МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра высшей математики

Выпускная квалификационная работа

ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ В ЭЛЕКТИВНОМ КУРСЕ

Работу выполнила
студентка группы Z151
направления подготовки 44.03.01
«Педагогическое образование»
профиль «Математика»
Рябчевских Мария Николаевна
____
подпись

«Допущена к защите в ГЭК»
Зав. кафедрой высшей математики
____
подпись
«____» _______________ 2018 г.

Руководитель:
доцент, кандидат педагогических наук
Черемных Елена Леонидовна
____
подпись

ПЕРМЬ
2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время программа по математике для средней общеобразовательной школы, работающей по базисному учебному плану, предполагает формирование у школьников представлений о математике как части общечеловеческой культуры, как определенном методе познания мира [29, с.8]. Но на данный момент содержание школьного курса математики не соответствует требованиям, возникшим в современных условиях. Объем знаний, необходимый человеку, резко возрастает, в то время как количество отводимых для занятий часов сокращается. Одним из средств реализации требований программы и решения имеющихся проблем является переход школы на профильное обучение и введение элективных курсов. Согласно «Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования» [13] особая роль при организации профильного обучения отводится элективным курсам, которые связаны с удовлетворением индивидуальных образовательных интересов, потребностей и склонностей каждого школьника. Их введение направлено на реализацию личностно-ориентированного учебного процесса, при котором существенно расширяются возможности построения учащимися индивидуальных образовательных программ, поскольку элективные курсы в наибольшей степени связаны с выбором каждым школьником содержания образования в зависимости от его интересов, способностей, последующих жизненных планов. Мотивами для выбора элективного курса у учеников могут быть следующие:

- подготовка к выпускным и вступительным экзаменам;
- поддержка изучения базового курса математики;
- заинтересованность математикой;
- профессиональная ориентация.

В курсы может быть включен материал, связанный с уравнениями и неравенствами. Он составляет значительную часть школьного курса математики, но временные рамки урока не позволяют рассмотреть все вопросы.

Таким образом, тема данной работы «Обучение решению уравнений и неравенств с помощью производной в элективном курсе» актуальна.

Объект исследования: изучение производной в средней школе.

Предмет исследования: изучение приложений производной в решении уравнений и неравенств на элективном курсе.

Гипотеза: умение применять необходимые свойства производной при решении уравнений и неравенств позволит учащимся решать их осознанно, использовать различные способы решения, выбирая из них наиболее рациональные, в том числе те, которые не рассмотрены в школьных учебниках.

Цель работы: разработка элективного курса «Решение уравнений и неравенств с помощью производной».

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие *задачи:*

- подобрать литературу, в которой описаны психолого-педагогические и методические условия создания и проведения элективных курсов;
- познакомиться с положением об элективных курсах в школе;
- проанализировать основные учебники, предусмотренные Федеральным перечнем учебников по математике для 10-11 классов, с точки зрения представления темы «Производная»;
- проанализировать содержание заданий ЕГЭ, относящихся к теме «Производная»;
- подобрать систему заданий для работы на элективных курсах по математике;
- апробировать разработанные материалы элективного курса на занятиях по математике в 11 классе.

Методы исследования: анализ и синтез имеющейся по данному вопросу литературы, обобщение материала по теме исследования, систематизация и сравнение информации, ее конкретизация и моделирование.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка используемой литературы и приложений.

Во введении сформулированы актуальность темы, объект, предмет, цель и задачи исследования, приведена структура работы и краткая характеристика каждой из ее частей.

В первой главе выявлены основные требования к результатам, структуре и условиям реализации основной общеобразовательной программы среднего общего образования. Проводится анализ школьных учебников алгебры и начал анализа с точки зрения представления темы «Производная». Также рассмотрена общая информация о создании и проведении элективных курсов: назначение, цели проведения; требования, предъявляемые к содержанию курса; список материалов, необходимых для разработки курса, структура программы элективного курса и др.

Вторая глава содержит информацию о разработанном элективном курсе «Решение уравнений и неравенств с помощью производной», включает пояснительную записку, организацию учебного процесса, требования к уровню усвоения учебного материала, содержание курса, некоторые материалы для проведения занятий.

В заключении обобщены результаты работы, сделаны выводы.

Список литературы содержит 39 библиографических источника.

В приложении 1 содержится сценарий деловой игры «Эта многогранная производная»; в приложении 2 – варианты заданий решения уравнений с помощью производной; в приложении 3 – варианты заданий решения и доказательства неравенств с помощью производной.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОРГАНИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ В СТАРШЕЙ ШКОЛЕ

1.1. Требования ФГОС к обучению математике в старшей школе

Переход на новый федеральный государственный образовательный стандарт второго поколения (ФГОС) предъявляет повышенные требования к математической и методической подготовке учителя математики, а также определяет необходимость разработки новых подходов в обучении.

Педагог – ключевая фигура реформирования образования. Готовность к переменам, мобильность, ответственность и самостоятельность в принятии решений – все эти характеристики деятельности успешного профессионала в полной мере относятся и к современному педагогу. Обретение этих ценных качеств невозможно без постоянного, никогда не прекращающегося самообразования квалифицированного педагога, которое не может обойтись без знания нормативных документов.

Первое место в рейтинге нормативных документов отводится Федеральному закону № 273-ФЗ от 29.12.2012 «Об образовании в Российской Федерации» [36]. Он объемен, информативен, но остановимся на ключевых моментах, важных для учителя. Статья 2 «Основные понятия, используемые в Федеральном законе». Обращаясь к глоссарию закона, педагог избавит себя от лишней терминологии, которая изобилует в различных источниках.

Сегодня, например, вместо всем известной ступени образования используется термин «уровень образования». В Российской Федерации устанавливаются следующие уровни общего образования:

1) дошкольное образование;

2) начальное общее образование;

3) основное общее образование;

4) среднее общее образование.

Руководствуясь статьей 28 «Компетенция, права, обязанности и ответственность образовательной организации», учителю следует ответственно подходить к выбору учебно-методического комплекса, который должен осуществляться в соответствии с перечнем учебников, рекомендуемых к использованию, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации № 459 от 21 апреля 2016 «О внесении изменений в порядок формирования федерального перечня учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования, утвержденный приказом министерства образования и науки Российской Федерации № 253 от 31 марта 2014 г.» [27].Организации, осуществляющие образовательную деятельность по основным общеобразовательным программам, вправе в течение пяти лет использовать в образовательной деятельности приобретенные до вступления в силу настоящего приказа учебники.

Еще одним важным нормативным документом являются приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 6 октября 2009 года № 413 «Об утверждении и введении в действие федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования» [26].

Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования (далее – Стандарт) представляет собой совокупность требований, обязательных при реализации основной образовательной программы среднего (полного) общего образования.

Стандарт включает в себя требования:

к результатам освоения основной образовательной программы;

к структуре основной образовательной программы, в том числе требования к соотношению частей основной образовательной программы и их объему, а также к соотношению обязательной части основной образовательной программы и части, формируемой участниками образовательного процесса;

к условиям реализации основной образовательной программы, в том числе к кадровым, финансовым, материально-техническим и иным условиям [35].

Стандарт устанавливает требования к результатам освоения обучающимися основной образовательной программы:

личностным, включающим готовность и способность обучающихся к саморазвитию и личностному самоопределению, сформированность их мотивации к обучению и целенаправленной познавательной деятельности, системы значимых социальных и межличностных отношений, ценностно-смысловых установок, отражающих личностные и гражданские позиции в деятельности, правосознание, экологическую культуру, способность ставить цели и строить жизненные планы, способность к осознанию российской гражданской идентичности в поликультурном социуме;

метапредметным, включающим освоенные обучающимися межпредметные понятия и универсальные учебные действия (регулятивные, познавательные, коммуникативные), способность их использования в познавательной и социальной практике, самостоятельность в планировании и осуществлении учебной деятельности и организации учебного сотрудничества с педагогами и сверстниками, способность к построению индивидуальной образовательной траектории, владение навыками учебно-исследовательской, проектной и социальной деятельности;

предметным, включающим освоенные обучающимися в ходе изучения учебного предмета умения, специфические для данной предметной области, виды деятельности по получению нового знания в рамках учебного предмета, его преобразованию и применению в учебных, учебно-проектных и социально-проектных ситуациях, формирование научного типа мышления, владение научной терминологией, ключевыми понятиями, методами и приёмами.

Личностные результаты освоения основной образовательной программы среднего (полного) общего образования должны отражать:

1) российскую гражданскую идентичность, патриотизм, уважение к своему народу, чувства ответственности перед Родиной, гордости за свой край, свою Родину, прошлое и настоящее многонационального народа России, уважение государственных символов (герб, флаг, гимн);

2) гражданскую позицию как активного и ответственного члена российского общества, осознающего свои конституционные права и обязанности, уважающего закон и правопорядок, обладающего чувством собственного достоинства, осознанно принимающего традиционные национальные и общечеловеческие гуманистические и демократические ценности;

3) готовность к служению Отечеству, его защите;

4) сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, основанного на диалоге культур, а также различных форм общественного сознания, осознание своего места в поликультурном мире;

5) сформированность основ саморазвития и самовоспитания в соответствии с общечеловеческими ценностями и идеалами гражданского общества; готовность и способность к самостоятельной, творческой и ответственной деятельности;

6) толерантное сознание и поведение в поликультурном мире, готовность и способность вести диалог с другими людьми, достигать в нём взаимопонимания, находить общие цели и сотрудничать для их достижения;

7) навыки сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности;

8) нравственное сознание и поведение на основе усвоения общечеловеческих ценностей;

9) готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

10) эстетическое отношение к миру, включая эстетику быта, научного и технического творчества, спорта, общественных отношений;

11) принятие и реализацию ценностей здорового и безопасного образа жизни, потребности в физическом самосовершенствовании, занятиях спортивно-оздоровительной деятельностью, неприятие вредных привычек;

12) бережное, ответственное и компетентное отношение к физическому и психологическому здоровью, как собственному, так и других людей, умение оказывать первую помощь;

13) осознанный выбор будущей профессии и возможностей реализации собственных жизненных планов; отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем;

14) сформированность экологического мышления, понимания влияния социально-экономических процессов на состояние природной и социальной среды; приобретение опыта эколого-направленной деятельности;

15) ответственное отношение к созданию семьи на основе осознанного принятия ценностей семейной жизни [35].

Метапредметные результаты освоения основной образовательной программы среднего (полного) общего образования должны отражать:

1) умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях;

2) умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты;

3) владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

4) готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;

5) умение использовать средства информационных и коммуникационных технологий (далее – ИКТ) в решении когнитивных, коммуникативных и организационных задач с соблюдением требований эргономики, техники безопасности, гигиены, ресурсосбережения, правовых и этических норм, норм информационной безопасности;

6) умение определять назначение и функции различных социальных институтов;

7) умение самостоятельно оценивать и принимать решения, определяющие стратегию поведения, с учётом гражданских и нравственных ценностей;

8) владение языковыми средствами – умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;

9) владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств их достижения.

Предметные результаты освоения основной образовательной программы среднего (полного) общего образования устанавливаются для учебных предметов на базовом и углубленном уровнях.

Предметные результаты освоения основной образовательной программы для учебных предметов на базовом уровне ориентированы на обеспечение преимущественно общеобразовательной и общекультурной подготовки.

Предметные результаты освоения основной образовательной программы для учебных предметов на углубленном уровне ориентированы преимущественно на подготовку к последующему профессиональному образованию, развитие индивидуальных способностей обучающихся путем более глубокого, чем это предусматривается базовым курсом, освоением основ наук, систематических знаний и способов действий, присущих данному учебному предмету.

Предметные результаты освоения интегрированных учебных предметов ориентированы на формирование целостных представлений о мире и общей культуры обучающихся путем освоения систематических научных знаний и способов действий на метапредметной основе.

Предметные результаты освоения основной образовательной программы должны обеспечивать возможность дальнейшего успешного профессионального обучения или профессиональной деятельности.

«Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» (базовый уровень) – требования к предметным результатам освоения базового курса математики должны отражать:

1) сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;

2) сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

3) владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

4) владение стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;

5) сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа;

6) владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

7) сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;

8) владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.

«Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» (углубленный уровень) – требования к предметным результатам освоения углубленного курса математики должны включать требования к результатам освоения базового курса и дополнительно отражать:

1) сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;

2) сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

3) сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат;

4) сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;

5) владение умениями составления вероятностных моделей по условию задачи и вычисления вероятности наступления событий, в том числе с применением формул комбинаторики и основных теорем теории вероятностей; исследования случайных величин по их распределению.

Следует отметить, что личностные результаты, предметные и метапредметные результаты обучения не могут быть отделены друг от друга и представляют собой триединую задачу современного образования.

Выделим следующие основные трудовые функции учителя математики основного и среднего общего образования:

формирование у обучающихся умения выделять подзадачи в задаче, перебирать возможные варианты объектов и действий;

формирование у обучающихся умения пользоваться заданной математической моделью, в частности, формулой, геометрической конфигурацией, алгоритмом, оценивать возможный результат моделирования (например – вычисления);

формирование способности преодолевать интеллектуальные трудности, решать принципиально новые задачи, проявлять уважение к интеллектуальному труду и его результатам;

формирование конкретных знаний, умений и навыков в области математики и информатики;

формирование у обучающихся умения применять средства информационно-коммуникационных технологий в решении задачи там, где это эффективно;

формирование представлений обучающихся о полезности знаний математики вне зависимости от избранной профессии или специальности;

формирование и поддержание высокой мотивации и развитие способности обучающихся к занятиям математикой, предоставление им подходящих заданий, ведение кружков, факультативных и элективных курсов для желающих и эффективно работающих в них обучающихся [35].

Указанные выше требования к учителю направлены не только на учебную, но и на внеучебную деятельность по предмету. Причем некоторые из них могут быть реализованы в полной мере только при организации внеучебной деятельности учащихся в предметной области «Математика». Поэтому учитель математики должен не только владеть совокупностью знаний в предметной области, но и уметь интегрировать со знаниями из других областей, решать научные проблемы в классе, мотивировать процесс обучения школьников; мотивировать учеников самостоятельно получать знания; уметь выбирать или разрабатывать необходимые для конкретного образовательного процесса информационные и другие технологии.

Принципиальным отличием школьных стандартов нового поколения является их ориентация на формирование личности обучающихся, овладение ими универсальными способами учебной деятельности, обеспечивающими успешность в познавательной деятельности на всех этапах дальнейшего образования.

Развитие личности через формирование универсальных учебных действий является основой образовательного и воспитательного процесса с позиций ФГОС нового поколения. В результате освоения предметного содержания предлагаемого курса математики у учащихся предполагается формирование универсальных учебных действий – УУД (познавательных, регулятивных, коммуникативных) позволяющих достигать предметных, метапредметных и личностных результатов. Овладение учащимися универсальными учебными действиями выступает как способность к саморазвитию и самосовершенствованию путем сознательного и активного присвоения нового социального опыта. УУД создают возможность самостоятельного успешного усвоения новых знаний, умений и компетентностей, включая организацию усвоения, т. е. умения учиться.

Требования к уровню математической подготовки обучающегося 11 класса.

В результате изучения математики ученик должен *знать/ понимать:*

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике;
- широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике для формирования и развития математической науки;
- историю развития понятия числа, создания математического анализа, возникновения и развития геометрии;
- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности;
- вероятностный характер различных процессов окружающего мира.

<u>Начала математического анализа.</u>

Уметь:

- вычислять производные и первообразные элементарных функций, используя справочные материалы;
- исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций, строить графики многочленов и простейших рациональных функций с использованием аппарата математического анализа;
- вычислять в простейших случаях площади с использованием первообразной;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- решения прикладных задач, в том числе социально-экономических и физических, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения.

Уравнения и неравенства.

Уметь:

- решать рациональные, показательные и логарифмические уравнения и неравенства, простейшие иррациональные и тригонометрические уравнения, их системы;
- составлять уравнения и неравенства по условию задачи;
- использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод;
- изображать на координатной плоскости множества решений простейших уравнений и их систем;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- построения и исследования простейших математических моделей.

1.2. Изучение производной в старшей школе

1. *Анализ основных понятий начал анализа в базовом курсе математики*

При изучении элементов анализа в школе основное внимание уделяется двум понятиям – производной и первообразной. Это связано с широким использованием этих понятий, как в школьной математике, так и в физике. В математике производная активно используется при исследовании функции, первообразная при вычислении площадей криволинейных фигур.

Сначала перечислим все новые понятия анализа, вводимые в курсе математики старшей общеобразовательной школы. В Большой Советской энциклопедии написано: «Математический анализ – наука, работающая с исследованием функций; дифференциальное и интегральное исчисление –

наука, исследующая интервальные и дифференциальный функции, а также решающая дифференциальные и интегральные уравнения». С одной стороны, понятие функции является «ключевым», с другой стороны, есть требование дифференциальных и интегральных исчислений. Отсюда в основные понятия элементов математического анализа отнесем понятия, связанные с дифференциальными и интегральными исчислениями, а именно:

- предел последовательности;
- ограниченность последовательности;
- граница последовательности;
- окрестность точки, радиус окрестности;
- сходящиеся последовательности;
- свойства пределов (предел суммы равен сумме пределов; предел произведения равен произведению пределов; предел частного равен частному пределов; постоянный множитель можно вынести за знак предела);
- предел функции на бесконечности;
- предел функции в точке;
- непрерывная функция;
- приращение аргумента и приращение функции;
- *производная;*
- формулы дифференцирования;
- привила дифференцирования (включает 5 теорем);
- уравнение касательной к графику функции;
- исследование функций на монотонность;
- точки экстремума функции и их нахождение;
- нахождение наибольшего и наименьшего значений;
- непрерывной функции на промежутке;
- первообразная;
- определенный интеграл;
- формула Ньютона — Лейбница [15, с. 84].

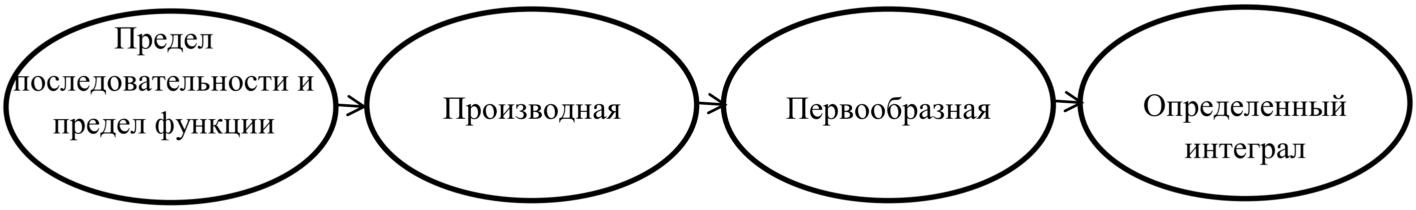


Рис.1. Последовательность основных элементов математического анализа

Последовательность, представленная на рисунке 1, показывает, что без знания модели «производная» невозможно изучить «первообразную» или «определенный интеграл». Связь простая: интегрирование – операция обратная дифференцированию (производной). И наоборот, нахождение производной – действие обратное интегралу.

2. Представление темы «Производная» в школьных учебниках математики

Проведем сравнительный анализ трех учебников старшей общеобразовательной школы:

1. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и профил. уровни / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачев и др. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 463 с. [1].
2. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2013. – 464 с. [20].
3. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учебник для общеобразоват. учреждений / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин; под ред. А.Б. Жижченко. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2013. – 336 с. [12].

Результаты анализа представлены в таблице 1.

Таблица 1

Сравнительный анализ учебников по теме «Производная»

Категории для сравнения	***Алимов Ш.А. и др.***	***Никольский С.М. и др.***	***Колягин Ю.М. и др.***
Структура содержания темы	<u>Глава VIII. Производная и ее геометрический смысл.</u> - Производная. - Производная степенной функции. - Правила дифференцирования. - Производные некоторых элементарных функций. - Геометрический смысл производной. <u>Глава IX. Применение производной к исследованию функции.</u> - Возрастание и убывание функции. - Экстремумы функции. - Применение производной к построению графиков функции. - Наибольшее и наименьшее значения функции.	<u>Глава I. Функции. Производные. Интегралы.</u> § 4. Производная. - Понятие производной. - Производная суммы, производная разности. - Производная произведения. Производная частного. - Производные элементарных функций. - Производная сложной функции. § 5. Применение производной. - Максимум и минимум функции - Уравнение касательной. - Приближенные вычисления. - Возрастание и убывание функции. - Производные высших порядков. - Задачи на максимум и минимум. - Построение графиков функций с применением производных.	<u>Глава II. Производная и ее геометрический смысл.</u> - Предел последовательности. - Предел функции. - Непрерывность функции. - Определение производной. - Правила дифференцирования. - Производная степенной функции. - Производные элементарных функций. - Геометрический смысл производной. <u>Глава III. Применение производной к исследованию функции.</u> - Возрастание и убывание функции. - Экстремумы функции. - Наибольшее и наименьшее значения функции. - Производная второго порядка, выпуклость и точки перегиба. - Построение графиков функций.
Особенности введения определения производной	В начале определение производной дается через механический смысл: производная – это мгновенная скорость. Это соответствие наиболее доступно для понимания школьника. <u>Задача.</u> На станции метро расстояние от тормозной отметки до остановки первого вагона 80 м. С какой	Перед изучением производной определяются понятие предела и обратных функций. В книге рассмотрены задачи на вычисление мгновенной скорости прямолинейного движения, на вычисление тангенса угла наклона касательной к графику функции, на определение силы тока,	Понятие производной функции первоначально рассматривается как мгновенная скорость движения материальной точки. *Скоростью точки в момент* t *(мгновенной скоростью)* называют предел, к которому стремится средняя скорость, когда $h \to 0$,

Категории для сравнения	***Алимов Ш.А. и др.***	***Никольский С.М. и др.***	***Колягин Ю.М. и др.***
	скоростью поезд должен подойти к тормозной отметке, если дальше он двигается равнозамедленно с ускорение 1,6 м/с^2? Решение. Нужно найти скорость движения поезда в момент прохождения тормозной отметки, т.е. *мгновенную скорость* в этот момент времени. Тормозной путь вычисляется: $s = \frac{at^2}{2}$ (a – ускорение, t – время торможения). Подставляем: $80 = \frac{1{,}6t^2}{2}$, $80 = 0{,}8t^2$, откуда t=10 с. Находим мгновенную скорость: $v = at$, $v = 1{,}6 \cdot 10 = 16$ м/с. Рассмотрев задачу на скорость, Алимов сразу же переходит к точному определению производной через пределы, кратко объяснив значение понятия «предел» в той же задаче применительно к мгновенной скорости.	приводящие к определению производной. Задача. Пусть известна функция $Q = f(t)$, выражающая количество электричества, прошедшее через фиксированное сечение провода за время t. За период $t + \Delta t$ через сечение протекает количество электричества $\Delta Q = f(t + \Delta t) - f(t)$. Средняя сила тока при этом равна $I_{\text{ср}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$. Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ дает силу тока в момент времени t, равную $I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$.	т.е. скорость $v(t)$ в момент времени t определяется равенством $v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$. Затем вводится общее определение производной через предел разностного отношения. Закреплению понятия производной способствует вывод производных отдельных функций «по определению».
Особенности изучения применения производной при исследовании функции	Возрастание и убывание функции. Данный пункт содержит определение возрастающей (убывающей) функции. Формулируется теорема Лагранжа для доказательства теорем о достаточных условиях возрастания (убывания) функций. Экстремумы функций.	В изучении применения производной внимание уделяется максимуму и минимуму функции, выводится уравнение касательной, осуществляются приближенные вычисления, формулируются и доказываются теоремы Ролля и Лагранжа, изучаются свойства	С помощью теоремы Лагранжа обосновывается достаточное условие возрастания и убывания функции. Доказательство сформулированных в учебнике теорем можно требовать лишь от учащихся классов физико-математического профиля. Вводятся понятия критических и стационарных

Продолжение табл.1

Категории для сравнения	***Алимов Ш.А. и др.***	***Никольский С.М. и др.***	***Колягин Ю.М. и др.***
	Определяются понятия критических и стационарных точек, точек максимума и минимума. Формулируется теорема Ферма, теорема о необходимом и достаточном условии для точек максимума и минимума. Применение производной к построению графиков функций. Предлагается схема исследования свойств функции. Наибольшее и наименьшее значения функции. Составлен алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции. Выпуклость графика функции, точки перегиба. Вводится производная второго порядка, применяемая для определения выпуклости графика функции и нахождения точек перегиба.	возрастания и убывания функции, определяются вторая производная и производные высших порядков, а также механический смысл второй производной. Выясняется применение второй производной для определения выпуклости и вогнутости графика функции, а также геометрический смысл второй производной. Рассматриваются особенности экстремума функции с единственной критической точкой, использование производных для построения графиков функций (с применением второй производной).	точек. Должное внимание уделяется теореме Ферма и ее геометрическому смыслу, а также достаточному условию экстремума. Экстремумы функции рассматриваются автором, а также применение производной к построению графиков функций. Наибольшее и наименьшее значения функций. Производная второго порядка, выпуклость и точки перегиба.

Учебник Алимова Ш.А. делает больший упор на практическую сторону. В тексте много примеров решения задач, некоторые пункты даже целиком состоят из них. К каждому пункту прилагается большой набор задач для самостоятельного решения. Доказательства – слабая сторона учебника, т.к. они кратки, а зачастую их нет совсем. Некоторые аспекты темы опущены.

Учебник Никольского С.М. и др. рассчитан на обучение на базовом и профильном уровнях, что позволяет успешно организовать работу с учащимися различного уровня подготовки. В целом, учебник написан доступным для учащихся языком, содержит большое количество примеров к изучаемым формулам и основным задачам. Учебник содержит материал для дополнительного повторения.

В учебнике Колягина Ю.М. содержится избыточная разноуровневая система задач и упражнений (многие задачи приведены с решениями и указаниями), позволяющая успешно подготовиться к экзамену.

Таким образом, проанализировав учебники Ш.А. Алимова, С.М. Никольского и Ю.М. Колягина, можно сделать вывод, что в учебниках показано применение производной для исследования функции (промежутки возрастания и убывания, критические точки, экстремумы функции и др.), но не рассматривается применение производной к решению уравнений и неравенств.

3. Методические аспекты обучения приложениям производной учащихся 10-11 классов

Обратимся к методическим рекомендациям по изучению элементов анализа. Рекомендуется перед изучением понятия производной выполнить следующие действия:

а) повторить вопросы, связанные с линейной функцией и элементарными функциями, что объясняется основной идеей дифференциального исчисления (представлением о линейной в малой окрестности некоторой точки функции);

б) отработать понятия приращения функции и приращения аргумента, что может быть иллюстрировано графиками функций;

в) выработать у обучающихся твердые навыки в их нахождении;

г) выяснить геометрический смысл отношения приращения функции к приращению аргумента, ввод понятия касательной к кривой как предельного положения секущей [21, с. 32].

Для изучения геометрического смысла производной, нужно осуществить повтор материала по линейной функции, ее угловому коэффициенту, понятия производной, а также уже рассмотренные задачи про мгновенную скорость, касательную к графику функции. Для этого будут полезными задания следующих типов:

1. Найдите производную функции: $y = 7x + 4; y = x^2; y = -6x + 1$.

2. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0: $f(x) = x^2, x_0 = 2; f(x) = \cos x, x_0 = \frac{\pi}{3}$.

3. Найдите производную функции: $y = -3x^2 - 13x; y = x^5 + 9x^{20} + 1$.

4. Вычислите скорость изменения функции $y = g(x)$ в точке x_0: $g(x) = x^3 + 2x, x_0 = 2;\ g(x) = 2x^3 + 4x + 3, x_0 = 2$.

5. Найдите тангенс угла между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью x: $h(x) = x^6 - 4x, x_0 = 1$ [18, с.119].

Данные задачи покажут необходимость изучения нового понятия – понятия производной, а кроме того выполнят и дидактическую функцию по подготовке обучающихся к осознанию понятия производной.

Цукерман В.В. утверждает, что изучение темы «Применение производной к исследованию функций» требует знания некоторых определений и теорем, которые изучались ранее: понятия возрастания и убывания функции на множестве, определение производной, ее геометрический смысл, в связи с этим – понятия касательной, углового коэффициента прямой, условие параллельных прямых. В ходе решения задач ученикам понадобится находить производные функций, пользоваться известными графиками для построения графиков других функций. Повторить нужно и метод интервалов. Для усвоения понятия экстремума функции и доказательства соответствующих теорем надо вспомнить определение предела функции. Поскольку в дальнейшем обучении будет идти речь о необходимых и достаточных условиях, и эти понятия должны быть усвоены обучающимися [19, с. 7].

Исследование функций, особенно нахождение промежутков возрастания и убывания, является одним из основных способов применения производной в школьном курсе алгебры и начал анализа. С целью подготовки к осознанному усвоению признака возрастания и убывания функции полезно рассмотреть с обучающимися геометрические иллюстрации, на которых показаны графики функций, имеющих разный характер изменения, а также касательные в точках, принадлежащих к промежуткам возрастания и промежуткам убывания функций. Анализируя расположение касательных по отношению к оси абсцисс (угол наклона) и определяя тем самым знаки значений производной, обучающихся нужно подвести к самостоятельной формулировке необходимых признаков. Доказательство признаков осуществляется на основании формулы Лагранжа [16, с. 47].

Башмаков М.И. считал, что ученикам необходимо разъяснение наглядного смысла признаков. Пусть движущаяся по оси ординат точка в момент времени t имеет ординату $y = f(t)$. В данном случае скорость этой точки в момент времени t равна $f'(t)$. Если $f'(t) > 0$ в каждый момент времени из промежутка L, то точка движется в положительном направлении оси ординат, т.е. если $t_1 < t_2$, то $f(t_1) < f(t_2)$. Это значит, что функция f возрастает на промежутке L.

Теоретический материал по теме «Критические точки функции, ее максимумы и минимумы» – это основа для получения общего метода решения класса задач на нахождение экстремумов функций. Этап, на котором идет рассмотрение общей схемы исследования функции, отличается тем, что учащиеся еще не владеют методом нахождения точек экстремума. На уроке по данной теме идет рассмотрение необходимого признака экстремума (теорема Ферма) и достаточного признака максимума и минимума. В итоге изучения темы каждый ученик должен получить умение по нахождению экстремумов функций. Доказательство признаков максимума и минимума функции необходимо проводить с привлечением учащихся. Внутренние точки области определения функции, где она будет равна нулю или не существует, называются критическими точками данной функции. Они выполняют важную роль в процессе построения графика функции, т.к. лишь они могут быть точками экстремума функции. При рассмотрении теоремы Ферма нужно отметить, когда теорема является лишь необходимым условием экстремума: из того, что производная в точке x_0 обращается в нуль, не следует, что в данной точке функция имеет экстремум. Например, производная функции $f(x) = x^3$ обращается в нуль в точке 0, но экстремума в этой точке нет.

Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$. У нее нет производной в точке 0. Следовательно, 0 является критической точкой. Видно, что в точке 0 функция имеет минимум. Из теоремы Ферма следует: при нахождении точек экстремумов функции нужно в первую очередь найти ее критические точки. Для учащихся будет удобно использование упрощенной формулировки признака максимума функции: если в точке x_0 производная меняет знак с $+$ на $-$, то x_0 есть точка максимума; признака минимума: если в точке x_0 производная меняет знак с – на $+$, то x_0 есть точка минимума [11, с. 61].

При рассмотрении темы по нахождению наибольшего и наименьшего значений функции, рекомендовано уделить внимание следующему факту: наибольшее (наименьшее) значение функции не есть максимум (минимум) функции. Решение практических задач часто сведено к нахождению наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции. В курсе анализа ученики доказывают теорему Вейерштрасса, утверждающую, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значение, т.е. существуют точки отрезка $[a, b]$, где f принимает наибольшее и наименьшее на $[a, b]$ значения. С целью нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, необходимо провести вычисление значения функции во всех ее критических точках и на концах отрезка, затем из полученных результатов выбрать наибольшее и наименьшее.

Для закрепления полученных знаний полезны типы упражнений:

1. Используя данные о производной $f'(x)$, приведенные в таблице, укажите:

а) промежутки возрастания функции $y = f(x)$;

б) промежутки убывания функции $y = f(x)$;

в) точки максимума функции $y = f(x)$;

г) точки минимума функции $y = f(x)$.

X	$(-\infty; -5)$	-5	$(-5; -2)$	-2	$(-2; 8)$	8	$(8; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

2. Исследуйте функцию и постройте ее график:

$y = 3x^2 - 4x + 5; y = 3x^2 - x^3; y = (x-1)^2(x+2)$.

3. Определите промежутки монотонности и точки экстремума функции: $y = x - \sin x\,; y = x + 4\cos\frac{x}{2}$ [10, с. 206].

Исходя из вышеизложенного, можно сделать вывод о том, что изучение применения производной к исследованию функций имеет огромное значение для многих классов функций, а также реализует связи между предметами (физика). Изложение вопросов, которые связаны с исследованием функции на экстремумы, обычно начинается с доказательства достаточных признаков возрастания и убывания функций, затем идет изучение теоремы Ферма (необходимое условие существования экстремума), затем – условий существования экстремума, общей схемы исследования функций и задач на наибольшее и наименьшее значения функции на интервале. Перед изучением обозначенных вопросов рекомендуется осуществить повтор понятий возрастающей и убывающей функций, определения производной, ее геометрического смысла, понятия касательной, углового коэффициента, условия параллельности прямых, графиков известных функций. Кроме того, обучающиеся должны иметь представление о непрерывных функциях.

1.3. Элективные курсы как составляющая часть профильного обучения

Одним из направлений современной образовательной парадигмы является профильное обучение, цель которого – личностное и профессиональное самоопределение. Для достижения указанной цели большое значение имеют элективные курсы, зарекомендовавшие себя как эффективный способ предоставления обучающимся дополнительных знаний в интересующей их области.

Элективные курсы (electus – это «избранный» с лат.) – это «курсы, обязательные для изучения, направленность которых школьник выбирает самостоятельно» [25]. Подобные курсы не должны повторять программу базового среднего образования, причем схема обучения на элективных курсах проста: школьникам предлагается на выбор три из пяти – шести предметов, после чего они имеют возможность получить необходимый багаж знаний по интересующим их направлениям. Например, ученик может выбрать «Математическую экономику» или «Разговорный английский». Каково же назначение элективных курсов? Во-первых, они помогают обучающемуся определиться со специализацией и дальнейшим выбором своей профессии. Во-вторых, элективные курсы выполняют роль некоторого дополнения к базовому курсу, что позволяет углубить знания школьника в интересном для него направлении.

Обучение, как правило, проводится в нестандартной форме, что мобилизует внимание и творческие способности учащихся. При этом предлагается три основных *вида элективных курсов* [4, с. 103]: предметные, расширяющие знания по определенному школьному предмету; межпредметные, объединяющие знания по нескольким предметам, и курсы по предметам, не входящим в основную программу обучения (например, «Основы фармации», «Основы политологии» и др.). Например, разработанный нами элективный курс «Решение уравнений и неравенств с помощью производной» можно отнести к первому из выше перечисленных виду.

Задачами, решаемыми элективными курсами, являются следующие: удовлетворение образовательных потребностей школьников, реализация индивидуализации обучения, создание условий для проверки учеником правильности выбора направления дальнейшего обучения, связанного с определенным видом профессиональной деятельности; помощь старшекласснику, выбравшему образовательную область для более тщательного изучения, увидеть многообразие видов деятельности, связанных с ней [33; 34].

Элективные курсы в области математики, русского языка и других предметов развивают умственные способности школьников, учат их анализировать обсуждаемый материал и способствуют формированию у учеников предусмотренных стандартом [35] универсальных учебных действий. Элективные курсы позволяют использовать новейшие технологии для улучшения усвоения материала: школьники с удовольствием изучают электронные учебники, ищут дополнительную информацию в специально подготовленных электронных библиотеках. Одну из ключевых ролей в обучении с помощью элективных курсов играет самообразование: школьник ответственно подходит к подготовке, поскольку он сам выбрал данный предмет, и он ему действительно интересен. Важно отметить, что ученики, изучающие определенное направление в небольшой группе, всегда могут попросить учителя акцентировать внимание на том пункте программы элективных курсов, в котором у них возникли наибольшие трудности.

Рассмотрим некоторые *требования и рекомендации*, которых желательно придерживаться при разработке элективного курса.

При разработке программы элективного курса необходимо [33; 34]:

- определить цель курса и его функцию в рамках выбранного профиля;
- выявить отличительные особенности содержания элективного курса от содержания соответствующего учебного предмета в рамках данного профиля;
- разделить содержание программы курса по темам и определить необходимое количество часов на каждую из них;
- продумать образовательные продукты, создаваемые в процессе освоения материалов курса;
- выяснить обеспеченность курса различными учебно-методическими материалами и при необходимости доработать их;
- составить список литературы для учителя и обучающихся;
- выделить основные виды деятельности школьников и определить долю их самостоятельности, творчества ученика при изучении курса;
- определить критерии, позволяющие оценить успешность освоения курса;
- продумать форму отчетности учащихся по итогам освоения программы кура (проект, реферат, выступление и т.д.).

Содержание курса может:

- представлять собой углубленный вариант определенного раздела базового курса (подобные курсы призваны помочь ученику подготовиться к ЕГЭ);

- служить основой для внутрипрофильной специализации обучения (например, курс «Химические технологии» в естестественно-научном профиле);
- представлять собой введение в сопутствующую данному предмету профессию (например, курс «Основы фармацевтики»); подобные курсы обеспечивают профессиональное самоопределение и знакомят с основами профессиональной деятельности;
- служить удовлетворением познавательных интересов школьников в областях, выходящих за рамки выбранного им профиля. Например, школьник, обучающийся в гуманитарном классе, выберет курс «Компьютерное моделирование» и т.д.;
- выполнять роль «надстройки», дополняя содержание профильного курса. Такой дополнительный курс становится углубленным, а класс, в котором он изучается, превращается в класс с углубленным изучением отдельных дисциплин.

В зависимости от профилизации обучения, учитывая индивидуальные особенности обучаемых, выбираются методы и формы обучения на элективных курсах. Так, чаще выделяются следующие *основные приоритеты методики преподавания элективных курсов*: междисциплинарная интеграция, содействующая становлению целостного мировоззрения; обучение на основе опыта и сотрудничества; интерактивность (работа в малых группах, метод проектов и др.); личностно-деятельностный подход в обучении [39, с. 11].

Выделяют следующие основные *требования к элективным курсам*: избыточность (их должно быть много); оригинальность содержания и названия; результативность (курс должен заканчиваться определенным результатом, например, творческое сочинение, проект и т.д.) и др. В связи с этим остановимся ниже на *методических рекомендациях учителям* [31, с. 118]:

- курс должен иметь привлекательное название, поскольку оно играет важную роль в привлечении слушателей;
- программа курса не должна дублировать программы базовых курсов, а должна включать новые для учащегося знания, вызывающие познавательный интерес школьника, позволяющие учащимся, оценив свои потребности и возможности, обоснованно выбрать свой дальнейший образовательный маршрут после получения школьного аттестата;
- программа должна предполагать наиболее «коротким путь» получения знаний: изучение новых знаний с опорой на недавно пройденный или легко восстанавливающийся в памяти материал;
- несмотря на то, что содержание элективных курсов по математической тематике не стандартизируется, нужно, чтобы соответствующий курс работал на достижение прописанных в стандарте целей среднего образования вообще и математического образования в частности. Это реализуется посредством направленности любого учебного курса на достижение метапредметных результатов, – в частности, на формирование надпредметных умений и обобщенных способов совместной деятельности, умения дискутировать, оппонировать, выстраивать ответ и т.д.;
- в рамках любого элективного курса достигать образовательные цели желательно через реализацию личностно-деятельностного подхода в обучении [39, с. 31]: необходимо смещать акценты на формирование умений через активную самостоятельную деятельность школьников (организовывать проектную и исследовательскую работу, практические и лабораторные занятия, дискуссии и т.д.);
- желательно выбирать темп изучения курса, адекватный складывающейся ситуации (на каком-то материале можно задержаться, где-то бегло просмотреть, что-то совсем пропустить);

- содержание элективного курса должно побуждать учащегося к обращению к внешкольным источникам информации и к опыту обучающегося.

Несмотря на то, что *структура программы элективного курса* предполагает некоторую вариативность, можно выделить следующие традиционные компоненты программы:

- пояснительная записка;
- организация учебного процесса;
- требования к уровню усвоения учебного материала;
- учебно-тематический план;
- содержание курса;
- список литературы для учителя и учащихся;
- приложения.

Остановимся подробнее на каждый из пунктов.

Пояснительная записка содержит информацию об актуальности курса, описание целей, задач и путей их достижения. Важно, чтобы, с одной стороны, пояснительная записка была краткой, а с другой – давала достаточно полное представление о курсе (в чем привлекательность курса для учащихся, для учителей, для родителей, школьного сообщества в целом).

В пункте *«Организация учебного процесса»* описывается количество часов, на которые рассчитана программа (с указанием баланса лекционных, практических и лабораторных занятий). Акцентируется внимание на некоторых особенностях проведения курса; условиях, позволяющих правильно построить учебный процесс; критериях эффективности изучения программы и итоговой форме контроля.

Требования к уровню усвоения учебного материала включают перечень того, что в результате изучения программы элективного курса ученик должен знать, понимать и уметь.

Учебно-тематический план включает:

- название тем курса;

- общее количество часов, отводимых на курс;
- форму проведения занятий;
- образовательный продукт.

Образовательный продукт представляет собой материалы, разработанные учащимися на уроках в ходе познавательной, исследовательской деятельности. Примером подобного продукта могут служить конспекты, тезисы, эксперимент, серия опытов, исторический анализ, доказательство теоремы, литературное произведение, графическое изображение, музыка, песня, вышивка, фотография, модель, макет, схема, компьютерная программа и т.д.

В *содержании курса* дается детальная характеристика каждой темы программы. При этом важно учитывать, что содержанием образования являются не только знания, которые должны получить учащиеся, но и опыт познавательной деятельности, известных ее способов, творческой деятельности, опыт эмоционально-ценностных отношений.

Список литературы для учителя и учащихся включает перечень обязательных к изучению и дополнительных источников информации.

Приложения обычно содержат материалы, служащие методической поддержкой курса, например, темы творческих работ, проектов, планы проведения практических работ; лабораторных опытов, экскурсий и т.д.

Методические рекомендации

Рассмотрим рекомендации, о которых не стоит забывать при проведении элективного курса.

1. Организовывать деятельность обучающихся необходимо так, чтобы они смогли научиться работать самостоятельно. Систематически проводимая самостоятельная работа при правильной ее организации способствует получению обучающимися наиболее глубоких и обширных знаний по сравнению с теми, которые они приобретают при предоставлении преподавателем готовых знаний.

2. Не нужно забывать о том, что нельзя оставлять обучающегося без всякой помощи, но и в это же время, помощь преподавателя не должна быть чрезмерна.
3. План и темп работы обучающийся определяет для себя сам, но учителю желательно поставить свои условия по срокам выполнения предложенных заданий.

ГЛАВА 2. ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС «РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ»

2.1. Программа курса

Пояснительная записка

Сегодня главное в образовании – развитие, формирование общей культуры человека, способного, в частности, самостоятельно добывать и перерабатывать информацию. Одной из основных целей математического образования должно быть воспитание умения математически исследовать явления реального мира [35]. Значит, нужно научить школьников составлять математические модели реальных ситуаций, а для этого они должны владеть математическим языком, описывающим указанные модели. Для математического исследования явлений реального мира особенно важны понятия предела и производной, ведь это – основные понятия языка, на котором «говорит природа». Безусловно, выпускник средней школы должен иметь представления о производной, о ее применении для исследования реальных процессов.

«Начала математического анализа» – единственный раздел, изучаемый в школе математики, не относящийся к элементарной математике, дает возможность выпускнику средней школы не только получить представление о математическом анализе как о мощном прикладном аппарате современной математики, но и научиться сознательно им пользоваться при решении целого ряда задач, не поддающихся элементарным методам.

Одной из важнейших областей приложения понятия производной являются экстремальные задачи. Однако производная может быть с успехом использоваться при решении и доказательстве различных уравнений и неравенств. С помощью производной можно производить также оценку числа корней того или иного уравнения. Аппарат дифференциального счисления позволяет решать широкий класс экономических задач.

Практика последних лет говорит о необходимости формирования умений применения производной в связи с включением их в ЕГЭ. Анализ образовательной практики по данному направлению показывает, что значительная часть учащихся испытывает серьезные затруднения по данной теме. Этому материалу в действующих учебниках уделяется очень мало внимания.

Данный курс предназначен для учащихся 11 класса и рассчитан на 16 часов.

Цели курса:

Образовательная: обучение школьников применению приложений производной при решении уравнений и неравенств.

Развивающая: формирование умений анализировать, выделять главное, сравнивать, обобщать и систематизировать.

Воспитательная: содействовать воспитанию чувства взаимопомощи, отзывчивости, ответственности за порученное дело, исполнительности, аккуратности.

Планируемые результаты курса:

Предметные результаты: умение в процессе решения уравнений и неравенств применять приложения производной.

Метапредметные результаты:

Коммуникативные: регулирование собственной деятельности посредством речевых действий, умение слушать и вступать в диалог, воспитывать чувство взаимопомощи.

Познавательные: совершенствование навыков решения уравнений и неравенств; способствование развитию математической речи, оперативной памяти, произвольного внимания, наглядно-действенного мышления.

Регулятивные: планирование своих действий в соответствии с поставленной задачей; внесение необходимых коррективов в действие после его завершения на основе его оценки и учёта характера сделанных ошибок.

Личностные: формирование внимательности и аккуратности в вычислениях, требовательное отношение к себе и к своей работе.

Задачи курса:

- активизировать познавательную деятельность учащихся;
- показать применение производных при решении уравнений:
  с применением исследования функции на монотонность;
  с применением исследования функции на экстремум;
- показать применение производных при решении и доказательстве неравенств:
  с использованием монотонности функции;
  с исследованием функции на экстремум.

Теоретический и практический материал, запланированный программой курса, способствует формированию познавательного интереса и мотивации к изучению математики, развитию творческих способностей учащихся, развивает навыки работы с учебной и справочной литературой; является возможностью дополнительно подготовить к государственной итоговой аттестации.

Организация учебного процесса

Программа элективного курса рассчитана на 16 часов, из них 1 час лекций, 2 часа – игра, 3 часа – практикумов, 9 часов – комбинированных уроков и 1 час – урок контроля. Курс имеет практическую направленность, количество часов и объем изучаемого материала позволяют принять темп продвижения по курсу, который соответствует возрасту учащихся. Отработка и закрепление основных умений и навыков осуществляется на большом числе доступных учащимся упражнений. Условием, позволяющим правильно построить учебный процесс, является то, что изучение каждой темы начинается с установочных мероприятий (выделяется главное и, исходя из этого, дифференцируется материал: выделяются те задачи, в которых происходит отработка знаний, умений, навыков, и те, которые служат развитию, побуждению интереса и др.). Итоговой формой контроля, подводящей изучение курса к логическому завершению, является контрольная работа.

Требования к результатам усвоения материала курса

Учащиеся должны:

знать/ понимать значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;

уметь решать уравнения с применением производной; решать и доказывать неравенства с применением производной; анализировать, сравнивать, систематизировать и обобщать материал; применять полученные знания при решении заданий повышенной сложности.

Календарно-тематический план

№ урока	Тема	Тип урока	Количество часов
1	Введение. Историческая справка.	лекция	1
2-3	Деловая игра «Эта многогранная производная».	игра	2
4-6	Использование производных при решении уравнений с применением исследования функции на монотонность.	комбинированный урок	3
7-9	Использование производных при решении уравнений с применением исследования функции на экстремум.	комбинированный урок	3
10-12	Использование производных при решении и доказательстве неравенств.	комбинированный урок	3

13-15	Решение задач из ЕГЭ.	практикум	3
16	Контрольная работа.	урок контроля знаний	1
		Итого	**16**

Основное содержание курса

Тема 1. *Введение. Историческая справка.(1 час)*

Цели и задачи курса. Историческая справка об открытии производной, об ученых-математиках, внесших огромный вклад в становление и развитие этого раздела математика.

Тема 2. *Деловая игра «Эта многогранная производная». (2 часа)*

Обобщение и систематизация теоретических знаний обучающихся по теме «Производная»: основные правила и формулы дифференцирования; физический и геометрический смысл производной; нахождение наибольшего и наименьшего значений функции. Сценарий деловой игры находится в приложении 1.

Тема 3. *Использование производных при решении уравнений с применением исследования функции на монотонность. (3 часа)*

Решение уравнений с использованием производной. Варианты заданий, которые можно использовать на занятиях, находятся в приложении 2.

Тема 4. *Использование производных при решении уравнений с применением исследования функции на экстремум. (3 часа)*

Решение уравнений с использованием производной. Варианты заданий, которые можно использовать на занятиях, находятся в приложении 2.

Тема 5. *Использование производных при решении и доказательстве неравенств. (3 часа)*

Решение и доказательство неравенств с использованием производной. Использование монотонности функции и исследования функции на экстремум. Варианты заданий, которые можно использовать на занятиях, находятся в приложении 3.

Тема 6. *Решение задач из ЕГЭ. (3 часа)*

Решение задач на исследование функций, решение уравнений и неравенств с помощью производной.

Тема 7. Контрольная работа. *(1 час)*

Урок контроля знаний и умений.

2.2. Материалы для проведения занятий

Рассмотрим ниже фрагменты разработок уроков курса «Решение уравнений и неравенств с помощью производной».

Фрагмент урока № 5

Тема: Применение производной к решению уравнений.

Цели урока:

- закрепить умение учащихся применять производную при исследовании функций на монотонность и экстремумы;
- формировать умение применять исследование функций на монотонность и экстремумы при решении уравнений;
- развивать логическое мышление;
- формировать умение анализировать условие, выбирать соответствующий способ действия, контролировать и оценивать его выполнение;
- воспитывать целеустремленность, способность довести дело до конца даже в ситуациях, которые кажутся безвыходными.

Задача. Решите уравнение $x^2 - x + 2 = 2\sqrt[4]{2x-1}$.

Анализ условия задачи и поиск решения	
Деятельность учителя	*Деятельность ученика*
Какого вида уравнение?	Иррациональное.

С чего начинается решение иррационального уравнения?	С нахождения области определения значений переменных, при которых выражение имеет смысл: $2x - 1 \geq 0$, $x \geq 0{,}5$, $x \in [0{,}5; +\infty)$.
Какие способы решения иррациональных уравнений мы знаем?	1) возвести обе части в четвертую степень; 2) заменой переменной; 3) графический.
	Три ученика у доски пытаются решить уравнение известными способами.
1) Начните решение первым способом.	При возведении обеих частей уравнения в четвертую степень появится x^8, x^7,…, x^2, x, а это уравнение 8-ой степени.
Сможем ли мы решить уравнение первым способом?	Нет.
2) Начните решение вторым способом.	Нужно произвести замену $\sqrt[4]{2x-1} = t$, $t \geq 0$. Выразим x: $x = (t^4 + 1)/2$. Подставляя полученные выражения в исходное уравнение, получим уравнение 8-ой степени.
Сможем ли мы решить уравнение вторым способом?	Нет.
3) Решим уравнение третьим способом (графически).	Один ученик решает у доски.

Решение:

1) Построим графики функций $y = x^2 - x + 2$ и $y = 2\sqrt[4]{2x-1}$.

2) Найдем точки пересечения графиков функций.

Графиком первой функции является парабола с вершиной в точке (x_0,y_0).

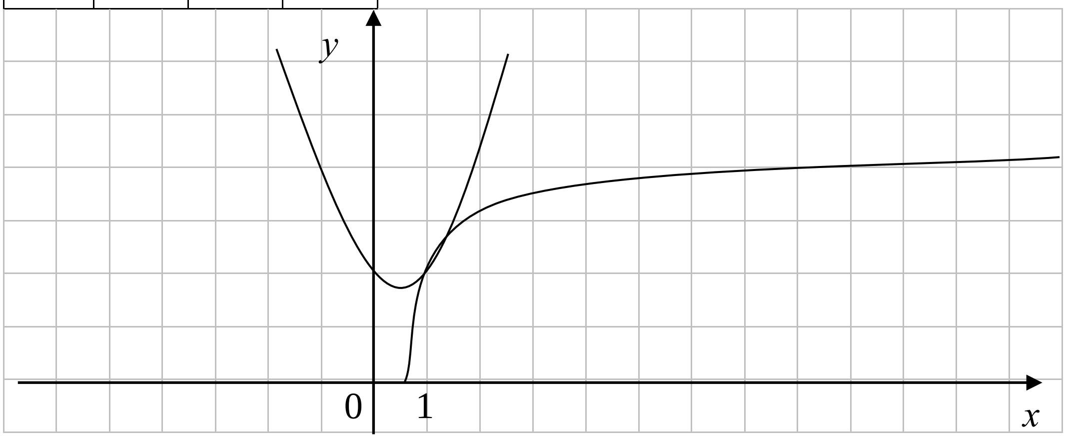
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2} = 0{,}5;\ y_0 = y(x_0) = 1{,}75.$$

Дополнительные точки:

x	1	2
y	2	4

График второй функции – ветвь параболы, направленная вдоль оси *Ox*.

x	0,5	1	8,5
y	0	2	4



$x_1 = 1$, $x_2 = ?$

Поиск решения	
Деятельность учителя	*Деятельность ученика*
Можем записать ответ? Почему?	Нет. Мы нашли точно только один корень.
Вспомните цель нашего урока	Применять производную в нестандартных задачах.
Для чего мы применяли производную раньше?	Для исследования функций.

Какую функцию можно рассмотреть в этой задаче?	Варианты ответов: - можно выделить две функции (левая и правая части уравнения); - можно перенести все в левую часть и получим одну функцию.
Какую функцию рассмотрим?	$f(x) = x^2 - x + 2 - 2\sqrt[4]{2x-1}$.
Что сделаем потом?	Исследуем эту функцию на монотонность и экстремумы.
Как поступим дальше?	Попробуем сделать вывод.

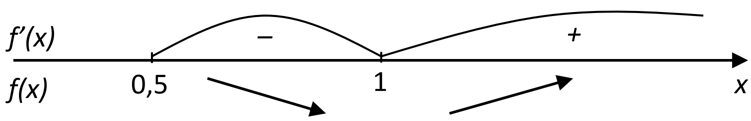
1. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - x + 2 - 2\sqrt[4]{2x-1}$, $D(f) = [0{,}5; +\infty)$.

2. $f'(x) = 2x - 1 - 2\frac{2}{4*\sqrt[4]{(2x-1)^3}} = 2x - 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{(2x-1)^3}} = \frac{\sqrt[4]{(2x-1)^7}-1}{\sqrt[4]{(2x-1)^3}}$,

$f'(x) = 0$ при $x = 1$,

$x = 1$ – точка минимума,

$f_{min} = f(1) = 2 - 2 = 0$.



3. Так как функция убывает на отрезке $[0{,}5; 1]$, то во всех точках промежутка $[0{,}5; 1)$, значения функции < 0.

Так как функция возрастает на промежутке $[1; +\infty)$, то во всех точках промежутка $(1; +\infty)$, значения функции > 0.

Значит, уравнение имеет единственный корень $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Фрагмент урока № 10.

Тема: Применение производной к доказательству неравенств.

Цель: рассмотреть связь между убыванием, возрастанием функций и доказательством неравенств; развивать: логическое мышление; стойкий интерес к математике; умение обобщать и делать выводы; навыки самостоятельной работы с научной литературой.

Ожидаемые результаты: учащиеся знают, как с помощью производной исследовать функцию на возрастание и убывание и умеют применять эти знания к доказательству неравенств.

Структура занятия:

1. Теоретические основы.
2. Коллективное решение задач на доказательство неравенств.
3. Самостоятельное решение задач.

1. Теоретические основы.

Одно из простейших применений производной к доказательству неравенств связано с возрастанием и убыванием функции на промежутке и знаком ее производной.

С помощью теоремы Лагранжа доказана теорема:

Теорема 1. Если функция $f(x)$ на некотором интервале $(a;b)$ имеет производную $f'(x) > 0$ всюду на $(a;b)$, то $f(x)$ на $(a;b)$ монотонно возрастает; если же $f'(x) < 0$ всюду на $(a;b)$, то $f(x)$ на $(a;b)$ монотонно убывает.

Очевидным следствием (и обобщением) этой теоремы является следующая теорема:

Теорема 2. Если на промежутке $(a;b)$ выполняется неравенство $f'(x) < g'(x)$, функция f и g непрерывны в точке a и $f(a) \leq g(a)$, то на $(a;b)$ выполняется неравенство $f(x) < g(x)$. $f'(x) < g'(x)$

Для выяснения истинности неравенств иногда удобно воспользоваться следующим утверждением, которое непосредственно вытекает из теоремы 1:

Теорема 3: Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $(a;b)$ и пусть имеется такая точка c из $(a;b)$, что $f'(x) < 0$ на $(a;c)$ и $f'(x) > 0$ на $(c;b)$. Тогда при любом x из $(a;b)$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(c)$, причем равенство имеет место лишь при $x = c$.

2. Коллективное решение упражнений на доказательство неравенств.

Учитель говорит: «Сейчас мы решим несколько упражнений на доказательство неравенств с использованием теорем указанных выше. Умение доказывать неравенства – это искусство, которое требует четкости логического мышления, научной строгости доказанного, утонченности выводов, уникальности дальнейшего применения».

Задача 1. Доказать, что при $0 < x < \frac{1}{2}$ справедливо неравенство $2x + \frac{1}{x^2} > 5$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ и найдем ее производную: $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3-1)}{x^3}$. Замечаем, что на интервале (0;1) производная $f'(x) < 0$, значит, функция $f(x)$ убывает на этом интервале. Поэтому, в частности, при $0 < x < \frac{1}{2}$ справедливо неравенство $f(x) > f\left(\frac{1}{2}\right)$. Но $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 5$.

Итак, $f(x) > 5$, то есть $2x + \frac{1}{x^2} > 5$, что и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать неравенство: $x + \frac{x^3}{3} < tg(x)$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Решение: Воспользуемся теоремой 2. $f(x) = x + \frac{x^3}{3}$ и $g(x) = tg(x)$, верно неравенство $f'(x) < g'(x)$: $1 + x^2 < \frac{1}{cos^2(x)}$ на промежутке $(0;\frac{\pi}{2})$ и выполнимо условие $f(a) \le g(a)$, где a, в данном случае равно 0. Следовательно, неравенство $x + \frac{x^3}{3} < tg(x)$верно, что и требовалось доказать [27, с. 31].

Задача 3. Доказать неравенство: $\cos(x) > 1 - \frac{x^2}{2}, x \in R$.

Решение: $1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) \Leftrightarrow \cos(x) > 1 - \frac{x^2}{2}$, $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, $g(x) = \cos(x)$.

Неравенство $f'(x) < g'(x) \Leftrightarrow -x < -\sin(x)$ при любых x верно. Значит неравенство $\cos(x) > 1 - \frac{x^2}{2}$ верно, что и требовалось доказать.

Задача 4. Выясним, что больше при $0 < p < g$: $(p+g)^6$ или $32(p^6+g^6)$.

Решение: Предстоит сравнить с числом 1 дробь $\frac{(p+g)^6}{32(p^6+g^6)}$.

Рассмотрим на $[0; g]$ вспомогательную функцию $f(x) = \frac{1}{32} \cdot \frac{(x+g)^6}{(x^6+g^6)}$.

Выясним, будет ли она монотонна на отрезке $[0; g]$. Для этого найдем ее производную (по правилу дифференцирования дроби):

$$f'(x) = \frac{1}{32} \cdot \frac{6(x+g)^5(x^6+g^6)-(x+g)^6 6x^5}{(x^6+g^6)^2} = \frac{6(x+g)^5\left(x^6+g^6-x^6-gx^5\right)}{(x^6+g^6)^2} =$$

$$= \frac{6(x+g)^5 g(g^5-x^5)}{(x^6+g^6)^2} > 0 \text{ при } 0 < x < g.$$

В силу теоремы 1 функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[0; g]$. Поэтому, при $0 < p < g$ $f(p) < f(g)$, т.е. $\frac{(p+g)^6}{32(p^6+g^6)} < 1$.

$(p+g)^6 < 32(p^6+g^6)$ при $0 < p < g$.

При решении данной задачи встретился полезный методический прием, если нужно доказать неравенство, в котором участвует несколько букв, то часто целесообразно одну из букв (в данном примере это была буква p) считать переменной, чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы ее заменяли буквой x, а значение остальных букв (в данном случае значение буквы g) считать фиксированными. Иногда приходится при решении одной задачи применить указанный прием несколько раз.

3. <u>Самостоятельное решение упражнений.</u>

Задача 1. Проверить, справедливо ли при любых положительных a, b, c неравенство: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$.

Решение: Пусть $0 < a \leq b \leq c$. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + b^3 + c^3 - 3xbc$.

При $0 < x < b$ имеем $f'(x) = 3x^2 - 3bc < 0$.

Отсюда видно (теорема 1), что $f(x)$ убывает на $[0; b]$. Поэтому при $0 < a \leq b$ имеем $f(a) \geq f(b)$, т.е. мы получили неравенство:

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 2b^2 + c^3 - 3b^2c$ (1).

Теперь рассмотрим другую вспомогательную функцию $\varphi(x) = 2x^3 + c^3 - 3x^2c$. При $0 < x < c$ имеем: $\varphi'(x) = 6x^2 - 6xc < 0$.

Следовательно, $\varphi(x)$ убывает на $[0; c]$, т.е. $\varphi(b) \geq \varphi(c)$ при $0 < b \leq c$, значит, $2b^3 + c^3 - 3b^2c \geq 0$ (2).

Из неравенств (1) и (2) следует неравенство $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$, что и требовалось доказать.

Задача 2. Проверьте, справедливо ли для всех действительных x следующее неравенство: $f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right), f(x) = x^5 + (1-x)^5$.

Решение: Выясним, где функция возрастает, а где убывает. Для этого найдем производную: $f'(x) = 5x^4 - 5(1-x)^4$.

Видно, что $f'(x) < 0$ на $(-\infty; \frac{1}{2})$ и $f'(x) > 0$ на $(\frac{1}{2}; +\infty)$. Следовательно, в силу теоремы 3, при любом x неравенство $f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right)$ справедливо, причем равенство имеет место лишь при $x = \frac{1}{2}$.

Фрагмент урока № 11

Тема: Применение производной к решению неравенств.

Цели:

- закрепить умение учащихся применять производную при исследовании функций на монотонность и экстремумы;
- формировать умение применять исследование функций на монотонность и экстремумы при решении неравенств, доказательство тождеств, сравнение чисел;
- развивать логическое мышление;
- формировать умение анализировать условие, выбирать соответствующий способ действия, контролировать и оценивать его выполнение;
- воспитывать целеустремленность, способность довести дело до конца даже в ситуациях, которые кажутся безвыходными.

Задача 1. Докажите тождество $cos^4x - \frac{1}{8}cos4x - 2cos^2x + \frac{1}{2}cos2x = -\frac{5}{8}$.

Анализ условия задачи	
Деятельность учителя	*Деятельность ученика*
Что значит «доказать тождество»?	Доказать тождество – значит доказать, что равенство выполняется при любых значениях, входящих в него переменных.
Как мы поступаем в таких случаях?	Упрощаем левую часть равенства и получаем правую.

Затем следуют попытки упростить левую часть равенства.

Поиск способа решения задачи	
Деятельность учителя	*Деятельность ученика*
Попробуем решить эту задачу с помощью производной. Где мы используем производную?	При исследовании функций на монотонность и экстремумы.
Какую функцию можно рассмотреть в этой задаче?	$f(x) = cos^4x - \frac{1}{8}cos4x - 2cos^2x + \frac{1}{2}cos2x$
Какова область определения функции $f(x) = cos^4x - \frac{1}{8}cos4x - 2cos^2x + \frac{1}{2}cos2x$?	$D(f) = R$.
Чему равно ее значение?	Ее значение равно $-\frac{5}{8}$ при любом значении x.
Как называется такая функция, значение которой неизменно на всей области определения?	Постоянная функция.
Измените вопрос задачи, используя понятие «постоянная	Докажите, что функция $f(x) = cos^4x - \frac{1}{8}cos4x - 2cos^2x + \frac{1}{2}cos2x$ –

функция».	постоянная, и имеет значение $-\frac{5}{8}$ на всей области определения.
Как доказать постоянство функции?	Используем теорему о постоянной функции: Если во всех точках открытого промежутка X выполняется равенство $f'(x) = 0$, то функция $y = f(x)$ постоянна на промежутке X.

Решение: $cos^4x - \frac{1}{8}cos4x - 2cos^2x + \frac{1}{2}cos2x = -\frac{5}{8}$.

1. Рассмотрим функцию $f(x) = cos^4x - \frac{1}{8}cos4x - 2cos^2x + \frac{1}{2}cos2x$, $D(f) = R$.
2. $f'(x) = 4cos^3x(-sinx) - \frac{1}{8}(-4sin4x) - 2 * 2cosx(-sinx) +$

   $+\frac{1}{2}(-2sin2x) = -4sinxcos^3x + \frac{1}{2}sin4x + 4sinxcosx - sin2x =$

   $= -2sin2xcos^2x + sin2xcos2x + 2sin2x - sin2x = sin2x(-2cos^2x +$

   $+cos2x + 1) = sin2x(-2cos^2x + +cos^2x - sin^2x + 1) = sin2x(-1 +$

   $+1) = 0.$

   $f'(x) = 0$ при любом x, значит функция $y = f(x)$ постоянна на R.

3. Найдем значение функции в любой точке, например $x = 0$:

$f(0) = cos^40 - \frac{1}{8}cos0 - 2cos^20 + \frac{1}{2}cos0 = 1 - \frac{1}{8} - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{8}$

Вывод: равенство $cos^4x - \frac{1}{8}cos4x - 2cos^2x + \frac{1}{2}cos2x = -\frac{5}{8}$ выполняется при любом x.

Исследование задачи	
Деятельность учителя	*Деятельность ученика*
Какой новый способ доказательства тождеств мы узнали?	С помощью производной.
Какова основная идея	Рассмотреть функцию, значение которой

доказательства?	должно быть неизменно, и доказать ее постоянство, используя теорему о производной постоянной функции.
Запишем алгоритм доказательства тождеств с помощью производной.	*Алгоритм доказательства тождеств с помощью производной:* 1. рассмотреть функцию, значение которой должно быть постоянно; 2. доказать постоянство функции $f'(x) = 0$ для любого x из области определения функции, отсюда следует, что $f(x) = const$; 3. найти значение функции в любой точке, сделать вывод.

Задача 2. Решите неравенство $2x^9 - x^5 + x - 2 < 0$.

Анализ условия задачи и поиск решения	
Деятельность учителя	*Деятельность ученика*
Применим производную и при решении неравенства. С чего начинаем решение задачи методом применения производной?	С рассмотрения функции.
Какую функцию рассмотрим в данной задаче?	Рассмотрим функцию: $f(x) = 2x^9 - x^5 + x - 2$.
Какой следующий шаг?	Исследуем функцию на монотонность и экстремумы и сделаем вывод

Решение:

1.Рассмотрим функцию $f(x) = 2x^9 - x^5 + x - 2$, $D(f) = R$.

2. $f'(x) = 18x^8 - 5x^4 + 1$,

$f'(x) = 0,$

$18x^8 - 5x^4 + 1 = 0,$

$D = 25 - 72 = -47 < 0 =>$ корней нет,

$18x^8 - 5x^4 + 1 > 0$ на R.

Так как $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает на R.

3.Подбором находим $f(x) = 0$ при $x = 1$.

Так как функция возрастает на всей области определения, то ее график пересекает ось Ox лишь в одной точке (в точке $x = 1$). Правее этой точки график лежит ниже оси Ox.

Таким образом, решением неравенства $2x^9 - x^5 + x - 2 < 0$ являются $x \in (-\infty; 1)$.

Задача 3. Сравните числа e^π и π^e.

Анализ условия задачи и поиск решения	
Деятельность учителя	*Деятельность ученика*
К какому виду чисел относятся данные числа?	Эти числа иррациональные.
Можно ли вычислить приближенно значения данных чисел?	Нет, так как здесь иррациональное число нужно возвести в иррациональную степень.
Что общего у этих чисел? Чем они отличаются?	Оба числа имеют вид a^b и состоят из e и π. В них меняются местами показатель и основание степени.
Как мы можем избавиться от степеней?	Прологарифмировав оба числа по одному основанию.
Прологарифмируем числа по основанию e. Какие получатся числа?	$\pi * lne$ и $e * ln\pi$.
Изменится ли при этом знак	Нет. Так как мы логарифмируем по

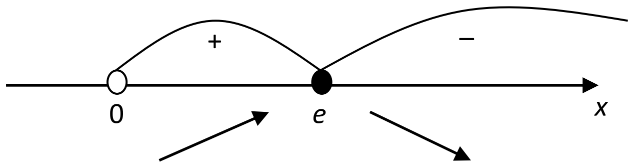
между числами? Почему?	основанию $e > 1$.
Можно ли еще изменить эти числа так, чтобы одно числовое выражение содержало только e, а другое – только π.	Разделим оба числа на $e * \pi$.
Изменится ли при этом знак между числами? Почему?	Нет. Так как мы делим на положительное число $e * \pi > 0$.
Какие числа мы получим?	Получим числа $\frac{lne}{e}$ и $\frac{ln\pi}{\pi}$.
Отличается ли знак между этими числами и исходными?	Нет.
Что общего у этих чисел? Чем они отличаются?	Оба имеют вид $\frac{lnx}{x}$. Одно выражение содержит вместо x e, другое – π.
Можно сравнить числа с помощью производной. С чего начинаем применение производной?	С рассмотрения функции.
Какую функцию можно рассмотреть в данной задаче?	$f(x) = \frac{lnx}{x}$.
Как можно изменить требование задачи, используя данную функцию?	Сравнить $f(e)$ и $f(\pi)$.
Как можно сравнить значения функции, если мы не можем вычислить их.	Определить возрастает или убывает функция на промежутке, содержащем e и π.
Как определить характер монотонности функции?	Исследовать ее с помощью производной.

Решение:

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{lnx}{x}$, $D(f) = (0; +\infty)$.

2. $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} * x - lnx * 1}{x^2} = \frac{1 - lnx}{x^2}$,

   $f'(x) = 0$ при $x = e$.



Функция возрастает $(0; e]$, убывает $[e; +\infty)$.

3. Числа e и π принадлежат промежутку $[e; +\infty)$, на котором функция убывает, значит, из $e < \pi$ следует $f(e) > f(\pi)$.

   Таким образом, $\frac{lne}{e} > \frac{ln\pi}{\pi}$ и $e^{\pi} > \pi^{e}$.

Самостоятельная работа:

1 уровень	*2 уровень*
1. Докажите основное тригонометрическое тождество, используя производную: $sin^2x + cos^2x = 1$. 2. Решите неравенство: $x^3 + 4x - 5 > 0$.	1. Докажите тождество $sin^4x + \frac{1}{2}cos2x - \frac{1}{8}cos4x = \frac{3}{8}$. 2. Найдите область определения функции $y = \sqrt{1 - lnx - x}$.

2.3. Апробация разработанных материалов курса

Фрагменты разработанного элективного курса апробировались в ходе проведения занятий на учащихся 11 класса муниципального автономного общеобразовательного учреждения «Гимназия № 10» г. Перми.

Было проведено 3 урока по темам:

1. Применение производной при решении уравнений.
2. Применение производной при доказательстве неравенств.
3. Применение производной при решении неравенств.

При этом использовались различные формы проведения занятий: лекция, проблемно-развивающие задачи, выполнение самостоятельных заданий.

Основные задачи проведения апробации:

- проверить правильность отбора содержания материала и системы упражнений;
- определить эффективность усвоения материала посредством самостоятельной работы;
- выявить заинтересованность учащихся в изучении данной темы.

В конце последнего занятия учащимся была предложена самостоятельная работа. Ее содержание включало 3 задачи на решение уравнений и неравенств. Ниже приведена диаграмма результатов самостоятельной работы.

Результаты показали, что работы выполнены успешно. Учащихся, не справившихся полностью с этой самостоятельной работой, нет. Были сформированы умения решать уравнения и неравенства с применением производной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Элективные курсы представляют собой новейший механизм дифференциации и индивидуализации процесса обучения. Их введение позволит учащимся определить свою программу обучения и получить образование с углублением в любую область знаний, выбранную самим учеником.

В процессе написания выпускной квалификационной работы:

1) проанализированы три учебника, предусмотренные Федеральным перечнем учебников по математике для 10-11 классов, с точки зрения представления темы «Производная»;
2) изучена литература, в которой описаны психолого-педагогические и методические условия создания и проведения элективных курсов, положения об элективных курсах в школе;
3) разработан элективный курс «Решение уравнений и неравенств с помощью производной», который включает в себя программу с обоснованием актуальности, описание форм организации учебного процесса, требования к результатам усвоения школьниками учебного материала и содержание тем курса, календарно-тематический план;
4) разработаны материалы для проведения занятий курса, включающие сценарий деловой игры «Эта многогранная производная» и фрагменты трех уроков;
5) подобраны 19 вариантов заданий для работы на элективном курсе по темам: решение уравнений с помощью производной (использование монотонности функции; использование наибольшего и наименьшего значений функций) и решение и доказательство неравенств с помощью производной (исследование функции на монотонность и экстремум; применение основных теорем дифференциального исчисления);
6) проведена апробация разработанных материалов элективного курса среди учащихся 11 класса.

Гипотеза, выдвинутая в начале исследования о том, что умение применять необходимые свойства производной при решении уравнений и неравенств позволит учащимся выбирать наиболее рациональный способ решения, получила положительное подтверждение в ходе апробации. Из-за недостатка времени не удалось получить точные статистические результаты о том, какова эффективность изучения темы «Применение производной при решении уравнений и неравенств».

Таким образом, материалы исследования могут быть использованы в практике обучения алгебре и началам анализа в средней школе, при обучении математическому анализу студентов математического факультета педвуза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алимов Ш.А.* Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и профил. уровни / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачев и др. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 463 с.

2. *Бродский Я.С.* Производная и интеграл в неравенствах, уравнениях, тождествах / Я.С. Бродский, А.К. Слипенко. – М.: Наука, 2003. – 120 с.

3. *Вавилов В.В.* Задачи по математике. Уравнения и неравенства / В.В. Вавилов, И.И. Мельников и др. – М.: Наука, 1997. – 432 с.

4. *Виноградова Л.В.* Методика преподавания в средней школе: учебное пособие / Л.В. Виноградова. – Ростов: Феникс, 2005. – 213 с.

5. *Данко П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие для вузов. Ч.1 / П.Е. Данко. – М.: ОНИКС, 2006. – 304 с.

6. *Данко П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие для вузов. Ч.2 / П.Е. Данко. – М.: ОНИКС, 2006. – 415 с.

7. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие / Б.П. Демидович. – 13-е изд., испр. – М.: Моск. ун-т, ЧеРо, 2001. – 624 с.

8. *Дорофеев Г.М.* Применение производных при решении задач в школьном курсе математики / Г.М. Дорофеев. – М.: Математика в школе, 2005. – 30 с.

9. *Ермаков В.И.* Сборник задач по высшей математике. Учебное пособие / В.И. Ермаков. – М.: ИНФА-М, 2006. – 575 с.

10. *Звавич Л.И.* Алгебра и начала анализа. 8 – 11 кл.: Пособие для школ и классов с углубл. изучением математики / Л.И. Звавич и др. – М.: Дрофа, 2004. – 352 с.

11. *Колмогоров А.Н.* Алгебра и начала анализа: 10-11 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Н. Колмогоров и др.; под ред. А.Н. Колмогорова. 15-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 384 с.

12. *Колягин Ю.М.* Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учебник для общеобразоват. учреждений / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин; под ред. А.Б. Жижченко. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2013. – 336 с.

13. *Концепция профильного обучения* на старшей ступени общего образования // Стандарты и мониторинг в образовании [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://suvagcentr.ru/userfiles/files/links/konz_prof.pdf (дата обращения 13.03.2018).

14. *Крутихина М. В.* Элективные курсы: учебно-методические рекомендации / М. В. Крутихина, З. В. Шилова. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2006. – 40с.

15. *Кудрявцев Л.Д.* Современная математика и ее преподавание / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Наука, 2001. – 170 с.

16. *Кузнецова И.В.* Элементы высшей алгебры и методика их изучения на факультативных занятиях в средней школе: дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / И.В. Кузнецова. – М.: 2000. – 136 с.

17. *Мигина Л.* Решение уравнений с применением оригинальных приемов / Л. Мигина – Пенза: Первое сентября, 2001. – с. 29.

18. *Мордкович А.Г.* Беседы с учителями математики: концептуальная методика, рекомендации, советы, замечания. Обучение через задачи / А.Г. Мордкович. – М.: Школа-Пресс, 2009. – 272 с.

19. *Мышкис А.Д.* О прикладной направленности школьного курса элементов математического анализа / А.Д. Мышкис. – Математика в школе, 1990. – 11 с.

20. *Никольский С.М.* Алгебра и начала анализа: учебн. для 11 класса. / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2014. – 448 с.

21. *Ованесов Н.Г.* Основные понятия математического анализа и методика их изучения в средней школе и педагогическом институте / Н.Г. Ованесов. – Астрахань, 2006. – 157 с.

22. *Олехник С. Н.* Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. 10-11 классы: учебно-методическое пособие / С. Н. Олехник. – М.: Дрофа, 2004. – 192 с.

23. *Персональный сайт* учителя математики и информатики Зайцевой И.П. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.zaitsevairina.ru (дата обращения 10.02.2018).

24. *Платов В.Я.* Деловые игры: разработка, организация и проведение: Учебник. / В.Я. Платов. – М.: Профиздат, 2001. – 156 с.

25. *Предпрофильная подготовка* в школе [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://shelab2.narod.ru/elektiv.html (дата обращения 28.01.2018).

26. *Приказ* Министерства образования и науки Российской Федерации от 6 октября 2009 года №413 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://минобрнауки.рф/документы/2365/файл/736/приказ%20Об%20утверждении%20413.rtf (дата обращения 05.12.2017).

27. *Приказ МОиН РФ* № 459 от 21 апреля 2016 «О внесении изменений в порядок формирования федерального перечня учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования, утвержденный приказом министерства образования и науки Российской Федерации № 253 от 31 марта 2014г.» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: минобрнауки.рф/документы/8209 (дата обращения 17.03.2017).

28. *Прикладные задачи* математического анализа в профильной школе: учебно-методическое пособие. Для специальности 050201.65 – «Математика с дополнительной специальностью «Информатика», направление подготовки 050100 – «Педагогическое образование», профиль подготовки – «Математика. Информатика» / автор-составитель Е.Л. Черемных; Перм. гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2012. – 64 с.

29. *Программы* для общеобразовательных школ, гимназий, лицеев. Математика. 5-11 классы / Сост. Г. М. Кузнецова, Н. Г. Миндюк. - М.: Дрофа. – 2004. – 320 с.

30. *Саакян С. М.* Задачи по алгебре и началам анализа: пособие для учащихся 10-11 классов общеобразовательных учреждений / С. М.. Саакян. – 4-е издание. – М.: Просвещение, 2003. – 286 с.

31. *Сачкова Л. А.* Информационно-методическое сопровождение инновационной деятельности педагогов в муниципальной системе образования: канд. пед. наук: 13.00.08 / Л.А. Сачкова. – Нижний Новгород, 2011. – 315 с.

32. *Седракян Н. М.* Неравенства. Методы доказательства / Н.М. Седракян, А.М. Авоян. – М.: Физматлит, 2002. – 98 с.

33. *Синько Т.П.* Элективные курсы // Наука. Образование. Культура [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.den-zadnem.ru/page.php?article=34 (дата обращения 11.02.2018).

34. *Синько Т.П.* Элективные курсы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://rushkolnik.ru/docs/index-39822586.html (дата обращения 12.02.2018).

35. *Федеральный государственный образовательный стандарт* среднего общего образования (утвержден приказом Минобрнауки России от 17 мая 2012г. № 413). - Режим доступа: https://минобрнауки.рф/документы/2365 (дата обращения 15.05.2017).

36. *Федеральный закон* № 273-ФЗ от 29.12.2012 «Об образовании в Российской Федерации» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: минобрнауки.рф/документы/1249 (дата обращения 23.05.2017).

37. *Шандер В. Н.* Уравнения и неравенства. Методические разработки для учащихся ВЗМШ / В. Н. Шандер. – М.: изд. РАО, 1992. – 67 с.

38. *Шарыгин И. Ф.* Факультативный курс по математике: решение задач: учебное пособие для 11 класса средней школы / И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев. – М.: Просвещение, 1991. – 384 с.

39. *Якиманская И.С.* Разработка технологии личностно-ориентированного обучения / И.С. Якиманская // Вопросы психологии. – №2, 1995. – 42 с.