

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. Теоретические основы изучения неопределенного интеграла в средней школе	6
1.1 Представление темы «Неопределенный интеграл» в школьных учебниках и пособиях.....	6
1.2 Методические подходы к изучению неопределенного интеграла с учетом требований ФГОС	14
1.3 Особенности профильного обучения в 10-11 классах	22
ГЛАВА 2. Методические рекомендации по изучению неопределенного интеграла в профильной школе	24
2.1 Введение понятия неопределенного интеграла.....	24
2.2 Изучение свойств неопределенного интеграла.....	27
2.3 Обучение простейшим методам интегрирования.....	29
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	37
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	39

ВВЕДЕНИЕ

Одной из тем школьного курса математики, которая вызывает много споров, является «Неопределенный интеграл». Интеграл ввели в школьную программу в связи с реформами образования конца 60-х – начала 70-х годов XX века. Специфика рассуждений, свойственная математическому анализу, привносит диалектичность в мышление учащегося, способствует формированию представлений о математике как развивающейся науке, позволяет учащимся совершить следующий шаг в обобщении полученных ими знаний из курса элементарной математики, а также открывает перспективу дальнейшего расширения имеющихся знаний. Все это способствует формированию качеств мышления, необходимых в настоящее время каждому образованному человеку, и отвечает социальным требованиям модернизации российского образования.

Однако практика показывает, что трудности, возникающие при изучении этой темы в профильной школе, сохраняются. Причины трудностей – высокий уровень абстракции понятий, сложная логическая структура их определений, недостаточность времени для осмысления сложных вопросов.

Цель работы – разработать методические рекомендации по изучению неопределенного интеграла в профильной школе.

Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

- проанализировать математическую, учебную литературу по теме исследования;
- показать представление темы «Неопределенный интеграл» в школьных учебниках и пособиях;
- рассмотреть методические особенности изучения неопределенного интеграла с учетом требований ФГОС;
- показать особенности профильного обучения в 10-11 классах;
- составить фрагмент урока на введение понятия неопределенного интеграла;

- показать методические особенности изучения свойств неопределенного интеграла;
- разработать задания на обучение простейшим приемам интегрирования.

Объект исследования – изучение неопределенного интеграла в средней школе.

Предмет исследования – методические особенности изучения неопределенного интеграла в профильной школе.

Работа насчитывает 40 страниц, состоит из введения, двух глав, заключения, библиографического списка, содержащего 20 источников.

В первой главе представлены теоретические сведения о неопределенном интеграле, рассмотрены методические подходы к изучению неопределенного интеграла с учетом требований ФГОС, а также особенности профильного обучения в 10-11 классах

Во второй главе приведены методические рекомендации по изучению неопределенного интеграла в профильной школе, разработан фрагмент урока на введение понятия неопределенного интеграла, рассмотрены методические особенности изучения свойств неопределенного интеграла, а также разработаны задания на обучение простейшим методам интегрирования.

Фрагмент урока и все составленные задания способствуют формированию определенных УУД, которые ранее описаны в первой главе. Это связано с тем, что приоритетным направлением новых образовательных стандартов становится реализация развивающего потенциала общего среднего образования, актуальной и новой задачей становится обеспечение развития универсальных учебных действий как собственно психологической составляющей фундаментального ядра содержания образования наряду с традиционным изложением предметного содержания конкретных дисциплин. Базовым положением служит тезис о том, что развитие личности в системе образования обеспечивается, прежде всего, формированием универсальных учебных действий (УУД), которые выступают в качестве основы образовательного и воспитательного процесса.

В заключении оценены результаты и сформулированы выводы.

ГЛАВА 1. Теоретические основы изучения неопределенного интеграла в средней школе

1.1 Представление темы «Неопределенный интеграл» в школьных учебниках и пособиях

Математическое образование при углубленном обучении в старших классах складывается из следующих содержательных компонентов: алгебра и начала математического анализа; геометрия; элементы комбинаторики, теории вероятностей, статистики. Эти содержательные компоненты, развиваясь на протяжении всех лет обучения, естественным образом переплетаются и взаимодействуют в учебных курсах.

Алгебра и начала математического анализа нацелены на формирование математического аппарата для решения задач математики, смежных предметов, окружающей реальности. Язык алгебры подчеркивает значение математики как языка для построения математических моделей, процессов и явлений реального мира. Одной из основных задач изучения алгебры и начал анализа является развитие алгоритмического мышления, необходимого, в частности, для освоения курса информатики; овладение навыками дедуктивных рассуждений. Преобразование символических форм вносит свой специфический вклад в развитие воображения, способностей к математическому творчеству. Другой важной задачей изучения алгебры является получение школьниками конкретных знаний о функциях как важнейшей математической модели для описания и исследования разнообразных процессов (равномерных, равноускоренных, экспоненциальных, периодических и др.), для формирования у учащихся представлений о роли математики в развитии цивилизации и культуры [11].

Раздел «Математический анализ» представлен тремя основными темами: это элементарные функции, производная и интеграл. Содержание этого раздела нацелено на получение школьниками конкретных знаний о

функции как важнейшей модели описания и исследования разнообразных реальных процессов. Изучение степенных, показательных, логарифмических и тригонометрических функций продолжает линию знакомства учащихся с основными элементарными функциями, начатую в основной школе.

Темы «Производная» и «Интеграл» содержат традиционно трудные вопросы для школьников, даже для тех, кто выбрал изучение математики на профильном уровне, поэтому ее изложение предполагает опору на геометрическую наглядность и на естественную интуицию учащихся, – более чем на строгие определения. Тем не менее, знакомство с этим материалом дает представление учащимся об общих идеях и методах математической науки.

Проведем сравнительный анализ учебников старшей общеобразовательной школы на предмет изучения понятия неопределенного интеграла. Результаты анализа представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Школьные учебники	Тема «Первообразная и интеграл»
Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Учебник для общеобразовательных учреждений: базовый уровень.	Первообразная: понятие первообразной, таблица первообразных, правила нахождения первообразных. Определенный интеграл: задачи, приводящие к понятию определенного интеграла, понятие определенного интеграла, формула Ньютона-Лейбница, вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла. Понятие неопределенного интеграла

	не вводится.
Коллягин Ю.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни.	Первообразная: понятие первообразной, таблица первообразных, правила нахождения первообразных, площадь криволинейной трапеции. Интеграл и его вычисление: понятие определенного интеграла, формула Ньютона-Лейбница, вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла, применение интегралов для решения физических задач. Простейшие дифференциальные уравнения. Понятие неопределенного интеграла не вводится.
Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни.	Первообразная и неопределенный интеграл: определение первообразной, таблица первообразных, правила отыскания первообразных, понятие неопределенного интеграла, таблица основных неопределенных интегралов, правила интегрирования. Определенный интеграл: задачи, приводящие к понятию определенного интеграла, понятие определенного интеграла, формула

	Ньютона-Лейбница, вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.
Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни.	Первообразная и неопределенный интеграл: определение первообразной, таблица первообразных, правила отыскания первообразных, понятие неопределенного интеграла, свойства неопределенного интеграла, таблица основных неопределенных интегралов, правила интегрирования, метод замены переменной, интегрирование по частям. Определенный интеграл: понятие определенного интеграла, приближенное вычисление определенного интеграла, формула Ньютона-Лейбница, свойства определенного интеграла, применение определенных интегралов в геометрических и физических задачах. Понятие дифференциального уравнения, задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Таким образом, можно сделать вывод: неопределенный интеграл в учебниках базового уровня не рассматривается. По нашему мнению, в учебнике А.Г. Мордковича (базовый и профильный уровни) теоретический

материал по введению понятий математического анализа предложен на доступном уровне, ученики могут самостоятельно знакомиться с материалом, разбирать примеры, которые предложены в учебники, и опираясь на них решать задачи, предлагаемые в задачнике. Задачи предложены разноуровневые и в достаточно большом количестве, решать которые в полном объеме просто не хватает времени. С другой стороны, у учителя всегда есть возможность дополнительно позаниматься со школьниками или наиболее успешным по математике школьникам предложить дополнительную работу на уроке и в домашнем задании.

Понятие неопределенного интеграла наиболее подробно рассмотрено в учебнике С.М. Никольского. Взяв за основу этот учебник, раскроем понятие неопределенного интеграла.

Рассмотрим функцию $f(x)$, непрерывную на интервале $(a; b)$. Функцию $F(x)$ называют первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если на нем производная функции F равна f : $F'(x) = f(x)$.

Очевидно, что если функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, а C – фиксированная постоянная, то функция $F(x) + C$ также есть первообразная для функции $f(x)$ на том же интервале, потому что $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

Обратно, если F и G – первообразные для функции f на интервале $(a; b)$ на некоторую постоянную C : $F(x) = G(x) + C$.

Если функция $F(x)$ есть какая-либо первообразная для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, то и функция $F(x) + C$, где C – некоторая постоянная, также есть первообразная для функции $f(x)$ на этом интервале.

Неопределенным интегралом от непрерывной на интервале $(a; b)$ функции $f(x)$ называют некоторую ее первообразную. Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ обозначают так: $\int f(x) dx$. В этой записи функцию $f(x)$

называют подынтегральной функцией, а выражение $\int f(x) dx$ – подынтегральным выражением. Отсюда следует, что если функция $F(x)$ есть

какая-то первообразная для функции на интервале $(a;b)$, то
 $\int_a^b f(x) dx = C$, где C – некоторая постоянная [16, с. 168].

Если функция $f(x)$ есть первообразная для функции $g(x)$ на интервале $(a;b)$, то для $\int_a^b g(x) dx$ справедливо равенство
 $\int_a^b g(x) dx = f(b) - f(a)$, где C – некоторая постоянная. В самом деле,

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

Если $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные на интервале $(a;b)$ функции и C – постоянные, то имеет место равенство, выражающее основное свойство неопределенного интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx = C$$

некоторая постоянная.

Данное свойство по индукции распространяется на любое конечное число непрерывных на интервале функций и постоянных:

$$,$$

где C – некоторая постоянная.

Как следствие при $\int_a^b f(x) dx = C$ получаем равенства:

$$,$$

$$.$$

А при $\int_a^b f(x) dx = C$ – равенство: [16, с. 169].

Приведем таблицу основных неопределенных интегралов, составленную непосредственно из формул производных элементарных функций:

$$1. \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C ;$$

$$2. \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C ;$$

$$3. \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C ;$$

4. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$;
5. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$;
6. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$;
7. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$;
8. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$;
9. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) \delta(x-a) dx$;
10. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) \delta(x-b) dx$;
11. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) \delta(x-a) \delta(x-b) dx$;
12. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) \delta(x-a) \delta(x-b) dx$ [16, с. 467].

При нахождении неопределенных интегралов нередко пользуются методом подстановки или замены переменной.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную, а функция $x = \varphi(t)$ – непрерывная функция, тогда $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$, где $t = \varphi^{-1}(x)$.

Эту формулу надо понимать так. Если подынтегральное выражение в неопределенном интеграле удалось представить в виде $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$, то в этом интеграле можно произвести замену переменной $x = \varphi(t)$, найти первообразную $F(t)$ для функции $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$, а затем заменить t на x .

Чтобы доказать формулу, найдем производную по x от ее левой части, а затем производную по x от $\int f(x) dx$, где $f(x) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$:

Так как производные равны, то первообразные отличаются на постоянную, что и требовалось доказать.

Приведем примеры на применение метода подстановки.

Пример 1.

Мы сделали подстановку $x = \sin t$, тогда $dx = \cos t dt$, и интеграл превратился в табличный.

Пример 2.

(подстановка $x = \cos t$, откуда $dx = -\sin t dt$ и $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные, тогда справедливо равенство $f'(x) = C g'(x)$, где C – некоторая постоянная.

Так как $f(x) = C g(x) + C_1$, то равенство можно записать так:

Доказательство: найдем производные

Так как производные равны, то первообразные отличаются только на постоянную, что и требовалось доказать.

Из равенства $f'(x) = C g'(x)$ получим:

где C – некоторая постоянная.

Нахождение интеграла с помощью данного равенства называют **интегрированием по частям**.

Приведем примеры применения метода интегрирования по частям.

Пример 1.

Пример 2.

$\int x \cos x dx = \sin x + C$, $\int x \sin x dx = -\cos x + C$ [16, с.173].

Учебник С.М. Никольского рассчитан на обучение на базовом и профильном уровнях, что позволяет успешно организовать работу с учащимися различного уровня подготовки. В целом, учебник написан доступным для учащихся языком, содержит большое количество примеров к

изучаемым формулам и основным задачам. Учебник содержит материал для дополнительного повторения.

1.2 Методические подходы к изучению неопределенного интеграла с учетом требований ФГОС

Начальные сведения об интегральном исчислении вводятся в 11 классе в курсе алгебры и начал анализа» в теме «Первообразная и интеграл».

Вместе с дифференциальным исчислением интегральное делает школьный курс логически стройным, шире, и глубже раскрывает значение математики для изучения других наук, способствует формированию у школьников диалектико-материалистического мировоззрения, облегчает изучение некоторых вопросов физики, геометрии.

Интегральное исчисление повышает научный уровень всего курса, помогает привести его по возможности в соответствие с современным состоянием науки, повышает математическую культуру выпускников школы.

Цель изучения данной темы – познакомить учащихся с интегрированием как операцией, обратной дифференцированию, показать применение интеграла к решению геометрических задач.

Данная тема включает в себя следующие вопросы: первообразная, основное свойство первообразной, три правила нахождения первообразных, площадь криволинейной трапеции, интеграл, формула Ньютона-Лейбница, применение интеграла[19].

В учебно-методической литературе наметились два основных подхода построения теории интегралов:

Первый подход: На основе решения конкретных задач вводятся понятия интегральной суммы и определенного интеграла, рассматриваются некоторые его свойства и теорема существования. Далее доказывается, что производная определенного интеграла с переменным верхним пределом равна значению подинтегральной функции от верхнего предела. Вводится понятие первообразной, неопределенного интеграла и получают формулу

Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла. Заканчивают изложение применением интегрального исчисления к решению задач.

Второй подход: Сначала вводятся понятия первообразной функции непрерывной на интервале, ее основного свойства и правил нахождения первообразных. Далее вводится понятие неопределенного интеграла, рассматриваются его свойства и основные методы вычисления (непосредственное интегрирование с использованием таблицы первообразных и правил их вычисления, метод замены переменной (подстановки) и метод интегрирования по частям), составляется таблица основных интегралов. Затем вводят понятие определенного интеграла (или как предела интегральных сумм, или как приращения первообразной), рассматриваются свойства и способы вычисления интеграла (формула Ньютона–Лейбница, методы замены переменной и интегрирования по частям).

Школьный вариант расположен между ними, но ближе ко второму подходу.

Достоинства первого подхода – всестороннее выяснение идейного смысла определенного интеграла. Вначале изучения интегрального исчисления при решении различных задач учащиеся овладевают искусством перехода от равномерных к неравномерным процессам, составлением интегральных сумм и перехода от нее к интегралу.

Недостатки: Неоправданно большой разрыв во времени между введением понятия интеграла и его вычислением. Учащиеся сначала изучают задачи, приводящие к понятию интеграла, его свойства, только в конце темы занимаются непосредственным интегрированием. Это приводит к тому, что у них теряется интерес к изучению теории, а это влияет на отработку навыков решения задач.

Достоинства второго подхода:

- ранее ознакомление школьников с основной задачей интегрального исчисления – нахождением по данной функции $f(x)$ ее первообразной $F(x)$ и овладение аппаратом для решения;
- обеспечение возможности вычислять интегралы, следовательно, прививать им навыки интегрирования в ходе изучения темы;
- результатом является лучшая подготовленность к решению задач геометрии и физики.

Недостатки второго подхода: Определение определенного интеграла как приращения первообразной не позволяет полно раскрыть идейную сторону.

Перед изучением темы в 11 классе необходимо повторить предел функции, непрерывность и производную, физический и геометрический смысл производной. Целесообразно обратиться к таблице, в которой записаны функции и их производные, чтобы воспользоваться ею для отыскания функции, производная которой задана. Изучение новой темы можно начать с решения конкретных задач, в которых показывается, что произвольная постоянная имеет реальный смысл, учащиеся подводятся к определению первообразной, заполняется таблица первообразных. На первых порах правильность решения проверяется дифференцированием. Затем изучают основное свойство первообразной. Рассматриваются три правила нахождения первообразных, которые легко доказываются, опираясь на определение первообразной.

Следующим важным вопросом в данной теме является понятие криволинейной трапеции и нахождение ее площади. Перед его рассмотрением необходимо вспомнить все о площадях из геометрии и поставить проблему, как можно найти площадь произвольной фигуры Φ . Этот вопрос решается двояко:

1. Доказывается теорема о площади криволинейной трапеции: сначала вводится функция, затем доказывается, что она является первообразной.

2. Второй подход к нахождению площади криволинейной трапеции, образованной графиком непрерывной и неотрицательной функции и прямыми.

Применение интегралов рассматриваются при решении задач: на нахождение площади плоской фигуры; на вычисление пройденного пути за данный промежуток времени, на нахождение силы давления жидкости, работы переменной силы, на нахождение объемов тел.

Наиболее трудным является вопрос об объеме пирамиды. Возможны различные варианты:

- по учебнику А.В. Погорелова сначала доказываем равновеликость треугольных пирамид с равновеликими основаниями и равными высотами, затем доказываем, что наклонная треугольная призма состоит из трех равновеликих пирамид. В учебнике А.П. Киселева подход аналогичен предыдущему подходу, но при этом еще показывается, что за объем пирамиды принимается число, которое больше суммы объемов входящих призм и меньше суммы объемов выходящих призм. В учебном пособии Н.А. Глаголева – находится предел последовательности сумм объемов входящих призм при бесконечном возрастании их числа, этот предел и принимают за объем пирамиды;
- изложение этого вопроса с использованием интегрального исчисления.

Этот подход можно использовать и при выводе объема пирамиды, считая, что объем пирамиды существует и нужно доказать, что он является первообразной для функции $S(x)$. Методическая особенность такого подхода состоит в том, что вывод объема пирамиды является базовым доказательством, оно обслуживает и объемы фигур вращения [26].

Математическое образование в системе общего среднего образования занимает одно из ведущих мест, что определяется безусловной практической значимостью математики, ее возможностями в развитии мышления человека,

ее вкладом в создание представлений о научных методах познания действительности.

В соответствии с ФГОС основная образовательная программа среднего общего образования содержит обязательную часть и часть, формируемую участниками образовательного процесса. Обязательная часть основной образовательной программы среднего (полного) общего образования составляет 60%, а часть, формируемая участниками образовательного процесса, — 40% от общего объема содержательного раздела основной образовательной программы среднего общего образования в виде учебных курсов по выбору обучающихся в соответствии со спецификой и возможностями образовательного учреждения. Основная образовательная программа (ООП) среднего общего образования реализуется образовательным учреждением через урочную и внеурочную деятельность. В целях обеспечения индивидуальных потребностей, обучающихся основная образовательная программа среднего общего образования предусматривает программу развития универсальных учебных действий и внеурочную деятельность.

В соответствии с требованиями ФГОС к результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования содержание обучения должно быть направлено на достижение учащимися личностных, метапредметных результатов и предметных результатов по математике, что также отражено в предлагаемой программе [11].

Приоритетной целью школьного образования становится:

- развитие у учащихся способности самостоятельно ставить учебные цели;
- проектировать пути их реализации;
- контролировать и оценивать свои достижения.

Программа развития универсальных учебных действий основывается на положениях системно-деятельностного подхода, интегрирующего

достижения педагогической науки и практики, в том числе компетентностной и ЗУНовской парадигм образования.

Овладение УУД в конечном счете ведет к формированию способности самостоятельно успешно усваивать новые знания, овладевать умениями и компетентностями, включая самостоятельную организацию процесса усвоения, т.е. умение учиться ориентации учащихся как в различных предметных областях, так и в строении самой учебной деятельности, включая осознание учащимися ее целевой направленности, ценностно – смысловых и операциональных характеристик.

Таким образом, достижение «умения учиться» предполагает полноценное освоение всех компонентов учебной деятельности, которые включают:

- познавательные и учебные мотивы;
- учебную цель;
- учебную задачу;
- учебные действия и операции (ориентировка, преобразование материала, контроль и оценка).

Универсальные учебные действия выделяются на основе анализа характеристик учебной деятельности и процесса усвоения, а именно, в соответствии:

- со структурными компонентами целенаправленной учебной деятельности;
- с этапами процесса усвоения;
- с формой реализации учебной деятельности – в совместной деятельности и учебном сотрудничестве с учителем и сверстниками или самостоятельно.

Виды универсальных учебных действий:

- Личностные действия.
- Регулятивные действия.

- Познавательные универсальные действия.
- Коммуникативные действия.

Личностные действия обеспечивают ценностно-смысловую ориентацию учащихся: знание моральных норм, умение соотносить поступки и события с принятыми этическими принципами, умение выделять нравственный аспект поведения.

Регулятивные действия обеспечивают учащимся организацию их учебной деятельности: целеполагание как постановка учебной задачи на основе соотнесения того, что уже известно и усвоено учащимися, и того, что еще неизвестно; планирование – определение последовательности промежуточных целей с учетом конечного результата, составление плана и последовательности действий; прогнозирование – предвосхищение результата и уровня усвоения знаний, его временных характеристик; контроль – сличение способа действий и его результата с заданным эталоном с целью обнаружения отклонений и отличий от эталона; коррекция – внесение необходимых дополнений и корректив в план, и способ действия; оценка – осознание уровня и качества усвоения; саморегуляция как способность к мобилизации сил и энергии, к волевому усилию и к преодолению препятствий.

Познавательные универсальные действия: общеучебные, логические, постановка и решение проблемы.

Общеучебные универсальные действия: самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели; поиск и выделение необходимой информации; применение методов информационного поиска, в том числе с помощью компьютерных средств; структурирование знаний; осознанное и произвольное построение речевого высказывания в устной и письменной форме; выбор наиболее эффективных способов решения задачи в зависимости от конкретных условий; рефлексия способов и условий действия, контроль и оценка процесса и результатов деятельности.

Логические универсальные действия: анализ с целью выделения признаков (существенных, несущественных); синтез – составление целого из частей; сравнение с целью выявления черт сходства и черт различия, соответствия и несоответствия; выбор оснований и критериев для сравнения, классификации объектов; подведение под понятие, выведение следствий; установление причинно-следственных связей; построение логической цепи рассуждений; доказательство; выдвижение гипотез и их обоснование; постановка и решение проблемы (формулирование проблемы; самостоятельное создание способов решения проблемы творческого и поискового характера).

Коммуникативные действия обеспечивают социальную компетентность и учет позиции других людей, партнеров по общению или деятельности; умение слушать и вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении проблем; интегрироваться в группу сверстников и строить продуктивное взаимодействие и сотрудничество со сверстниками и взрослыми. К коммуникативным действиям относятся:

- планирование учебного сотрудничества с учителем и со сверстниками, определение цели, функций участников, способов взаимодействия;
- постановка вопросов;
- разрешение конфликтов;
- управление поведением партнера, контроль, коррекция, оценка его действий;
- умение полно и точно выражать свои мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации [24].

1.3 Особенности профильного обучения в 10-11 классах

Одним из приоритетных направлений современной отечественной образовательной политики является создание системы предпрофильного и профильного обучения в старших классах общеобразовательной школы.

Профильное обучение – средство дифференциации и индивидуализации обучения, позволяющее за счет изменений в структуре, содержании и организации образовательного процесса более полно учитывать интересы, склонности и способности учащихся, создавать условия для обучения старшеклассников в соответствии с их профессиональными интересами и намерениями в отношении продолжения образования [25].

Профиль обучения – это сложившийся тип подготовки в той или иной области знаний в зависимости от возможностей и особенностей, а также желаний и потребностей обучающихся.

Именно выбранный профиль (например, социально-экономический или физико-математический) определяет цели и содержание обучения. Профильный курс отличается от общеобразовательного курса своей профессиональной направленностью и более углублённым изучением профильных предметов. Содержание образования в случае профильного обучения ориентировано на будущее профессиональное образование и на будущую профессиональную деятельность обучающегося.

Профильное обучение направлено на реализацию личностно-ориентированного учебного процесса. При этом существенно расширяются возможности выстраивания учеником индивидуальной образовательной траектории.

Профильная подготовка ориентирована на индивидуализацию обучения и социализацию обучающихся. Правильный выбор профиля позволяет получать образование практически, на основе индивидуальных учебных планов и программ, повысить мотивацию обучения, подготовиться к поступлению в ведущие вузы [29].

Введение профильного обучения изначально направлено на повышение способности будущего выпускника к самостоятельным действиям на рынке образовательных услуг, конструированию своего образовательного маршрута.

Основные цели системы профильного обучения:

- обеспечить углубленное изучение отдельных предметов программы полного общего образования;
- создать условия для существенной дифференциации содержания обучения старшеклассников с широкими и гибкими возможностями построения школьниками индивидуальных образовательных программ;
- способствовать установлению равного доступа к полноценному образованию разным категориям обучающихся в соответствии с их способностями, индивидуальными склонностями и потребностями;
- расширить возможности социализации учащихся, обеспечить преемственность между общим и профессиональным образованием, более эффективно подготовить выпускников школы к освоению программ высшего профессионального образования [25].

Правильный выбор профиля и профильное обучение в старших классах позволяет значительно упростить и ускорить карьерный рост в будущем.

Обучение в 10-11 профильных классах ведется в соответствии с базисным учебным планом: программы по всем предметам предусматривают два уровня обучения – базовый и профильный. Профильный уровень изучения предметов также дополняется профильными спецкурсами.

Учащиеся выбирают профиль обучения в 10-11 классах в соответствии с собственными интересами, склонностями и возможностями, а также в соответствии с теми предметами, вступительные испытания по которым необходимо сдавать при поступлении в вузы.

ГЛАВА 2. Методические рекомендации по изучению неопределенного интеграла в профильной школе

2.1 Введение понятия неопределенного интеграла

Целью изучения математического анализа (в том числе интегрального исчисления) в общеобразовательной школе является:

- овладение основными понятиями (в частности, понятием интеграла);
- обучение решению простейших задач на применение начал анализа в других школьных дисциплинах, в практике.

Поскольку дифференцирование и интегрирование, взаимно обратные операции, то на этапе актуализации знаний необходимо повторить определение производной, первообразной, правила отыскания первообразных. Также необходимо напомнить о том, что задача отыскания первообразной для заданной функции имеет не одно решение.

Далее целесообразно предложить ребятам решить физическую задачу определения скорости неравномерного движения. Термин «скорость» используют в науке и в широком смысле, понимая под ним быстроту изменения какой-либо величины в зависимости от другой. Так, например, говорят об угловой скорости, скорости изменения температуры, скорости химической реакции, групповой скорости, скорости соединения и т. д.

Задача: Задан закон зависимости скорости от времени $v(t) = 2t^2 + 3t + 1$.
Найти закон движения $s(t)$, если известно, что в момент времени $t = 0$ координата точки равнялась числу 1,5 (то есть $s(0) = 1,5$).

Решение: Так как скорость – производная координаты как функции от времени, то прежде всего нужно найти первообразную для скорости, то есть первообразную для функции $v(t) = 2t^2 + 3t + 1$. Одной из таких первообразных является функция $s(t) = \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + t + C$ – то есть $s(t) = \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + t + C$, а все первообразные имеют вид: $s(t) = \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + t + C$. Чтобы найти значение постоянной C , воспользуемся начальными условиями, согласно которым

, получим: Подставив найденное значение в , получим закон движения .

Рассмотрим функцию . Среди предложенных функций выберите первообразные для заданной функции:

1. —
2. — -
3. — -
4. —;
5. —.

Итак, производные для функции представлены под номерами 1,3,4,5. Учащиеся делают вывод: если для данной функции существует первообразная, то эта первообразная не является единственной.

В общем случае можем сказать, что функция имеет множество первообразных . называют семейством первообразных для функции .

Определение: Если функция имеет на промежутке X первообразную , то множество всех первообразных, то есть множество , называют неопределенным интегралом от функции и обозначают .

Читают: неопределенный интеграл $\mathcal{F}$ от x дэ x .

В этой записи функцию называют подынтегральной функцией, а выражение — подынтегральным выражением.

Опираясь на таблицу первообразных, учащиеся совместно с учителем составляют таблицу основных интегралов.

Задание: заполните пропуски.

Функция	Первообразная	Интеграл
---------	---------------	----------

1	x	
	—	
—		—
—		—
—		—
	—	

При формировании основного понятия «интеграл» необходимо учитывать, что оно даётся в достаточно общей, абстрактной форме. Потому, главная трудность состоит в конкретизации, т. е. в умении видеть за математическими терминами и их определениями конкретные образы. Здесь большую помощь ученику должны оказать хорошо подобранные примеры.

Помимо знания определения понятия ученик должен, иметь о них зрительное представление (например, определенный интеграл - перемещение точки за промежуток времени). Этому способствует решение задач.

Обеспечить прикладную направленность можно за счет разнообразия системы задач – включением прикладных задач, содержание которых отвечает профилю обучения. Таким образом, в теме «Первообразная и интеграл» стало возможным, кроме физического и геометрического,

раскрыть химический, биологический, экономический и другой смысл математических понятий.

Решение задач способствует лучшему пониманию и усвоению теоретического материала. Использование физических задач для изучения интеграла в школьном курсе алгебры и начал анализа позволять сформировать наглядные образы изучаемого понятия, повысить осознанность усвоения темы. Учителю необходимо регулярно осуществлять и подчеркивать связь математики и других наук как в ходе изучения темы «Интеграл», так и при решении прикладных задач.

2.2 Изучение свойств неопределенного интеграла

При нахождении неопределенных интегралов, как и при отыскании производных и первообразных используются не только формулы, но и некоторые свойства. Свойства неопределенного интеграла непосредственно связаны с соответствующими свойствами первообразных. Организовать работу по изучению свойств неопределенного интеграла можно посредством обучающей групповой самостоятельной работы. То есть мы делаем акцент на формировании познавательных и коммуникативных универсальных учебных действий.

Групповая работа регулирует сотрудничество учащихся и добивается этим не только дидактических, но и воспитательных целей. В малой группе учащийся находится в более благоприятных условиях в отношении возможности действовать в соответствии со своей индивидуальностью. В беседе внутри малой группы он может высказать свое мнение, активнее участвовать в решении задач.

После актуализации знаний по свойствам первообразных, учащиеся приступают к выполнению заданий в 3 группах. Задание для всех групп одинаковое.

Задание: Заполните пропуски.

Свойства первообразных	Свойства интегралов
1. Первообразная суммы равна сумме первообразных.	1. Интеграл от суммы функций _____ _____.
2. Если _____ – первообразная для _____, то _____ – первообразная для _____.	2. Постоянный множитель можно _____.
3. Если _____ – первообразная для функции _____, то первообразной для функции _____ служит функция _____ – _____.	3. Если _____ – первообразная для функции _____, то _____.

После выполнения задания представитель каждой группы выступает у доски, остальные проверяют, вносят коррективы. В итоге учащиеся познакомятся с тремя свойствами неопределенного интеграла.

1 свойство: Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов этих функций: _____.

2 свойство: Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла. _____.

3 свойство: Если _____, то _____.

Один из стимулов умственной деятельности – это удовлетворение от проделанной работы. Сознание того, что ты что – то можешь сделать сам и даже помочь другому, – одно из условий, которое вызывает чувство удовлетворения. В этом – одно из значений данной самостоятельной работы.

Каждая самостоятельная работа по изучению нового материала должна обязательно завершаться проверкой понимания изученного. В процессе обсуждения необходимо подвести итоги, сделать необходимые

выводы. Очень важно, чтоб самостоятельно изученный на уроке материал был и закреплён здесь же.

На этапе закрепления можно предложить выполнить следующее задание:

Вычислите интеграл и опишите, какие свойства неопределённого интеграла вы применили:

а) $\int \dots dx$;

б) $\int \dots dx$

в) $\int \dots dx = \dots$

г) $\int \dots dx = \dots$.

2.3 Обучение простейшим методам интегрирования

При рассмотрении понятия интеграла в школах с углублённым изучением математики возможно также и обучение простейшим методам интегрирования.

Учителю в своей работе необходимо учитывать факторы, влияющие на успешность обучения.

Во-первых, следует тщательно отбирать теоретический материал, сочетая научность и доступность изложения. И хотя полностью реализовать принцип научности при изучении интеграла не удастся, у учащихся все же формируются правильные представления о процессе познания и его закономерностях.

Содержание, формы и методы обучения должны учитывать реальные возможности учащихся, но, тем не менее, иметь достаточно высокий уровень трудности.

Во-вторых, необходимо учитывать общий уровень математической подготовки учащихся, особенности их мышления и восприятия и, в соответствие с этим, выбирать тот или иной путь изложения материала.

В-третьих, важную роль играет систематичность и последовательность в обучении.

Стройное, логичное изложение теоретического материала, а также хорошо подобранная система упражнений способствует развитию мышления, памяти, внимания и речи учащихся, формирует такие специальные качества, как умение строить математические модели реальных процессов и явлений, исследовать и изучать их.

Систему упражнений нужно строить так, чтобы способствовать усвоению основных понятий, активизировать мыслительную деятельность учащихся и постоянно поддерживать их интерес к уроку. Иначе говоря, необходимо формировать у учащихся универсальные учебные действия.

Приведем ряд заданий на обучение простейшим методам интегрирования, при выполнении которых формируются определенные УУД.

Регулятивные учебные действия обеспечивают возможность управления познавательной и учебной деятельностью посредством постановки целей, планирования, контроля, коррекции своих действий, оценки успешности усвоения.

В соответствие с профилем, можно подобрать задания следующего типа. Например, для гуманитарного направления:

- Диспут.
- Поиск информации в предложенных источниках.

Для естественно-математического направления:

- Взаимоконтроль.
- «Ищу ошибку».
- Контрольный опрос на определенную проблему.

Задание № 1: «Ищу ошибки».

Цель: ученик самостоятельно учится определять цель своей деятельности, планировать её самостоятельно двигаться по заданному плану, оценивать и корректировать полученный результат.

Форма выполнения задания: работа индивидуальная с последующей проверкой и коллективным обсуждением.

Описание задания: В задании надо найти ошибку в решении, объяснить на какое правило она допущена, предложить правильное решение.

1) — .

Правильное решение: — .

2) — — .

Правильное решение: — — — .

Задание № 2.

Цель: формирование положительного отношения к процессу познания, мотивация учения, выработка навыков контроля и самоконтроля.

Форма выполнения задания: работа индивидуальная.

Описание задания:

Ученик сам выбирает задание, соответствующее уровню знаний.

Первый уровень (на отметку «3»): используя таблицу основных интегралов, найти следующие интегралы:

а) —

б) — .

Второй уровень (на отметку «4»):

а) используя таблицу основных интегралов, найти интеграл:

$$\frac{-}{-} \frac{-}{-} ;$$

б) применяя указанные подстановки, найти интеграл: — — —

Третий уровень (на отметку «5»):

а) применяя формулу интегрирования по частям, найти интеграл:

б) найти интеграл: $\int \frac{1}{x^2} dx$

Коммуникативные учебные действия обеспечивают возможности сотрудничества: умение слышать, слушать и понимать партнера, планировать и согласованно выполнять совместную деятельность, распределять роли, взаимно контролировать действия друг друга, уметь договариваться, вести дискуссию, правильно выражать свои мысли, оказывать поддержку друг другу и эффективно сотрудничать как с учителем, так и со сверстниками.

Можно подобрать задания следующего типа:

- Составь задание партнеру.
- Отзыв на работу товарища.
- Групповая работа.
- «Подготовь рассказ на тему...».
- «Объясни ...»

Задание № 1:

Цель: формирование коммуникативных действий, направленных на структурирование информации по данной теме, умение сотрудничать в процессе создания общего продукта совместной деятельности.

Форма выполнения задания: работа в группах.

Описание задания: учащимся, предварительно поделенным на группы, предлагается выполнить задания на карточках:

1. Какие свойства неопределенного интеграла следует применить, решая следующий интеграл?

$$\int \frac{1}{x^2} dx$$

2. Применяя указанные подстановки, найти интеграл:

$$\int \frac{1}{x^2} dx$$

3. Применяя формулу интегрирования по частям, найти интеграл:

Задание № 2: «Составь задание партнеру»

Цель: формирование коммуникативных действий, направленных на умение сотрудничать в процессе обучения (закрепления материала).

Форма выполнения задания: работа в парах

Описание задания: придумать задачи на вычисление интегралов. Сильные учащиеся составляют задания по данной теме и предлагают решить их своим товарищам. Проверяется теоретический материал, и вырабатываются навыки вычисления неопределенных интегралов, применение формул.

Познавательные учебные действия включают действия исследования, поиска, отбора и структурирования необходимой информации, моделирование изучаемого содержания.

Можно подобрать задания следующего типа:

- «Найти отличия»,
- «Поиск лишнего»,
- «Лабиринты»,
- «Цепочки»,
- Составление схем-опор,
- Работа с разными видами таблиц,
- Составление и распознавание диаграмм.

Задание № 1: Работа с таблицей.

Цель: формировать умение работать с информацией.

Форма выполнения задания: индивидуальная работа.

Описание задания: учащиеся знакомятся с таблицей, выясняют, какие данные в себя включает, выбирают варианты верных (неверных) ответов из предложенных, составляют соответствия.

Поставьте в соответствие каждой функции соответствующую первообразную, ответы внесите в таблицу.

Функция	Первообразная
1) 1	A. x
2)	B.
3) $-$	C.
4)	D.
5)	E.
6) $——$	F.
7) $——$	G.
8)	H. $——$
9)	I. $——$

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Задание № 2: «Цепочки»

Цель: развивать умение составлять план действий, последовательно выполнять математические операции.

Форма выполнения задания: индивидуальная работа

Описание задания: Закрепление и применение знаний и способов действий учащихся. Задание целесообразно дать на закреплении знаний по теме «Интегрирование методом замены переменной». Учащиеся работают на карточках, заполняют пропуски.

Найти неопределенный интеграл:

Решение: 1) Введем замену: _____, тогда _____,
_____.

2) Подставляя, введенную замену, в исходный интеграл получим:

_____.

3) Сделаем обратную замену: _____.

4) Ответ: _____.

Личностные учебные действия позволяют сделать учение осмысленным, увязывая его с реальными жизненными целями и ситуациями. Личностные действия направлены на осознание, исследование и принятие жизненных ценностей, позволяют сориентироваться в нравственных нормах и правилах, выработать свою жизненную позицию в отношении мира.

Можно предложить задания типа:

- участие в проектах;
- подведение итогов урока;
- творческие задания, имеющие практическое применение;
- самооценка событий.

Задание: Урок-семинар.

Цель: Развитие творческих способностей учащихся, умений представлять конкретное содержание и сообщать его в письменной и устной форме, адекватно использовать речевые средства для дискуссии и аргументации своей позиции.

Форма выполнения задания: индивидуальная или в парах.

Описание задания: Защита своих мини-проектов. Примеры тем проектов: «Неопределенный интеграл в физике», «Неопределенный интеграл в экономических задачах», «История интегрального исчисления» и т.д. Учащиеся слушают, обсуждают, оценивают, выбирают лучшую работу для школьной конференции.

Тема: «Применение первообразной и интеграла в физике»

Учащиеся работают в группах, самостоятельно готовят презентации к решению задач. Представители групп отвечают у доски, остальные

участники семинара осмысливают, конспектируют и анализируют систему задач, задают вопросы.

Задача 1. Точка движется по прямой так, что её скорость в момент времени t равна $v(t)$. Найдите путь, пройденный точкой за промежуток от t_1 с. до t_2 с.

Задача 2. В тонком неоднородном стержне длиной 25 см его масса (в граммах) распределена по закону $m(x) = kx$, где x – длина стержня, отсчитываемая от его начала. Найдите линейную плотность в точке, отстоящей от начала стержня на 3 см., и в конце стержня.

Задача 3. Тело массой m кг движется прямолинейно по закону $s(t) = at^2$, где s – путь в метрах, t – время в секундах. Найти кинетическую энергию тела через 10 с. после начала движения.

Задача 4. Сила тока в проводнике равномерно нарастает от 0 до 2 ампер в течение времени 5 с. Определите заряд, прошедший по проводнику.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Интегрирование многих видов функций подчас представляет собой одну из труднейших проблем математического анализа. Вычисление определенного интеграла имеет не только теоретический интерес. К его вычислению сводятся иногда задачи, связанные с практической деятельностью человека.

В ходе выполнения работы была проанализирована литература по теме исследования; показано представление темы «Неопределенный интеграл» в школьных учебниках и пособиях; рассмотрены методические особенности изучения неопределенного интеграла с учетом требований ФГОС, особенности профильного обучения в 10-11 классах; составлен фрагмент урока на введение понятия неопределенного интеграла; показаны методические особенности изучения свойств неопределенного интеграла; разработаны задания на обучение простейшим приемам интегрирования.

В частности, получены следующие выводы:

- Интегральное исчисление повышает научный уровень школьного курса математики, помогает привести его по возможности в соответствие с современным состоянием науки, повышает математическую культуру выпускников школы.
- Учитель должен создать условия, в которых стало бы возможным для учащихся развитие их интеллектуальных и других способностей, опыта применения полученных знаний в различных ситуациях (познавательных, социальных), то есть развивать универсальные учебные действия.
- Стройное, логичное изложение теоретического материала, а также хорошо подобранные упражнения, рассмотренные в учебно-методической литературе (учебник Никольского С.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни), способствуют развитию мышления, памяти, внимания и речи учащихся.

– Задания на развитие универсальных учебных действий делают изучение данной темы более интересным и легким.

– Профильное обучение направлено на реализацию личностно ориентированного учебного процесса. При этом существенно расширяются возможности выстраивания учеником индивидуальной образовательной траектории.

Результатом практической части работы является фрагмент урока на введение понятия неопределенного интеграла, свойств неопределенного интеграла, а также ряд заданий на формирование определенных универсальных учебных действий, обучающих простейшим методам интегрирования. Материалы данной работы могут быть использованы при обучении началам математического анализа учащихся 10 класса профильной школы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Башмаков М.И.* Определение основных понятий анализа в школьном курсе математики/ М.И. Башмаков// Математика в школе, 1988. –№ 3. – 42 с.
2. *Брадис В.М.* Методика преподавания математики в средней школе/ В.М. Брадис. – М., Учпедгиз, 1954. – 504 с.
3. *Виленкин Н.Я.* Производная и интеграл/ Н.Я. Виленкин. – М.: Просвещение, 1976. – 150 с.
4. *Глазков Ю.А.* Тестовые задания для подготовки к ОГЭ 2015 по математике/ Ю.А. Глазков, И.К. Варшавский, М.Я. Гаиашвили. – М.: Просвещение 2015. – 52 с.
5. *Гусев В.А.* Психолого-педагогические основы обучения математике/ В.А. Гусев. – М.: Вербум, 2003. – 123 с.
6. *Дорофеева А.В.* Страницы истории на уроках математики/ А.В. Дорофеева. – М.: Просвещение, 2007. – 96 с.
7. *Зив Б.Г.* Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 11 класса/ Б.Г. Зив, В.А. Гольдич. – СПб.: Черо-на-Неве, 2003. – 96 с.
8. *Зимняя И.А.* Педагогическая психология: учебник для вузов. Изд. второе, доп., испр. и перераб./ И.А. Зимняя. – М.: Издательская корпорация «Логос», 2000. – 384 с.
9. *Колягин Ю.М.* Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни/ Ю.М. Колягин и др. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 336 с.
10. *Колягин Ю.М.* и др. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учеб. пособие для студентов физ.-мат. факультетов пед. вузов/ Ю.М. Колягин – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.
11. *Кузнецова М.В., Цветкова М.С.* Методическое пособие для учителя. Математика: алгебра и начало математического анализа, геометрия.

- УМК для старшей школы 10-11 классы. Углубленный уровень/ М.В. Кузнецова – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 167 с.
12. *Методика* и технология обучения математике: курс лекций/ под ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.
 13. *Мордкович А.Г.* Алгебра и начала анализа. 10-11 классы: задачник для общеобразовательных учреждений/ А.Г. Мордкович. – 12-е изд., стер. – М.: 2010. – 315 с.
 14. *Мордкович А.Г.* Алгебра и начала анализа. 10-11 классы: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/ А.Г. Мордкович. – 12-е изд., стер. – М.: 2010. – 384 с.
 15. *Мордкович А.Г., Семенов П.В.* Алгебра и начало математического анализа. 11 класс (профильный уровень): методическое пособие для учителя. М.: Мнемозина, 2010. - 191 с.
 16. *Никольский С.М.* Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни/ С.М. Никольский и др. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 464 с.
 17. *Саранцев Г.И.* Методология методики обучения математике/ Г.И. Саранцев. – Саранск: Красный Октябрь, 2001. – 144 с.
 18. *Срода Р.Б.* Воспитание активности и самостоятельности учащихся в учении/ Р.Б. Срода. – М.: АПН РСФСР, 1956. – 54 с.
 19. Улендеева Н.И. Изучение темы «Первообразная и интеграл» с учащимися 11 класса в курсе алгебры и начала математического анализа профильной школы /Улендеева Н.И. // Самарский научный вестник. – 2013 г. - № 2. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://cyberleninka.ru/>
 20. *Пратусевич М.Я., Соломин В.Н.* Алгебра и начало математического анализа. Методические рекомендации. 11 класс. Углубленный уровень. М.: Просвещение, 2013. 158 с.

21. *Шабунин М.И., Прокофьев А.А.* Математика. Алгебра. Начало математического анализа. Профильный уровень: методическое пособие для 11 класса. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 360 с.
22. *Формирование* приемов математического мышления/ под ред. Н.Ф Талызиной. – М.: ТОО «Вентана-Граф», 1995. – 240 с.
23. *Шилова З.В., Насибуллина Э.Ф.* Некоторые методические особенности изучения темы «Интеграл» в школьном курсе математики // Концепт: научно-методический электронный журнал официального сайта эвристических олимпиад «Совенок» и «Прорыв» - Киров, 2011 г. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://e-koncept.ru/2011/11204.htm>
24. Программа развития универсальных учебных действий (ФГОС ООО) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://sch2045zg.mskobr.ru/files/prilozhenie_1_razvitie_uud.pdf
25. Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования. Приказ Министерства образования РФ от 18 июля 2002 г. № 2783 «Об утверждении Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования»
26. Учебно-методический комплекс по дисциплине «Теория и методика обучения математики» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://dep_tmomi.pnzgu.ru/files/dep_tmomi.pnzgu.ru/teoriya_i_metodika_ob_ucheniya_matematike2.pdf
27. Государственные образовательные стандарты общего образования. Приказ Министерства образования и науки РФ от 17 мая 2012 г. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.edu.ru/db/portal/obschee/index.htm>
28. Педсовет: интернет портал [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://pedsovet.org>

