк заданий ОГЭ* по математике 2017. – Режим доступа: *http://mathege.ru/or/ege/Main*. – Темы № 36–41, 48–53 (тест).

46. *Садовничий Ю.В.* ЕГЭ 2015. Математика. Решение уравнений и неравенств. Преобразование алгебраических выражений. Практикум / Ю.В. Садовничий. – М. : Экзамен, 2015. – 128 с.

47. *Садовничий Ю.В.* ЕГЭ. Практикум по математике. Решение уравнений и неравенств. Преобразование алгебраических выражений/ Ю.В. Садовничий. – М. : Экзамен, 2014. – 128 с.

48. *Сборник заданий* для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы. 9 класс / Кузнецова Л.В., Бунимович Е.А., Пигарев Б.П., Суворова С.Б. – М. : Дрофа, 2010 . – 148 с.

Приложение 1.

Результаты итоговой аттестации 2016 МБОУ «Очерская СОШ №2»

№	Фамилия	Имя	Отчество	Балл	Оценка	№ 8
1	Алексеев	Алексей	Андреевич	13	3	**1**
2	Бояршинова	Милена	Владимировна	6	3	**0**
3	Бурдин	Кирилл	Алексеевич	13	3	**0**
4	Главатских	Марина	Генриховна	19	4	**0**
5	Денисов	Дмитрий	Алексеевич	14	3	**0**
6	Дудин	Кирилл	Владимирович	7	3	**1**
7	Дудина	Людмила	Владимировна	9	3	**0**
8	Зейтунян	Аким	Арсенович	21	4	**1**
9	Зеленин	Вячеслав	Константинович	9	3	**1**
10	Идрисова	Рушана	Романовна	15	4	**1**

Приложение 2.

Результаты итоговой аттестации 2017 МБОУ «Очерская СОШ №2»

№	**Фамилия**	**Имя**	**Отчество**	**Балл**	**Тестовый балл**	**Оценка**	**№ 8**
1	Анкудинов	Станислав	Игоревич	7	35	2	**1**
2	Женихова	Жанна	Анатольевна	16	55	4	**1**
3	Мокрушина	Яна	Андреевна	14	50	3	**1**
4	Петухов	Михаил	Алексеевич	11	44	2	**1**
5	Соколова	Екатерина	Сергеевна	8	37	2	**1**
6	Шардакова	Ирина	Сергеевна	12	46	3	**0**
7	Токарева	Дарья	Александровна	12	56	4	**1**
8	Шардаков	Григорий	Александрович	11	54	4	**1**
9	Шардакова	Евгения	Александровна	16	50	3	**1**

Приложение 3.

Учебное пособие для элективного курса «Неравенства и их системы в основной школе»

Решением неравенства называется значение переменной (неизвестного), при котором неравенство превращается в правильное числовое неравенство.

Решить неравенство – означает найти все его решения или доказать, что их нет. Решениями неравенства является некоторое подмножество действительных чисел.

Выражения вида $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ называются неравенствами.

Неравенства вида $f(x) > g(x)$ являются **строгими** неравенствами, а $f(x) \geq g(x)$ – **нестрогими**.

При решении любого неравенства необходимо привести его к более простому путем равносильных преобразований. Все произведения проводятся с учетом свойств числовых неравенств.

§1. Свойства числовых неравенств

1. Если $a > b$, то $a - b > 0$; если $a < b$, то $a - b < 0$.

2. Если $a > b$, то $b < a$.

3. $a > b, b > c \Rightarrow a > c$; $a < b, b < c \Rightarrow a < c$.

4. К двум частям неравенства можно прибавить (или вычесть) равные числа или выражения

$a > b \Leftrightarrow a \pm c > b \pm c$.

5. Два неравенства одинакового смысла можно почленно складывать

$a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$.

Запомните! Два неравенства одинакового смысла нельзя почленно вычитать друг из друга, так как в результате можно получить как верное, так и неверное неравенство.

6. Из одного неравенства можно почленно вычесть другое неравенство противоположного смысла, оставляя знак первого неравенства

$a > b, c < d \Rightarrow a - c > b - d.$

7. Если две части неравенства умножить или разделить на положительное число, то смысл (знак) неравенства не изменится.

Если две части неравенства умножить или разделить на отрицательное число, то смысл (знак) неравенства изменится на противоположный.

8. Если $a > b$, то $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

9. Если $a > b > 0$, то $a^n < b^n, n \in N$.

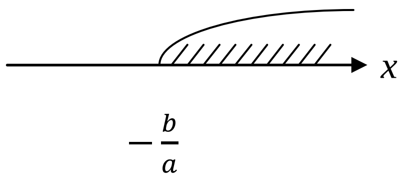
§2. Линейные неравенства

Неравенства вида $ax + b > 0$ или $ax + b < 0$ $(a \neq 0)$ называются *линейными* неравенствами.

$$ax + b > 0$$

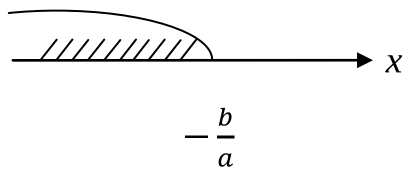
1. Если $a > 0$

$x > -\frac{b}{a}$



2. Если $a < 0$

$x < -\frac{b}{a}$



3. Если $a = 0$, тогда неравенство принимает вид $0 \cdot x > -b$.

Если $b > 0 \Rightarrow -b < 0$, тогда получим 0 больше отрицательного числа, то есть $x \in R$.

Если $b < 0 \Rightarrow -b > 0$, тогда получим 0 больше положительного числа, то есть неравенство не имеет решения.

Практическое применение преобразований неравенств рассмотрим **на примерах.**

Решить неравенство:

№ 1. 3(*x*–2) – 4(*x*+1) < 2(*x*–3) – 2

Упростим левую и правую части неравенства:

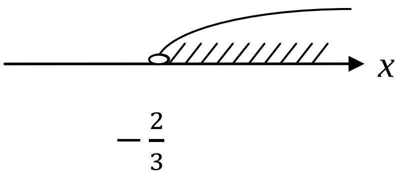
$3x - 6 - 4x < 2x - 6 - 2$

$-x - 10 < 2x - 6 - 2$

$-3x < 2$

$x > -\frac{2}{3}$

Множество чисел x, удовлетворяющих конечному неравенству, на числовой оси изображается лучом, а точка $x = -\frac{2}{3}$ не принадлежит этому лучу (отмечается не закрашенной точкой на числовом луче), сам луч изображен штриховкой.



Ответ: $x \in (-\frac{2}{3};+\infty)$.

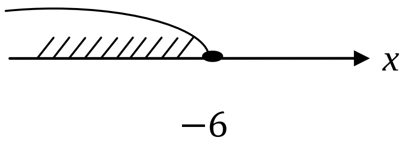
№ 2. $3{,}5(x+1) \leq 4x - \frac{2x-1}{2}$

Умножим обе части неравенства на 2:

$7x + 7 \leq 8x - 2x + 1$

$7x - 6x \leq 1 - 7$

$x \leq -6$



Ответ: $x \in (-\infty;-6]$.

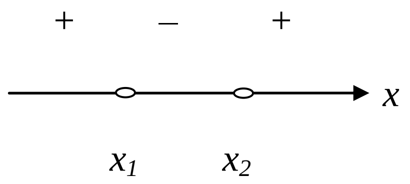
§3. Квадратные неравенства

Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$ $(a \neq 0)$ называются квадратными.

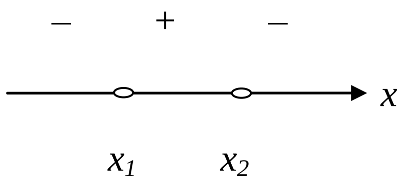
При решении квадратных неравенств используется свойство знакопостоянства квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c > 0 \text{ , } a \neq 0:$$

1. $a > 0, D > 0$



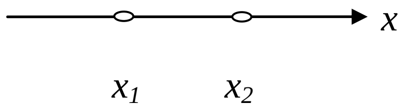
2. $a < 0, D > 0$



План решения квадратного неравенства:

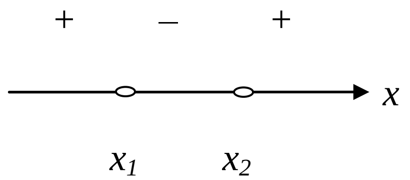
1. Если $D > 0$, трехчлен имеет два различных корня.

1) Найдите корни квадратного трехчлена, то есть решите квадратное уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$. Нанесите числа x_1 и x_2 на числовую ось:

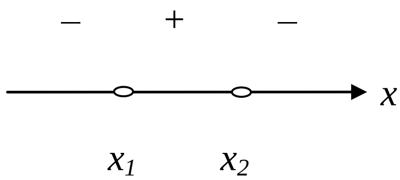


2) Поставьте знаки квадратного трехчлена в полученных интервалах соответственно знаку коэффициенту при x^2.

$a > 0, D > 0$



$a < 0, D > 0$



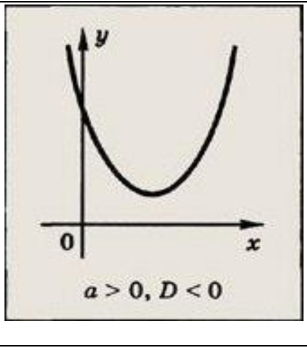
3) Выберите интервалы:

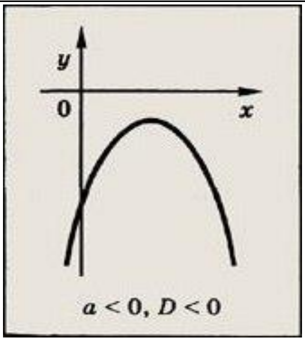
• со знаком «+», если дано неравенство $ax^2 + bx + c > 0$

• со знаком «–», если дано неравенство $ax^2 + bx + c < 0$.

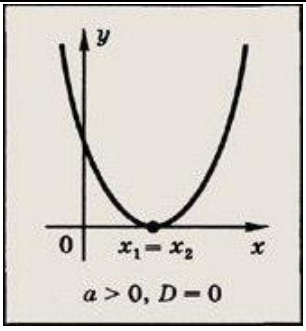
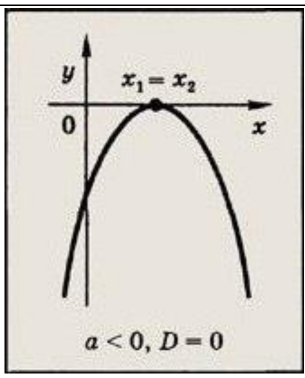
Если данное неравенство нестрогое, то x_1 и x_2 принадлежат выбранным интервалам.

2. Если $D < 0$, трехчлен имеет следующие решения (см. рисунок ниже):

	$ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow x \in R$ $ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow \emptyset$ (нет решений)

	$ax^2 + bx + c > 0 \to \emptyset$ (нет решений) $ax^2 + bx + c < 0 \to x \in R$

3. Если $D = 0$, трехчлен имеет следующие решения (см. рисунок ниже):

	$ax^2 + bx + c \geq 0 \to x \in R$
	$ax^2 + bx + c \leq 0 \to x \in R$

Запомните! Нельзя умножать и делить две части неравенства на 0 или выражение, равное 0.

Нельзя умножать или делить (сокращать) неравенства на выражение, содержащее переменную величину, так как неизвестен знак этого выражения (и не известно, меняется или нет смысл неравенства).

Рассмотрим примеры.

Решите неравенства:

№ 1. $(4 - 3x)(3x + 4) \geq (2 + 9x)(x + 8)$

Раскроем скобки и перенесем все члены неравенства в левую часть $16 - 9x^2 - (74x + 9x^2 + 16) \geq 0$.

Приведем подобные члены: $-18x^2 - 74x \geq 0 : (-2)$; $9x^2 + 36x \leq 0$ (**знак неравенства меняем на противоположный!**).

Найдем корни квадратного трехчлена:

$9x^2 + 36x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{37}{9}$.

Нанесем корни на числовую прямую

$+ \qquad - \qquad +$

$x \;\Rightarrow x \in [-\frac{37}{9};0]$

$-\frac{37}{9} \qquad 0$

Ответ: $x \in [-\frac{37}{9};0]$

№ 2. $8x^2 + 11x + 4 \leq 0$

Найдем корни квадратного трехчлена $8x^2 + 11x + 4 = 0$. $D = -7 < 0$, значит уравнение не имеет действительных корней, коэффициент при x^2 положительный, парабола находится в верхней полуплоскости. Значит, нет таких значений x, при которых данный трехчлен равен нулю или принимает отрицательные значения ⇒ решений нет.

Ответ: $\emptyset$

№ 3. $5x^2 + 6x + 2 > 0$

Аналогично предыдущему примеру, найдем корни квадратного трехчлена. Получим $D_1 = -1 < 0$, нет действительных корней. Коэффициент при x^2 положительный, парабола находится в верхней полуплоскости. Значит, $5x^2 + 6x + 2$ принимает только положительные значения ⇒

⇒ x – любой.

Ответ: $x \in R$.

Запомните! Квадратный трехчлен можно разложить на множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена, $a \neq 0, D \geq 0$, а затем решить его методом интервалов.

§4. Метод интервалов

Если левая часть неравенства с переменной $y > 0$ $(y < 0)$ разложена на линейные множители, то есть $y = (k_1 x + b_1)(k_2 x + b_2) \dots (k_n x + b_n)$, **(1)**
то такое неравенство можно решить методом интервалов (его иногда называют еще методом промежутков).

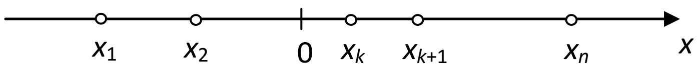
Метод интервалов основан на свойствах функции и заключается в следующем:

Пусть дано неравенство $y > 0$ $(y < 0)$, где y имеет вид **(1)**.

4. Найдем корни уравнения $y=0$

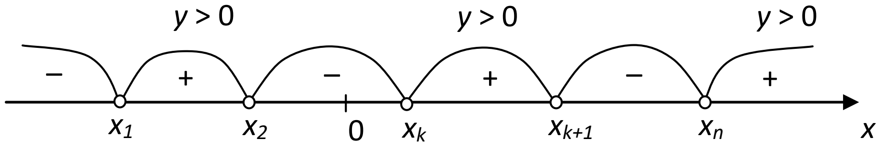
$$x_1 = -\frac{b_1}{k_1};\ x_2 = -\frac{b_2}{k_2};\ \dots;\ x_n = -\frac{b_n}{k_n}$$

5. Нанесем корни уравнения на числовую прямую



Эти корни разбивают числовую прямую на $n+1$ промежуток, на каждом из которых левая часть неравенства $y > 0$ $(y < 0)$ сохраняет знак (то есть во всех точках промежутка либо $y > 0$, либо $y < 0$), поскольку, по свойствам функции, изменить знак она может только при переходе через корни ее множителей.

6. Найдем знак левой части неравенства на каждом из полученных

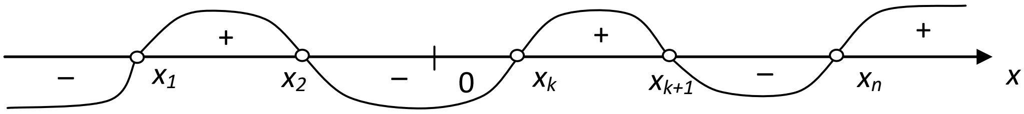


интервалов. Для этого на каждом из интервалов выберем какое-то значение $x=x_0$ и, подставив это значение в левую часть неравенства, определим ее знак (метод пробных точек).

7. Выберем те промежутки, где выполняется это неравенство.

Замечание 1. Неравенство $y \geq 0$ $(y \leq 0)$ тоже можно решать методом интервалов. В этом случае корни уравнения $y = 0$, *где* y имеет вид ***(1)***, являются решениями и неравенства.

Замечание 2. В п.2, предложенного выше алгоритма, достаточно было найти знак левой части неравенства на промежутке (x_n; $+\infty$), а потом учесть, что она меняет знак при переходе от одного промежутка к соседнему и нарисовать «кривую знаков».



Там, где кривая расположена выше оси, левая часть неравенства положительна, а там, где эта кривая расположена ниже оси, левая часть неравенства отрицательна. Однако метод «кривой знаков» годится без дальнейших оговорок лишь в случае, когда все множители в левой части имеют первую степень.

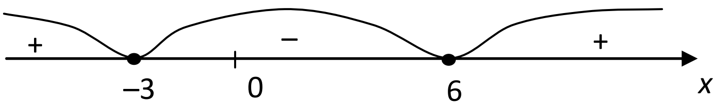
Рассмотрим примеры решения неравенств методом интервалов.

№ 1. $(x - 6)(x + 3) \geq 0$

4. Найдем корни уравнения

$$(x-6)(x+3)=0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} x-6=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=6 \quad \text{или} \\ x+3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-3 \end{array}$$

5. Нанесем полученные корни на числовую прямую, причем, так как неравенство нестрогое и эти корни являются решениями и неравенства,



изобразим их черными точками.

6. Найдем знак левой части на каждом из полученных промежутков

1) [6; $+\infty$)

$x = 7$, $y(7) = (7 - 6)(7 + 3) = 1\cdot10 = 10 > 0 \Rightarrow y > 0$;

2) [–3; 6]

$x = 0$, $y(0) = (0 - 6)(0 + 3) = -6\cdot3 = -18 < 0 \Rightarrow y < 0$;

3) ($-\infty$; –3]

$x = -4$, $y(-4) = (-4 - 6)(-4 + 3) = -10\cdot(-1) = 10 > 0 \Rightarrow y > 0$.

4. Нашему неравенству удовлетворяют два промежутка:

$(-\infty; -3]$ и $[6; +\infty)$, поэтому

Ответ: $(-\infty; -3] \cup [6; +\infty)$.

№ 2. $-x^2 - 2x + 48 < 0$

2. Разложим левую часть неравенства на множители

$-x^2 - 2x + 48 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 48 = 0$

Для решения этого квадратного уравнения воспользуемся теоремой Виета.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2, \\ x_1 \cdot x_2 = -48; \end{cases} \Rightarrow x_1 = -8;\ x_2 = 6.$$

Разложим квадратный трехчлен $-x^2 - 2x + 48$ на множители:

$-x^2 - 2x + 48 = -(x + 8)(x - 6)$, таким образом имеем неравенство

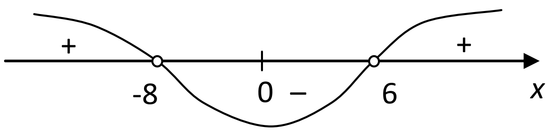
$-(x + 8)(x - 6) < 0$.

Домножим обе части неравенства на (–1), при этом поменяется и знак неравенства: $(x + 8)(x - 6) > 0$

Решим его методом интервалов:

1. корни уравнения $(x + 8)(x - 6) = 0$ мы нашли: $x_1 = -8$, $x_2 = 6$.

2. нанесем их на числовую прямую



3. определим знак неравенства на промежутке $(6; +\infty)$

$x = 7$, $y(7) = (7 + 8)(7 - 6) = 15 \cdot 1 = 15 > 0$ и проведем кривую знаков.

Ответ: $(-\infty; -8) \cup (6; +\infty)$.

№ 3. $\dfrac{(x-1)^2}{5} - \dfrac{x+4}{6} < \dfrac{2x-2}{3}$

1. Приведем неравенство к виду $y<0$

2.1. Для этого, все члены из правой части перенесем в левую с противоположным знаком и приведем все дроби к общему знаменателю

$$\frac{6(x-1)^2 - 5(x+4) - 10(2x-2)}{30} < 0$$

2.2. Домножим обе части неравенства на 30 (так как 30>0, знак неравенства не изменится), раскроем скобки и приведем подобные члены

$$6x^2 - 12x + 6 - 5x - 20 - 20x + 20 < 0$$

$$6x^2 - 37x + 6 < 0$$

2.3. Разложим левую часть полученного неравенства на множители

$$6x^2 - 37x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{37 \pm \sqrt{37^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{12} = \frac{37 \pm \sqrt{1225}}{12}$$

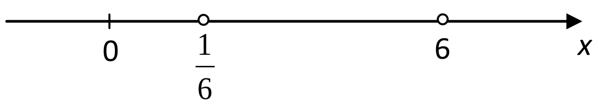
$$x_1 = \frac{37+35}{12} = \frac{72}{12} = 6; \quad x_2 = \frac{37-35}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$6x^2 - 37x + 6 = 6(x-6)\left(x - \frac{1}{6}\right)$$

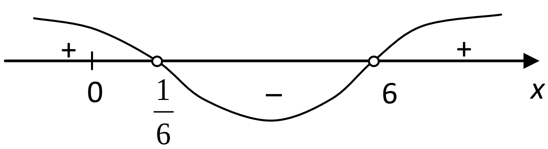
2. Методом интервалов решим полученное неравенство, которое равносильно первоначальному.

$6(x - 6)(x - \frac{1}{6}) < 0$

Нанесем на числовую прямую корни уравнения $y = 0$



Найдем знак левой части на промежутке $(6; +\infty)$:



$x = 7$, $y(7) = 6(7 - 6)(7 - \frac{1}{6}) = 6 \cdot \frac{41}{6} = 41 > 0 \Rightarrow y > 0$.

Проведем кривую знаков.

Ответ: $\left(\frac{1}{6}; 6\right)$.

Метод интервалов применим и к неравенствам, левая часть которых – дробь, у которой числитель и знаменатель разложены на линейные множители, например, к неравенству

$$\frac{4(x-5)(2x+6)}{(6-3x)(x+8)} \le 0$$

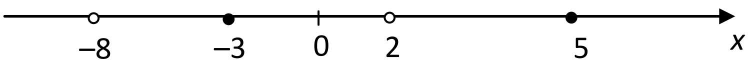
В этом случае находим значения x, которые обращают в нуль и числитель и знаменатель (то есть решаем уравнения $(x-5)(2x+6)=0$ и $(6-3x)(x+8)=0$), а затем, действуем по алгоритму приведенному выше, учитывая, что значения x, обращающие в нуль знаменатель не являются решениями неравенства (изображаем их «дырками»).

Решим записанное неравенство:

1. $(x-5)(2x+6)=0 \Leftrightarrow x=5$ или $x=-3$;

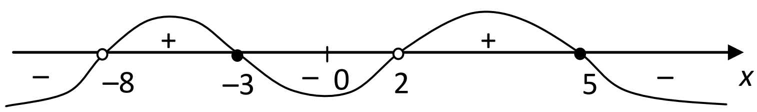
   $(6-3x)(x+8)=0 \Leftrightarrow x=2$ или $x=-8$.

2. Нанесем полученные значения x на числовую прямую



3. Определим знак левой части неравенства на интервале $[5;+\infty)$.

$$x=6,\quad y(6)=\frac{4(6-5)(2\cdot 6+6)}{(6-3\cdot 6)(6+8)}=\frac{32}{-12\cdot 14}<0$$



и проведем кривую знаков.

Ответ: $(-\infty;\ -8)\cup[-3;\ 2)\cup[5;\ +\infty)$

№ 4. Найти при каких значениях x выражение имеет числовое значение $\sqrt{\frac{-2x-10}{5x+15}}$.

Так как арифметический квадратный корень вычисляется только из неотрицательного числа, то для того, чтобы выражение имело числовое значение, нужно чтобы выполнялось неравенство $\frac{-2x-10}{5x+15} \ge 0$

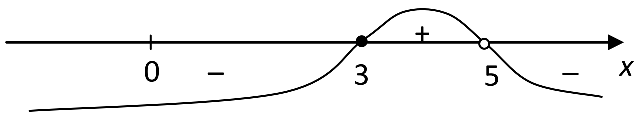
Найдем значения x, при которых это неравенство выполняется, то есть решим это неравенство. Для решения воспользуемся методом интервалов.

1. Решим уравнения

$-2x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

$5x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

2. Нанесем полученные значения на числовую прямую, найдем знак левой части неравенства на промежутке $(5; +\infty)$, проведем кривую знаков.



$x = 6$, $y(6) = \dfrac{-2\cdot 6 - 10}{5\cdot 6 + 15} = \dfrac{-22}{45} < 0 \Rightarrow$ на $(5; +\infty)$ $y < 0$

Решением неравенства является промежуток $[3; 5)$.

Ответ: выражение $\sqrt{\dfrac{-2x-10}{5x+15}}$ имеет числовое значение при $3 \le x < 5$.

§5. Системы неравенств

Система неравенств **–** это несколько неравенств с одной переменной.

Решение системы неравенств – это значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство.

Общее решение неравенств **–** это множество всех решений системы неравенств.

Рассмотрим ***системы линейных уравнений с одной переменной***, их виды и методы решения.

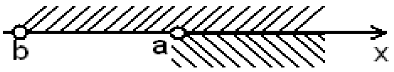
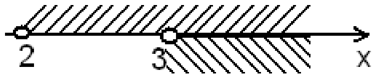
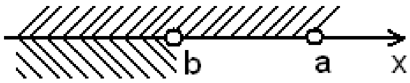
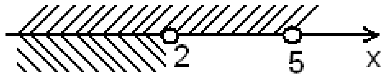
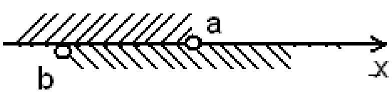
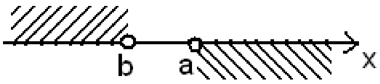
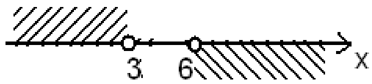
Системы вида : $\begin{cases} a_1x > b_1 \\ a_2x > b_2 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1x < b_1 \\ a_2x > b_2 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1x > b_1 \\ a_2x < b_2 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1x < b_1 \\ a_2x < b_2 \end{cases}$.

называются системами двух линейных уравнений с одной переменной. (Вместо знаков $>$, $<$ могут быть знаки $\ge$, $\le$).

Частные случаи показаны в таблице 3.

Таблица 3

Возможные случаи решения систем линейных неравенств

Системы линейных неравенств (*a*>*b*)	**Решение и его геометрическая иллюстрация**	**Пример**
$\begin{cases} x>a, \\ x>b \end{cases}$	 $x \in (a;+\infty)$	 $x \in (3;+\infty)$
$\begin{cases} x<a, \\ x<b \end{cases}$	 $x \in (-\infty;b)$	 $x \in (-\infty;2)$
$\begin{cases} x<a, \\ x>b \end{cases}$	 $x \in (b;a)$	 $x \in (1;4)$
$\begin{cases} x>a, \\ x<b \end{cases}$	Решений нет 	Решений нет 

Чтобы решить систему неравенств, надо каждое неравенство системы решить отдельно, а потом найти решение системы как пересечение множеств решений полученных неравенств.

№ 1. Решите системы неравенств:

$$\begin{cases} 3x \geq 45 \\ 2x + 12 < 6 \end{cases}$$

Решение: после преобразований получим: $\begin{cases} x \geq 15 \\ x < -3 \end{cases}$

Перенесем эти значения на числовую прямую. Пересечений данных множеств нет $\Rightarrow$ решений нет.

Ответ: $\emptyset$.

Часто встречаются задания, рассматривающие **двойные неравенства**, например:

№ 2. Решите двойное неравенство: $-4 < 2 + 3x < 7$ и укажите наибольшее и наименьшее целое число, которое является его решением.

Решение: преобразуем левую и правую части неравенства, прибавив к каждой части (–2) (и к центральной части тоже), а далее разделим все части неравенства на коэффициент при неизвестном и получим:

$-6 < 3x < 5$

$-2 < x < 1\frac{2}{3}$ Отсюда следует, что значения $x \in (-2; 1\frac{2}{3})$.

Ответ: $x = -1$ – наименьшее целое значение, $x = 1$ – наибольшее целое значение.

Часто приходится решать системы неравенств, содержащие **дробные неравенства**, но и здесь, путем дополнительных преобразований (приведение к общему знаменателю, умножение каждого слагаемого на общий знаменатель) учащиеся находят требуемое решение без особых затруднений.

Система неравенств может содержать **не два, а три и более неравенств**. Необходимо произвести с ними типичные преобразования, предусмотренные данной темой, что позволит опять прийти к стандартному ответу.

№ 3. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x-4 < 8 \\ 2x+5 < 13 \\ 3-x > 1 \end{cases}$

Решив каждое неравенство, получим новую систему:

$$\begin{cases} x < 12 \\ x < 4 \\ 3-x > 1 \end{cases}$$

Построив числовую прямую с пересечением решений данных неравенств, получим $x < 2$.

Ответ: $x \in (-\infty;2)$

Запомните! Система неравенств с одной переменной может иметь как конечное, так и бесконечное множество решений.
Если хотя бы одно из неравенств системы не имеет решений, то и вся система не имеет решений, так пересечение непустого и пустого множеств – это пустое множество.

Доказательство неравенств сводится к тому, что сначала преобразуется его левая или (и) правая часть, далее их сравнивают. Если полученный знак неравенства верен, данное неравенство считают доказанным.

Задания с неравенствами и их системами находят **применение в геометрии**. Например: оцените длину средней линии треугольника ABC, которая параллельна стороне AB, если $10{,}4 < AB < 10{,}5$.

При решении задачи, необходимо вспомнить формулу вычисления средней линии треугольника, далее получим новое неравенство:

$10{,}4:2 < AB : 2 < 10{,}5:2$

$5{,}2 < AB : 2 < 5{,}25$. Конечное неравенство будет являться решением задачи.

Задания для самостоятельной работы

Задачи для самостоятельного решения № 1:

Решите неравенства:

1. $-2x < 4$
2. $x - 8 \leq 3x + 6$
3. $4(x + 1) - 6(2 - x) > 2$
4. $3x - 5(0.6x - 1) < 3$
5. $3x > -9$
6. $-0{,}3x < 9{,}6$
7. $2(x + 3) \geq 2x$
8. $3(x + 2) - 2(5 - x) < 1$

9. $6x - 3(0,2x + 3) > 2x$

10. $\frac{x+1}{4} - \frac{4x+1}{5} \leq \frac{7-3x}{10}$

Задачи для самостоятельного решения № 2:

Решите квадратное неравенство (в том числе методом интервалов):

1. $(x + 5)(x - 3) < 0$
2. $(x - 2)(x + 1) > 0$
3. $(x - 1)(x - 8) \geq 0.$
4. $(x + 5)(x + 7) \leq 0$
5. $2x^2 \geq 4x$
6. $3x^2 \leq 12x$
7. $x^2 - 16 > 0$
8. $x^2 - 9x < 0$
9. $x^2 < 25$
10. $x^2 > 4$
11. $x^2 - 3x - 4 \leq 0$
12. $x^2 + 3x - 4 \geq 0$
13. $x^2 - 6x + 9 \geq 0$
14. $x^2 + 10x + 25 \leq 0$
15. $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$
16. $-x^2 + 4x - 4 < 0$
17. $4x^2 + 4x + 1 > 0$
18. $x^2 - 2x + 1 < 0$
19. $-5x^2 + x - 2 > 0$
20. $-6x^2 - 2x + 1 < 0$

Задачи для самостоятельного решения № 3:

Решите системы неравенств:

1. $\begin{cases} x > 3 \\ x \geq 7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x > -3 \\ x < 6{,}5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x > 5 \\ -3x \geq 9 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -5x < -1 \\ 6x - 5 < 4x \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x > 5x - 3 \\ -3x < 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x + 2 > 0 \\ 5x - 3 \leq 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5 - 3x \leq 0 \\ 4 - x < 6 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 4x - 7 \leq 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 12x - 5 \leq 0 \\ 3x + 14 > 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x + 2 > 0 \\ 3x - 6 \leq 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 5 + 2x < 0 \\ x - 7 \leq 4 \end{cases}$

12. $\begin{cases} -x < 3 \\ 2x \leq 5 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2 + 5x - 6 < 0 \\ -3x \leq 12 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x^2 - 3x - 36 \geq 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases}$

Итоговая работа для самостоятельного решения.

Вариант 1.

1. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 3x < 4 \\ -2x > 1{,}8 \end{cases}$

2. Решите неравенство: $3x - 4 < 2(x + 1)$

3. Решите неравенство: $x^2 - 5x - 6 \geq 0$

4. При каких значениях c выражение $c + 18$ принимает положительные значения?

5. Укажите неравенство, решением которого является любое число.

Запишите номер правильного ответа.

1) $x^2 - 86 > 0$ 2) $x^2 + 86 > 0$

3) $x^2 - 86 < 0$ 4) $x^2 + 86 < 0$

6. Решите систему неравенств: $\begin{cases} (x+2)(x-3) > 0 \\ 2(x+5) - 3(x-7) < 6 \end{cases}$

7. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2 + 7x + 10 < 0 \\ -21 - 7x \leq 0 \end{cases}$

8. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2 \geq 81 \\ x^2 + 10x < 0 \end{cases}$

Вариант 2.

1. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 2x < 5 \\ -3x > 1{,}2 \end{cases}$

2. Решите неравенство: $6x + 1 \leq 2x$

3. Решите неравенство: $x^2 + 3x - 4 \geq 0$

4. При каких значениях k выражение $15 - 2\,k$ принимает отрицательные значения?

5. Укажите неравенство, решением которого является любое число. Запишите номер правильного ответа.

1) $-x^2 + 93 > 0$ 2) $-x^2 - 93 > 0$

3) $-x^2 + 93 < 0$ 4) $-x^2 - 93 < 0$

6. Решите систему неравенств: $\begin{cases} (x+5)(x-6) \geq 0 \\ 6(x+1) < 7x - 3(2-x) \end{cases}$

7. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 2x^2 + 3x - 20 > 0 \\ x + 5 \geq 0 \end{cases}$

8. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2 \leq 16 \\ x^2 + 5x > 0 \end{cases}$

Рекомендации для учащихся

1. Решайте сначала простые задачи, тем самым у вас останется больше времени на более сложные задания.

2. Внимательно читайте условие задачи, прежде чем приступить к ее выполнению!

3. Самая распространенная ошибка – в ответах и их записи. Выполнение пункта 2 рекомендаций поможет Вам избежать подобной ситуации.

4. Перед работой по данной теме рекомендуется повторить такие темы, как: решение уравнений (особое внимание уделить квадратным уравнениям), решение систем уравнений, решение неравенств и изображение этих решений на числовой прямой.

Справочные материалы

Полное квадратное уравнение

Алгоритм решения уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

1. Вычислить дискриминант D по формуле $D = b^2 - 4ac$.
2. Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет корней.
3. Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень:
$$x = -\frac{b}{2a}.$$
4. Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня:
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Неполные квадратные уравнения и их решение