Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра высшей математики

Выпускная квалификационная работа

ФОРМИРОВАНИЕ ТВОРЧЕСКОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ ПРИ РЕШЕНИИ ОПОРНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Работу выполнила
студентка Z151 группы
направления 44.03.01
Педагогическое образование
профиль «Математика»
Мерзлякова Екатерина Эдуардовна

____
подпись

Руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор
кафедры высшей математики
Малых Алла Ефимовна

____
подпись

«Допущена к защите в ГЭК»
Зав. кафедрой
высшей математики

______________ ______________
дата подпись

Пермь
2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Одним из важнейших критериев современного образованного человека является его конкурентоспособность, готовность к творческой деятельности, сформированность умений применять полученные знания, сформировать новые возникающие при этом проблемы. Именно такие задачи решают современные школьники. Они призваны обеспечить необходимый уровень математического образования и, в частности, геометрического. К сожалению, в последнее время наблюдается снижение интереса к геометрии, что неоднократно отмечали на страницах газет и журналов ведущие методисты.

Исходя из задач математики, значительное место в ее преподавании должно быть отведено самостоятельной деятельности учащихся. Но такая работа не всегда направлена на развитие их творческого потенциала, поэтому необходимо формирование творческой самостоятельности школьников. Начинать такую работу необходимо с 8 и 9 классов, так как на этом этапе осознается степень интереса к геометрии. Широкий круг учений еще с Древней Греции и Средневековской Западной Европы интересовала проблема самостоятельной работе.

Цель исследования состоит в развитии методики формирования творческой самостоятельности школьников основной школы.

Предметом исследования является процесс обучения геометрии в 8-9 класса общеобразовательной школы.

Объектом исследования является методика формирования творческой самостоятельности школьников в 8-9 классов в процессе преобразования геометрии.

Для достижения цели были сформулированы **задачи**:

1. Изучить психолого-педагогическую и учебно-методическую литературу.
2. Определить роль и место задач в курсе геометрии.

3. Выявить типологию геометрических задач.
4. Проанализировать этапы обучения и методы решения геометрических задач.
5. Провести обзор геометрических задач.

Методы исследования: анализ и синтез, имеющийся по данному вопросу литературы, обобщение материала по теме исследования, систематизация и сравнение информации, её конкретизация и моделирование, описание и объяснение теоретических знаний и приложений.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка используемой литературы насчитывающего 26 источников.

В первой главе излагаются сведения из истории геометрических задач в России и схемы решения задач.

Во второй главе содержится информация по подобранному пособию по геометрии для формирования творческих способностей учащихся.

В заключении обобщены результаты работы, сделаны выводы.

ГЛАВА 1. РОЛЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ И ПУТИ ФОРМИРОВАНИЯ ТВОРЧЕСКОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

В главе рассматриваются исторические справки и сведения, особенности решения геометрических задач и схемы их решения, а также формирование творческой самостоятельности при решении задач.

1.1. Исторические справки

1.1.1. Прямоугольный треугольник

«Если слушать тех, кто любит повторять древние легенды, то придется сказать, что эта теорема восходит Пифагору...». Так писал Прокл (410-485) в своем комментарии к «Началам» Евклида о том, что квадрат гипотенузы в треугольнике равен сумме квадратов катетов. Об этом же говорил и другой древнегреческий ученый Плутарх (I в.). На основе этих высказываний долгое время считали, что до Пифагора такой теоремы не знали, потому в дальнейшем назвали ее «теоремой Пифагора». Однако к настоящему времени установлено, что она встречается в вавилонских клинописных текстах уже в XVIII в. До н. э. Более того, древние египтяне за 2800 лет до н. э. знали, что треугольник с длинами сторон 3, 4, 5 – прямоугольный. Египетские жрецы и гарпетонапты (натягиватели веревки) использовали (мерные ленты) с узелками на расстоянии в один фараонский локоть друг от друга для построения прямого угла при возведении храмов, культовых сооружений, восстановлении покрытых илом участков земли и др. В Китае сведения о квадрате гипотенузы в треугольнике были известны как минимум за 500 лет до Пифагора. Теорему знали и в древней Индии. В «Чхандах сутра» Пингалы (II в. до н.э.) имеются следующие предложения:

1.Квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов его большей и меньшей стороны.

2.Квадрат на диагонали квадрата в два раза больше самого квадрата.

1.1.2. Теорема синусов

Для решения треугольника необходимо иметь три независимых соотношения между шестью его элементами. В евклидовой является сумма внутренних углов треугольника. Кроме этой теоремы в случае косоугольного треугольника можно использовать теоремы косинусов или синусов. Исторически сложилось так, что вторую вывел из теоремы косинусов и доказал Жозеф Луи Лагранж (1736-1813), а Огустен Луи Коши (1789-1857), наоборот, вывел теорему косинусов из теоремы синусов.

Как отмечалось выше, ученые Индии стран ислама в IX-X вв. сводили решение любых треугольников к решению прямоугольных, а потому не нуждались в теореме синусов. Она была доказана лишь в X I в. уроженцем Хорезма астрономом и математиком Абу-р-Райханом Мухаммедом ибн Ахмедом ал-Бируни (973-1050). Вместе с теоремой о сумме внутренних углов треугольника теорема синусов представляющая два независимых уравнения, позволяет решать любой треугольник.

Начиная с XVI столетия этой теоремой пользовались и европейские ученые. В «Математических таблицах» (1579) французского математика Франсуа Виет (1540-1603) приведена обобщенная теорема синусов.

1.1.3. Замечательные линии в треугольнике

С геометрией треугольника связаны, прежде всего, четыре точки, являющиеся пересечением не менее известных линий. В книге IV «Начал» Евклида (III в. до н.э.) помещена задача: «Вписать в данный треугольник круг». Из ее решения вытекает, что три биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке – центре вписанного круга (окружности). Из решения другой его задачи следует, что серединные перпендикуляры, проведенные к сторонам треугольника, пересекаются в одной точке – центре описанного круга (окружности). В «Началах» нет сведений о том, что три высоты треугольника пересекаются точке – ортоцентре.

Теорема о том, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке – барицентре (центре тяжести) треугольника – впервые была доказана Архимедом.

1.1.3. Площадь треугольника и его частей

Первыми математическими понятиями были число и геометрическая фигура. Они формировались вместе с развитием человеческого общества. Уже в глубокой древности люди изготавливали скребки и ножи в виде дисков, треугольников, ромбов и сегментов, круглые сосуды. Поля, как правило, имели форму прямоугольника, а здания – конуса, цилиндра и прямоугольного параллелепипеда. Большинство общепринятых названий геометрических фигур обозначают различные предметы, с которыми люди сталкивались своей практической деятельности.

Планиметрические знания древних египтян и вавилонян относились к измерению площадей и объемов простых фигур, встречавшихся при межевании земель, возведении стен и насыпей, строительстве плотин, каналов и др. Сохранились планы земельных участков, разделенных на треугольники, прямоугольники, трапеции. Их площади вычислялись как по точным, так и приближенным правилам.

Исторически сложилось, что при решении геометрических задач, относящихся к вычислению площадей прямолинейных фигур, наметились два подхода. Один связан с понятиями равновеликости и равносоставленности, другой – аналитический – с формулами для вычисления площадей.

1.1.4.Равновеликость и равносоставленность

Напомним, что две геометрические фигуры называются равновеликими, если они имеют одинаковые площади. Две фигуры называются равносоставленными, если определенным образом разрезав одну из них на конечное число частей, можно составить из них вторую фигуру. Очевидно, что две равносоставленные фигуры равновелики. На этом основан простой способ вычисления площадей, называемый методом разложения (разбиения). Метод этот был известен уже в древней Греции и древнем Китае. Он заключается следующем: для вычисления площади пытаются разбить фигуру на конечное число частей так, чтобы из них можно было составить более простую фигуру, площадь которой известна.

1.2. Сведения из истории использования текстовых задач в России

В традиционном российском школьном обучении математике текстовые задачи всегда занимали особое место. С одной стороны, практика применения текстовых задач в процессе обучения во всех цивилизованных государствах идет от глиняных табличек Древнего Вавилона и других древних письменных источников, т.е. имеет родственные корни. С другой стороны, – пристальное внимание обучающих к текстовым задачам – почти исключительно российский феномен.

Исторически долгое время, математические знания передавались из поколения в поколение в виде списка задач практического содержания вместе с их решениями. Первоначально обучение математике велось по образцам. Подражая учителям, ученики решали задачи на определённое «правило».

Подтверждением тому служит фрагмент книги М. Бешенштейна(1514).

«Тройным правилом, называется магистерское правило или золотое правило, с помощью которого совершаются все торговые расчёты ремесленников и купцов, ибо содержит в себе три величины, при помощи которых можно выполнить всё.

Заметьте ещё числа, стоящие сзади и спереди. Надо стоящее сзади число помножить на среднее и разделить на переднее.»

Пример:

Я купил сто фунтов шерсти за 7 гульденов. Что стоят 29 фунтов?

100 фунтов   *7 гульденов*   *29 фунтов*

Помножь 29 на 7, затем раздели на 100, что получится то и будет стоимостью 29 фунтов.

Это была обычная практика. По-другому в те времена учить не умели. Не случайно в «Арифметике» Л.Ф. Магницкого вобравшей в себя переводы лучших иностранных авторов того времени, мы находим аналогично построенный текст. Обучение «по правилам» было обычным для России.

Далее С. И. Шохор-Троцкий приводит фрагмент из «Арифметики» Л. М. Магницкого, из которого видно, что рецептурный стиль изложения материала, характерный для более ранних европейских источников, в первом российском учебнике арифметики ещё не был преодолён. В этом фрагменте, посвящённом следующего пятерного правила.

«Пятерное правило есть, егда случаются таковые сметы творити, яже не могут иным чином и правилом уразуметиться, токмо через сие пятерное или пятиперечневое, глаголется же тройносугубое……….понеже пять перечней в правиле поставляется, а щестый изобретается…..

Пример:

Некто имев 100 рублёв в купечестве един год, и приобрете еми токмо 7 рублей, и поки отдам в купечество 1000 рублёв на 5 годов, колико ими преобрящет, и ты твори сие поставив почину тройного правила:

100 1 год 1000 5 лет

И умножай два перечия иже от левыя руки между собою, так же прочия три иже к правой руке, такожде между собою порядком умножай, и произведение их раздели тем произведением еже от двух первых прозведеся: яко же зде.

О возможности использования задач такого рода в процессе обучения разговор ещё впереди, а пока получим верный ответ, следуя правилу.

(7*1000*5) / (100*1) =350(руб.)

В давние времена обученным считался тот, кто умел решать задачи определённых типов, встречавшихся на практике.

В России не только развили старинный способ передачи с помощью текстовых задач математических знаний и приемов рассуждений, но и научились формировать с помощью задач важные общеучебные умения, связанные с анализом текста, выделения условий задачи и главного вопроса, составлением плана решения, поискам условий, из которых можно получить ответ на главный вопрос, проверкой полученного результата. Немаловажную роль играло также приучение школьников к переводу на язык арифметических действий, уравнений, неравенств, графических образов.

Использование арифметических способов решения задач способствовало общему развитию учеников, развитию не только логическому, но и образному мышлению, лучшему освоению естественного языка, а это повышало эффективность обучения математике смежных дисциплин. Именно поэтому задачи играли столь важную роль в процессе обучения в России, и им отводилось много времени при обучении математики в школе.

Известный педагог-математик Д. Пойа разработал алгоритм решения задач, состоящий из четырех этапов (ступени): понимания смысла задачи, ее условия, требования, связей между ними; составления плана решения; его реализации; анализа поиска решения, самого решения, результата. При решении проблемно-развивающих задач наибольшая трудность возникает на этапе поиска. Для ее преодоления используется общие эвристические приемы.

Российские ученые - методисты Ю.М. Колягин, М. Фридман и другие разработали следующие приемы решения задач:

- попытаться свести данную задачу к такому типу, способ решения которого известен;

- проанализировать требования задачи и попробовать применить известный прием или метод;
- видоизменить задачу, т.е. на ее основе составить новую;
- разбить задачу на несколько вспомогательных, последовательное решение которых может составить решение исходной;
- отыскать в литературе решенную задачу, аналогичную данной и др.

Однако знание общих приемов поиска еще не гарантирует успеха в решении. Необходимо заранее формировать у обучаемых умения, соответствующие каждому приему. Анализ исследований Д. Пойа и ряда отечественных ученых позволил сделать вывод о том, что обучать решению геометрических задач – значит формировать у обучаемых умения:

- анализировать условие задачи (выделять данные и требования, соотносить первые со вторыми);
- устанавливать круг теоретических положений, которые могут ассоциироваться с каждым элементом условия и требования;
- формировать умение обучаемых выводить следствия, преобразовывать теоретические положения (аксиомы, определения понятий, формулировки теорем) способы деятельности, эвристические приемы;
- владеть способами решения исходных задач, к совокупности которых сводятся более сложные;
- составлять новые задачи путем изменения старых условий, замены! на равносильные, обратные задачи; выполнять обобщения и конкретизации, использовать результаты решения;
- решать задачи разными методами.

1.3. Особенности решения геометрических задач

Согласно современным и психологическим структура математического мышления представляет собой пять пересекающихся подструктур. В зависимости от индивидуальных особенностей человека любая из подструктур может занимать место преобладающей.

В связи с этим одна и та же задача может решаться по-разному, в зависимости от индивидуальных особенностей решающего.

Рассмотрим их.

Первая – топологическая подструктура.

Она помогает оперировать такими характеристиками, непрерывно-разрывно, связно- несвязно, принадлежит не принадлежит, порознь – вместе.

Решающий, у которого преобладает такая подструктура мышления, не любит торопиться. Каждое действие он делает очень подробно, не пропуская ни одного звена. Это тонкий аналитик, он все проверит, не пропустит ошибок, отсюда и медлительность.

Вторая – проективная подструктура.

Тот, у кого преобладает проективная подструктура, предпочитает изучить любой математический объект с различных точек зрения, искать и находить различные применения предмета в практике.

Решающий любит планировать, он не сделает первого шага, если не видит следующего.

Он поражает широтой своего математического мышления, способностью отыскивать и предлагать совершенно неожиданные подходы и аспекты решения.

Третья – порядковая подструктура.

Тот, у кого преобладает эта подструктура предпочитают сравнивать и оценивать в общем качественном виде: равно – не равно, больше – меньше, ближе – дальше, выше – ниже, и т. д. Ему важна форма объекта, их соотношение, форма движения.

Четвертая – метрическая подгруппа.

Акцентируется внимание на количественные характеристики. Они заворожены числом.

Главный вопрос: Сколько? Он всегда выясняет, какова длина отрезка и т.д. Ему трудно понять, что ответ может не иметь числового значения. Он не любит решать задачи в общем виде. Решать задачи в общем виде не в его правилах. Он предпочитает решение по действиям, результатом каждого, из которых, является число.

Пятая – алгебраическая подгруппа.

Всякий человек стремится по возможности комбинациям. Не хочет подробно записывать, объяснять все шаги решения или обосновать собственные действия. Он «великий комбинатор», думает и делает быстро, фонтанирует идеи, предположения и гипотезы решения, но при этом часто ошибается.

Доминантная подструктура математического мышления проявляет себя во всех математических действиях; и в зависимости от нее каждый выбирает свой индивидуальный метод решения.

Как утверждал знаменитый И.В.Гете: *«Каждый слышит только то, что он понимает».*

Каждую задачу человек должен решить своим индивидуальным способом и лишь после этого пытаться понять иные методы рассуждений.

1.4. Пути формирование творческих способностей при решении задач

Формирование навыков творчества в деятельности учащихся задача необычайной сложности и актуальности. Сам процесс творчества всегда интересовал лучшие умы человечества. Достаточно назвать имена таких мыслителей и ученых как Платон, Р. Декарт, А. Пуанкаре, Д. Гильберт, А.Н. Колмогоров и многих других.

Представления о природе творчества менялись от эпохи к эпохе, если античная философия не отводила творчеству большого значения, по сравнению с гносеологией, то в эпоху Возрождения появился взгляд на человека, как на творца. В 18 веке И. Кант дал концепцию творчества, которую продолжил Шеллинг, утверждая, что творчество есть высшая форма жизнедеятельности. Более емкое определение творчества имеется у Д. Дьюи, писавшего, что творчество – это интеллектуально выраженная форма социальной деятельности, сообразительность ума, поставленного перед жесткой необходимостью решения определенной задачи.

Более обобщенное понятие творчества, по мнению большинства исследований психологов, творчество – это деятельность, порождающее нечто качественно новое и отличающееся неповторимостью, оригинальностью и общественно-исторической уникальностью. Фазы творческого процесса отражают структурно-уровневую природу механизмов творчества и существуют в виде стадий:

1. Логический анализ;
2. Интуитивное решение;
3. Вербализация решения;
4. Формализация решения.

Полный цикл характерен в основном для научного творчества. Однако, элементы этого цикла присущи творчеству, осуществляемого и в учебной познавательной деятельности.

В первую очередь очень важно разделять понятия творчество и искусство. Творчество, представляющее собой перемену представлений, идей, концепций и восприятия имеет очень мало общего с искусством. У художников, поэтов, артистов есть много талантов: особое восприятие, умение выражать испытываемые эмоции, эстетические чувства и т.д. Но создание новых идей – это нечто другое. Не обязательно быть художником, чтобы быть творческой личностью.

Несомненно, что путы, наложенные традиционным образованием, заставляющим ребенка осваивать тысячи единиц ненужной информации и стереотипов, серьезно мешают развиваться творчеству. Но снятие барьеров –

только часть и очень незначительная часть условий, ведущих к становлению творческих личностей.

Мозг человека устроен настолько специфически, что по природе своей он не является творческим. Назначение мозга – выдавать определенные модели, унаследованные от предыдущего жизненного опыта и использовать эти модели в жизни.

Возможность творить – это не какой-то таинственный талант, данный только избранным, а умение, которое каждый может в себе выработать. Как и любыми навыками, творчеством можно овладеть и мера овладения зависит не только и не столько от определенных природных задатков, сколько от тренировки. Творчеству можно и нужно учиться.

Однако в процессе творчества, стадия логического анализа предшествует стадии интуиции, выдвигая гипотезу, особенно если это касается математического творчества. Здесь интуиция работает над опытом и знаниями, которые присутствуют в памяти. Из ранее полученных знаний и опыта каждый в свою деятельность привносит, непременно и личностный аспект. Можно сделать вывод, что для развития творческой деятельности в обучении знания преломляются с социальным опытом личности. А это формируется в памяти с помощью способности «Видеть в уме», что означает воочию представить в уме образы, действия, процессы, явления ранее заложенных в архив памяти, что предшествует обогащению мышления идеями, мыслями и знаниями.

В школьной учебной деятельности геометрия, как раздел математики, особенно ярко выражает процесс овладения навыками творчества.

Геометрия – это, прежде всего, феномен общечеловеческой культуры, являющийся носителем собственного метода познания мира. Исторически и генетически геометрическая деятельность является первичной интеллектуальной деятельностью человечества в целом и каждого человека в отдельности.

Миссия геометрического образования – внести вклад в интеллектуальную деятельность учеников, развитие навыков творчества как залог успеха и процветания личности.

Между тем, актуальной является проблема геометрическое образование учащихся средних и старших классов, которая традиционно вызывает определенные затруднения учащихся. Почему же детям трудно дается данная область математики? Решение, доказательства геометрических задач, теорем является своего рода исследовательской деятельностью. Геометрическое мышление в своей основе является разновидностью образного, чувственного визуального мышления. При этом важно уметь воспроизвести то, что знаешь и понимаешь.

Главные вопросы на которые необходимо обратить внимание:

1) как приучить учащихся к ряду абстракций, необходимых при изучении геометрии;

2) как добиться, чтобы курс геометрии приобрел в глазах учащихся стройность и систематичность;

3) как приучить учащихся искать и находить путь доказательства и решения;

4) как помочь учащимся самостоятельно отыскивать способы решения задач;

5) как формировать творческие способности учащихся.

Важнейшей педагогической проблемой является разрешение противоречия между первичностью пространственных форм с точки зрения процесса познания мира, их физической реальностью сравнительно с абстрактностью плоских фигур и традиционной логикой построения геометрических курсов, развивающихся от плоской геометрии к пространственной геометрии. Возможным путем разрешения такого противоречия является соответствующая специализация геометрического материала на трех этапах школьного обучения:

1 этап. 1-6 классы – введение единого курса математики с широкой геометризацией всего изучаемого материала с приоритетностью пространственных форм, в течение последних двух лет - выделение четкой геометрической линии через введение курса (раздела) «Наглядная геометрия».

2 этап. 7-9 классы – полный систематический курс геометрии, теории планиметрии и стереометрии.

3 этап. 10-11 классы – элективные курсы, программы которых определяются целями и потребностями соответствующих категорий школьников. Ввести целенаправленную работу в научно-исследовательской деятельности учащихся.

1.5. Схемы решения задач

Рассматривая каждую задачу вместе с методом её решения, можно выделить множество элементарных задач, т.е. решаемых в одно действие, выполненное на основе известной теоремы или формулы. При этом конфигурация, к которой они применяются, достаточно четко обозначена в условии. О границах множества таких задач приходится говорить условно. Тем не менее его выделение представляется оправданным. Оно оказывается полезным, т.к. решение более сложных и содержательных задач составляется из элементарных.

1. Все задачи подразделяются на разделы: по характеру объектов, по отношению к теории, по характеру требований.

2. Под процессом решения задач необходимо понимать процесс, начинающийся с момента получения задачи до момента полного ее завершения. Этот процесс состоит не только из изложения уже найденного решения, а из ряда этапов.

3. Кроме стандартных задач, при решении которых используются общие правила и положения, существуют нестандартные задачи. Нестандартные задачи – это задачи, для которых не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения. Для решения этих задач составляются свои схемы.

Для того, чтобы легко решать стандартные задачи (они являются основными, т.к. решение нестандартных задач сводятся к решению стандартных), нужно: помнить (держать в памяти) все изученные общие правила, формулы, тождества и общие положения, определения и теоремы.

Уметь развертывать правила, формулы, а также определения и теоремы – последовательности шагов решения задач, соответствующих видов.

Решение задачи не просто состоит в том, чтобы найти ответ. Если проанализировать решение какой-либо задачи, можно заметить что оно состоит из отдельных шагов, при этом каждый шаг решения есть применение какого-либо общего положения математики (правила, закона, теоремы, формулы) к отдельным условиям задачи или к полученным следствиям из этих условий.

Что значит решить геометрическую задачу? Для ответа на этот вопрос рассмотрим решение следующей задачи:

Длины оснований трапеции равны 4см и 10см. Найти длины отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из диагоналей.

Сначала построим схематическую запись этой задачи.

Дано: $AB||CD$; $AM = MD$; $BN = NC$; $AB = 10$ см; $CD = 4$ см.

Найти: MK и NK.

Решение: Средняя линия трапеции параллельна её основаниям. Значит, $MN||AB$ и $MN||CD$. Диагональ AC делит трапецию на два треугольника. Рассмотрим каждый из них. В треугольнике ABC отрезок NK является средней линией, т.к. NK как часть отрезка MN параллельна AB, и точка N по условию середина стороны BC. А средняя линия треугольника равна половине его основания. Значит, $KN=0,5AB$, а т.к. $AB=10$ см, то $KN=5$ см. Аналогично рассматривая треугольник ACD, получаем, что MK есть средняя линия треугольника и поэтому $MK=0,5CD$, но $CD=4$см, следовательно $MK=2$см.

Приведённое решение можно представить в виде *Схемы* 1:

№ шага	Общие положения математики	Условия задачи или их следствия	Результат
1	Средняя линия трапеции параллельна её основаниям	*MN* средняя линия трапеции *ABCD*	*MN*||*AB* *MN*||*CD*
2	Диагональ делит трапецию на два треугольника	*ABCD* – трапеция, *AC* – её диагональ	*ABC* и *ACD* – треугольники
3-4	Отрезок, проходящий через середину стороны треугольника параллельно другой стороне, является средней линией треугольника	В треугольнике *ABC* точка *N* – середина стороны *BC* и *MK*||*AB*, в треугольника *ACD* точка *M* – середина *AD* и *MK*||*CD*	*NK* – средняя линия треугольника *ABC,* *MK* –средняя линия треугольника *ACD*
5-6	Средняя линия треугольника равна половине основания	*NK* – средняя линия треугольника *ABC,* *AB*=10см; *MK* – средняя линия треугольника *ACD, CD*=4см	*KN*=0,5*AB* *KN*=5см *MK*=0,5*CD,* *MK*=2см.

Из приведённого примера можно сделать следующий вывод:

Решить геометрическую задачу – это значит найти такую последовательность общих положений математики (определений, аксиом, теорем, правил, законов, формул), применяя которые к условиям задачи или к их следствиям (промежуточным результатам решения), получаем то, что требуется в задаче, – её ответ.

ГЛАВА 2. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ (ПОСОБИЕ ПО ГЕОМЕТРИИ)

Для тех, кто умеет решать задачи, обучение решению задач представляется очень простым делом, не требующим разработки специальной методики. Чтобы научиться решать задачи, надо их понимать. Стоит подумать над решением пяти-шести задач, прежде чем они начинают получаться, решаться. Такой подход требует много времени, и кроме того, он может быть использован только для тех учащихся, которые, во-первых, хотят научиться решать задачи и готовы затратить на это и время и силы, а во-вторых, умеют приняться за дело.

2.1. Цель пособия

Когда говорим, о необходимости и возможности научить всех учащихся самостоятельно решать задачи, понимая под этим отыскание способа решения, то первая трудность состоит в том, чтобы найти отличные школьные задачи, обладающие несовместимыми свойствами: нужно, чтобы ученик мог ее решить, не зная, как ее надо решать, а учитель мог бы научить ее решать, не показывая, как решать. Чтобы задачу можно было бы использовать для развития мышления учащихся, она, не сводясь к алгоритму, должна быть построена (в отличие от нестандартной задачи) на некотором общем приеме мышления, который можно описать, объяснить учащимся. Особенно ценными являются задачи, на которых можно научить учащихся искать способ решения. Такими являются задачи на доказательство, решаемые в курсе геометрии, особенно в первой половине курса планиметрии.

Ценность геометрических задач на доказательство связана с тем, что на каждом этапе (1 этап – переформулировка условия; 2 этап – отыскание способа решения; 3 этап – выражение условия в словах (устно или письменно)) можно организовать деятельность учащегося, приводящую к отысканию пути решения.

Чтобы понять условие задачи можно дать учащимся конкретное указание о том, что надо делать, а именно: сделайте чертеж. Это указание должно выводить учащихся на некоторый почти алгоритмический «кусок решения». Для самостоятельного решения нужно отбирать задачи, чертеж к которым основан на незнакомой учащимся фигуре. Например, фигуры, изучаемые в курсе 7 класса, пересекающиеся или параллельные прямые и отрезки, углы, треугольники (медиана, биссектриса, высота), окружность с диаметром, радиусом, хордами и касательной и др. Важным является умение строить чертежи этих фигур, оно должно быть отработано до навыка.

В начале обучения для самостоятельного решения целесообразно давать условие с буквенными обозначениями, а в дальнейшем учащиеся должны будут сами вводить эти обозначения.

Указание сделать чертеж, должно развернуться в такую схему: выделить основную фигуру, начертить ее, введя обозначения, и нанести дополнительные элементы. В геометрических задачах можно на понятном для учащихся языке дать конкретное указание о том, что надо сделать для переформулировки условия, чтобы в нем легко было разобраться.

Поэтому уже простое выполнение чертежа делает возможным распознавание целого ряда понятий, не указанных в условии, а именно понятий, связанных с отношениями принадлежности и порядка. В школьной практике эти отношения при решении задач распознаются, так сказать «по образу». Например, начертив два отрезка AB и CD, пересекающиеся в точке O, учащийся сразу называет углы AOC и BOC вертикальными.

Работа над условием происходит по схеме:

– сделай чертеж;

– отметь на нем равные элементы;

– запиши, что надо доказать.

Такое первичное раскрытие условия и представление его на чертеже иногда оказывается достаточным для отыскания решения.

Вот в этот момент очень важно удержаться от соблазна подсказать учащимся. Надо направить его мысль по нужному пути, дать такое указание, которое не лишало бы ученика возможности найти нужное звено самостоятельно. Таким указанием может быть следующее: «Отметить на чертеже все известные тебе свойства данных фигур».

Для самостоятельного решения следует отбирать задачи, после полного раскрытия условия которых, можно было бы замкнуть цепочку рассуждений, т.е. из известных учащимся свойств понятий, фигурирующих в задаче, образовать (скомбинировать) известный достаточный признак заключение.

В курсе планиметрии основным способом, помогающим организовывать материал, усвоить всю совокупность свойств фигуры, является создание некоторого образа, связываемого с понятием. Созданию такого образа помогает многократное выполнение одного и того же чертежа, на котором все свойства видны. Этому способствуют и такие методические приемы, как обзор всех свойств, проводимый учителем, или опрос не по отдельным свойствам или теоремам, а по всей совокупности свойств фигуры: «Что ты знаешь о равнобедренном треугольнике?», «Перечисли все свойства параллелограмма» и т.д.

В основе умения отыскать путь решения задачи лежат не просто знания, а хорошо организованные, системные знания, при которых усвоены не только отдельные факты, но и связи между ними.

Обучение учащихся самостоятельному решению задач требует определенной методики изучения теоретического материала курса, основанной на системном усвоении понятий: каждое математическое понятие есть некоторая система свойств и отношений, обладающая всеми признаками системы (целостностью, структурностью и др.). В этом выражается неразрывность двух сторон обучения: усвоение теоретического материала необходимо для успешного решения задач так же, как и решение задач необходимо для сознательного усвоения теорем.

2.2. Основные типы базовых геометрических задач

К основным типы базовых геометрических задач относятся:

1) Расстояние от точки до прямой;
2) Расстояние от точки до плоскости;
3) Расстояние между двумя прямыми;
4) Угол между прямыми, прямой и плоскостью;
5) Угол между плоскостями.

2.2.1. Расстояние от точки до прямой

Определение 1. Расстояние от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую (рис. 1).

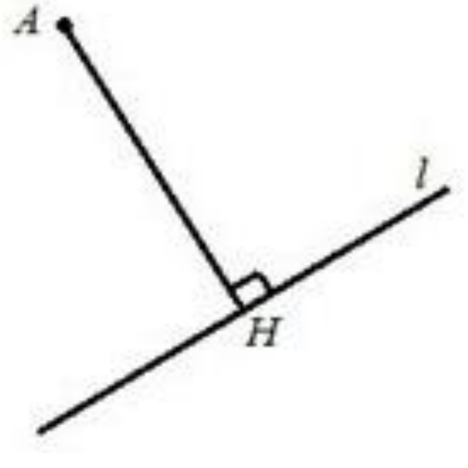

Рис. 1. Расстояние от точки до прямой

Для нахождения расстояния от точки A до прямой l перпендикуляр AH, опущенный из данной точки на данную прямую, представляют в качестве высоты треугольника, общей вершиной которого является тоска A, а сторона BC, противолежащая этой вершине, лежит на прямой l. Зная стороны этого треугольника, можно найти и его высоту.

При этом возможны следующие случаи:

1. Треугольник ABC – прямоугольный, угол B – прямой. В этом случае искомым перпендикуляром является сторона AB (рис. 2).

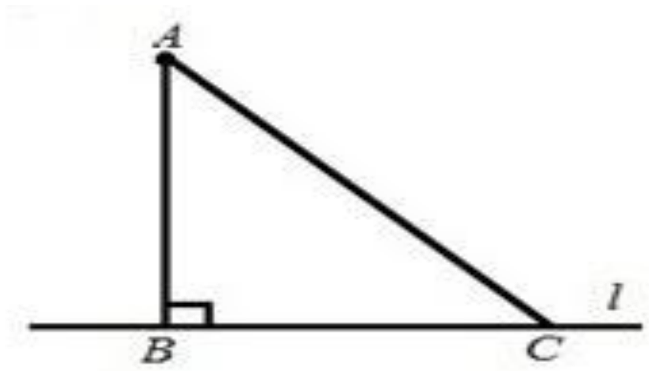

Рис. 2 . Прямоугольный треугольник ABC

2. Треугольник ABC – равнобедренный, $AB = AC$. Пусть $AB = AC = b$, $BC = a$ (рис. 3).

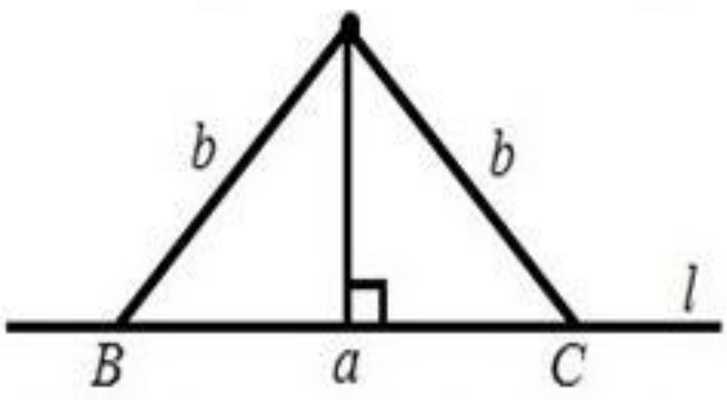

Рис. 3 . Равнобедренный треугольник ABC

Искомый перпендикуляр находится из прямоугольного треугольника ABH:

$$AH = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

3. Треугольник ABC – равнобедренный, $AC = BC$. Пусть $AB = c$, $AC = BC = a$ (рис. 4).

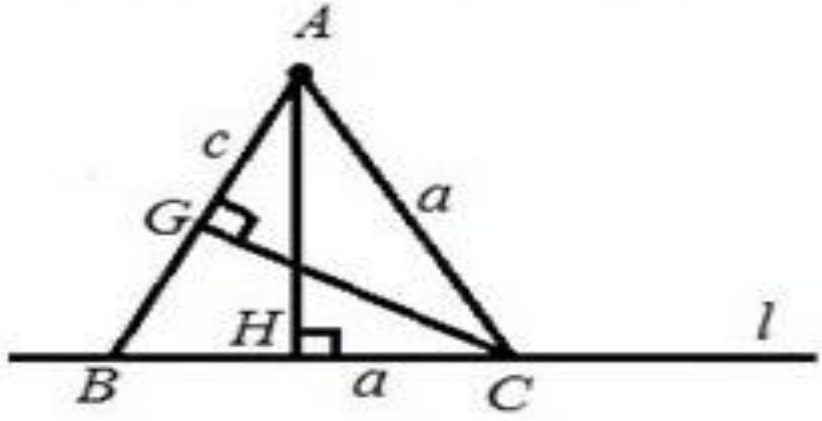

Рис. 4. Равнобедренный треугольник

Сначала найдем высоту CG:

$$CG = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}.$$

Площадь треугольника ABC равна:

$$\frac{1}{2}\ AB \cdot CG = \frac{1}{2} c \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{c\sqrt{4a^2 - c^2}}{4}.$$

С другой стороны площадь треугольника ABC равна:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot AH.$$

Следовательно искомая высота AH равна:

$$AH = \frac{2c\sqrt{4a^2 - c^2}}{4a}.$$

Задача 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до прямой MT, где точки M и T – середины ребер CD и A_1B_1 соответственно (рис. 5).

Решение:

1) $EH \perp TM$, EH – искомое расстояние.

2) Из ΔTOM находим

$TM = \sqrt{TO^2 + OM^2},$

$TM = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$

3) В ΔC_1CM

$$C_1M = \sqrt{MC^2 + OM^2},$$

$$C_1M = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

В ΔMC_1E:

$$EM = \sqrt{{EC_1}^2 + {MC_1}^2},$$

$$C_1M = \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

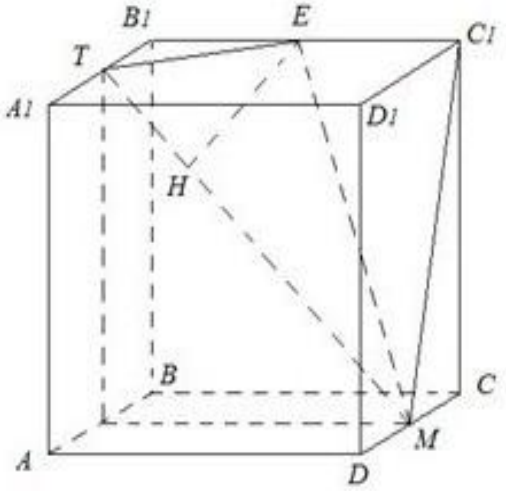

Рис. 5. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$

4) Из ΔTB_1E: $TE = \sqrt{B_1T^2 + B_1E^2}$, $TE = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

ΔTEM – прямоугольный.

5) Из ΔTEM:

$$S_{TEM} = \frac{1}{2} TE \cdot EM = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{8},$$

$$S_{TEM} = \frac{1}{2} EH \cdot TM = \frac{\sqrt{2}}{2} EH,$$

$$EH = \frac{\sqrt{12}}{8} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

2.2.2. Расстояние от точки до плоскости

Определение 2. Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость (рис. 6).

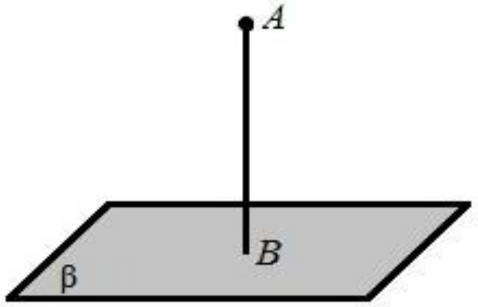

Рис. 6. Расстояние от точки до плоскости

Задача 2. В правильном шестиугольнике $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, найти расстояние от точки A до плоскости A_1EB_1D (рис.7).

Решение:

1) Соединим A и E

$\angle A=90^\circ$, AH – высота в прямоугольном ΔAA_1E

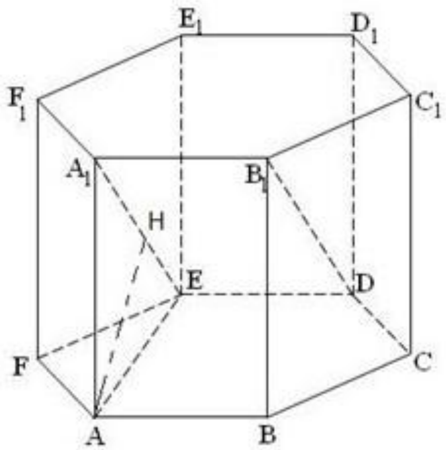

Рис. 7. Правильный шестиугольник $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$

2) $\left.\begin{array}{l} DE \perp AE \\ DE \perp EE_1 \end{array}\right\} DE \perp (AEE_1)$

$$AH \perp DE$$

3) $\left.\begin{array}{l} AH \perp A_1E \\ AH \perp DE \end{array}\right\} AH \perp (A_1B_1DE)$

AH – искомое расстояние

4) $AA_1 \cdot AE = A_1E \cdot AH$

$$AE = \sqrt{3}$$

$$A_1E = 2$$

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от точки A до плоскости D_1B_1C (рис. 8).

Решение:

1) $D_1(0;0;1)$

$B_1(1;1;1)$

$C(0;1;0)$

2) (D_1B_1C):

$-x+y+z=0$

$a=-1$; $b=1$; $c=1$

3) $AH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

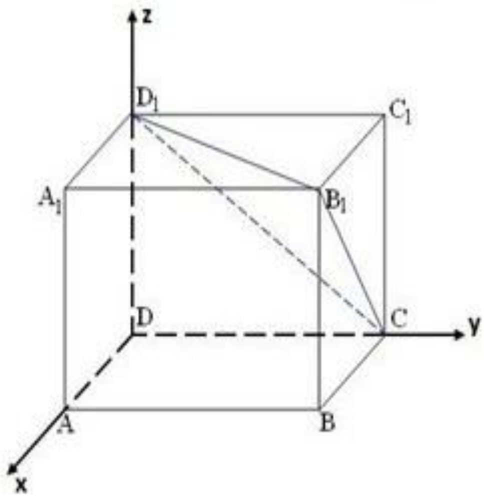

Рис. 8. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$

2.2.3. Расстояние между двумя прямыми

Определение 3. Расстоянием между двумя непересекающимися прямыми в пространстве называется длина общего перпендикуляра, проведенного к этим прямым (рис. 9).

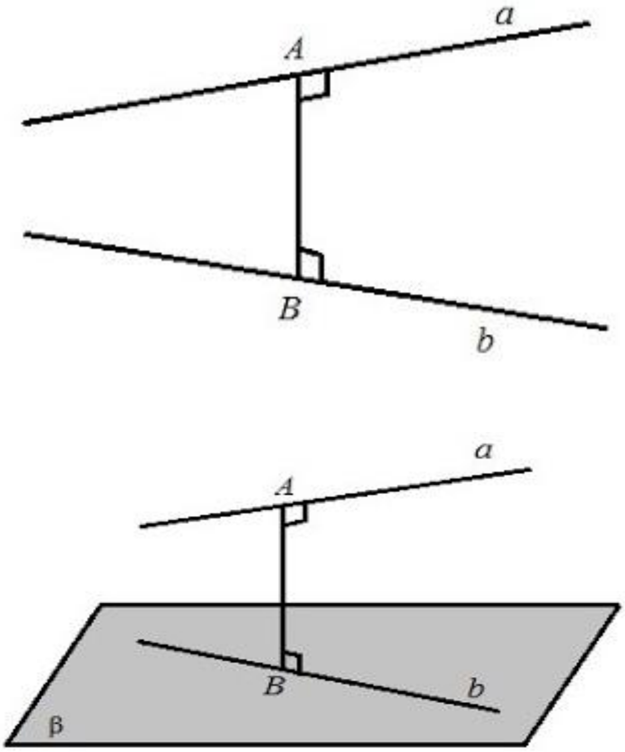

Рис. 9. Расстояние между двумя прямыми

Для нахождения расстояния между двумя скрещивающимися прямыми используют следующие теоремы.

Теорема 1.

Если две скрещивающиеся прямые лежат в параллельных плоскостях, то расстояние между ними равно расстоянию между этими плоскостями.

Теорема 2.

Если ортогональная проекция на плоскость π *переводит прямую* a *в точку* $A^{'}$*, а прямую* b *в прямую* $b^{'}$*, то расстояние* AB *между скрещивающимися прямыми* a *и* b *равно расстоянию* $A^{'}B^{'}$ *от точки* A' *до прямой* $b^{'}$ (рис. 10).

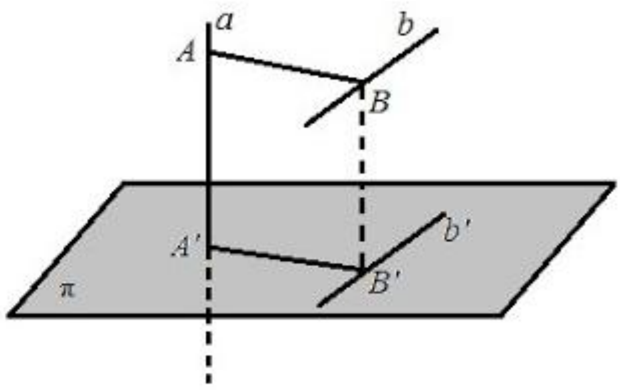

Рис. 10. Теорема

Задача 4. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 (рис. 11).

Решение:

1) $(AD_1B_1) \parallel (BDC_1)$

2) A_1C – диагональ куба

$A_1C = \sqrt{3}$

3) $EF = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

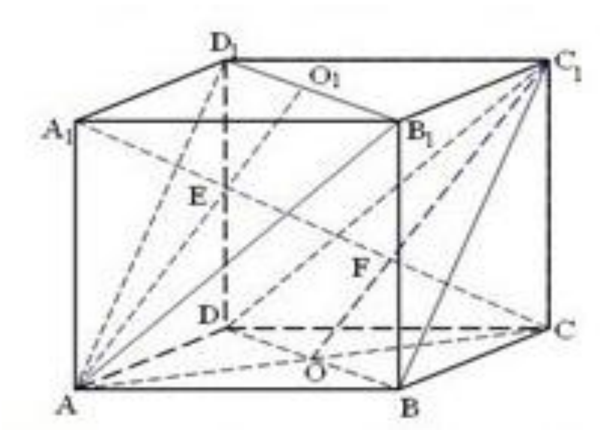

Рис. 11. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$

2.2.4. Угол между прямыми, прямой и плоскостью

2.2.4.1.Угол между двумя прямыми

Определение 4. Углом между двумя пересекающимися прямыми в пространстве называется наименьший из углов, образованных лучами, лежащими на этих прямых, с вершиной в точке их пересечения (рис. 12).

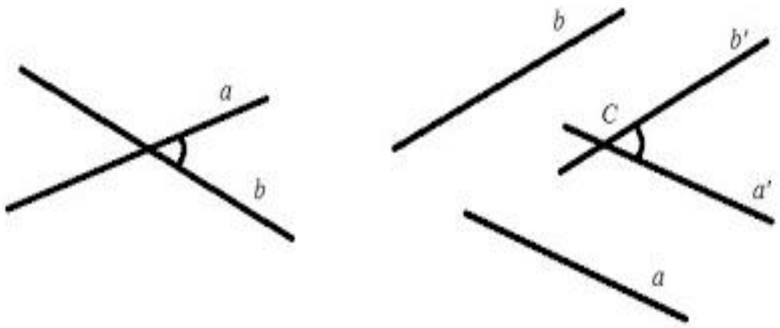

Рис. 12. Угол между прямыми

Определение 5. Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.

Определение 6. Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90˚.

Задача 5. Сторона основания треугольной пирамиды равна *α*, прилежащие к ней углы основания равны α и β. Все боковые рёбра составляют с высотой пирамиды один и тот же угол φ. Найдите объем пирамиды (рис. 13).

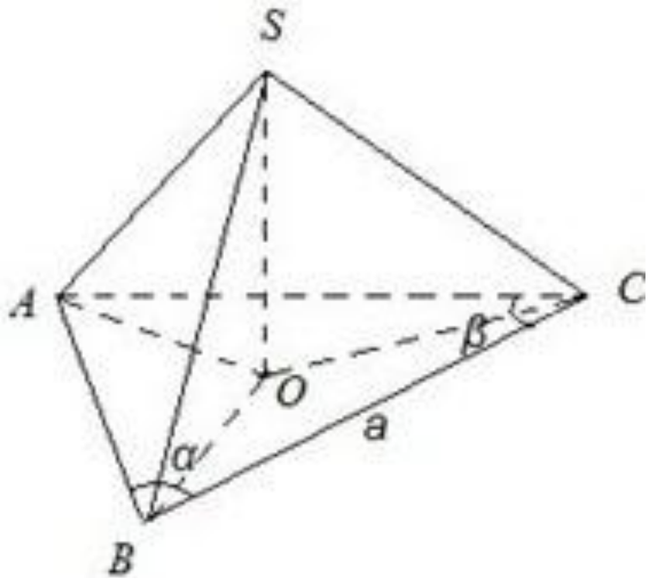

Рис. 13. Пирамида ABCS

Решение:

1) $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$;

$R = \dfrac{2}{2\sin(\alpha+\beta)}$;

2) По теореме синусов:

$\dfrac{AC}{sin\alpha} = 2R$;

$AC = \dfrac{a \cdot sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

3) $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2}\alpha \cdot AC \cdot sin\beta = \frac{a^2 sin\alpha sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$;

4) ΔSOC – прямоугольный;

$tg\varphi = \dfrac{R}{SO}$;

$SO = \dfrac{R}{tg\varphi} = \dfrac{a}{2\sin(\alpha+\beta) \cdot tg\varphi}$;

5) $V = \frac{a^3 \cdot sin\alpha \cdot sin\beta}{12 \cdot sin^2(\alpha+\beta) \cdot tg\varphi}$.

Задача 6. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно стороне основания. Найти угол между стороной основания и не пересекающей её диагональю боковой грани (рис. 14).

Решение:

1) Обозначим длину ребра призмы через a.

2) $AS = \cos 30° \cdot a = \frac{\sqrt{3}a}{2}$;

3) A (0;0;0); B_1 (0; a; a);

B (0; a; 0); C $(\frac{\sqrt{3}a}{2}; \frac{a}{2}; 0)$;

4) $\overrightarrow{AB_1}\{0; a; a\}$;

$$\overrightarrow{CB}\left\{-\frac{\sqrt{3}a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right\};$$

5) $\cos(\angle \overrightarrow{AB_1}\overrightarrow{CB}) = \frac{\left|\frac{a^2}{2}\right|}{\sqrt{a^2+a^2} \cdot \sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}} = \frac{1}{4}$;

$\angle AB_1CB = \arccos\frac{1}{4}$.

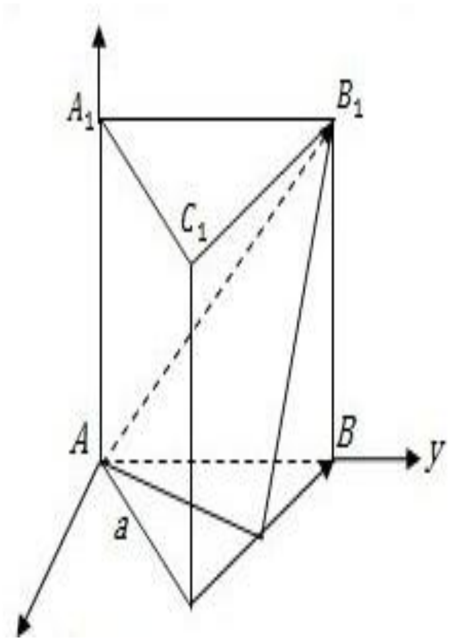

Рис. 14. Призма $ABCA_1B_1C_1$

2.2.4.2. Угол между прямой и плоскостью

Определение 7. Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и её проекцией на эту плоскость (рис. 15).

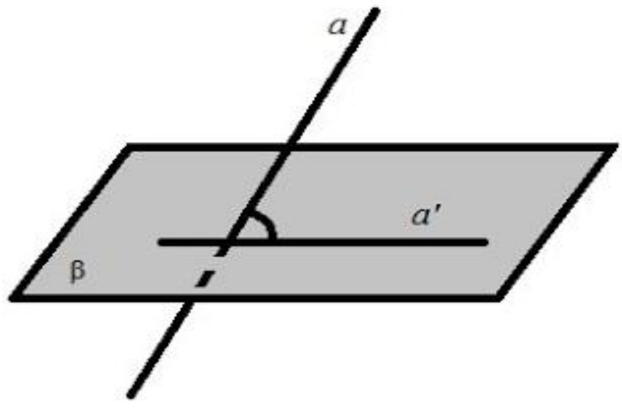

Рис. 15. Угол между прямой и плоскостью

Задача 7. Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен углу между боковым ребром и плоскостью основания. Найти этот угол (рис. 16).

Решение:

1) $OB = R$ – радиус описанной окружности;

2) ΔSHB: $SB = \frac{R}{2sin\frac{a}{2}}$;

3) ΔSOB: $SB = \frac{R}{\cos a}$;

4) $\frac{R}{\cos a} = \frac{R}{2sin\frac{a}{2}}$;

$\cos a = 2\, sin\frac{a}{2}$;

$2sin^2\frac{a}{2} + 2sin\frac{a}{2} - 1 = 0$;

$sin\frac{a}{2} = t; t \in [-1; 1]$;

$sin\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$;

$a = 2arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

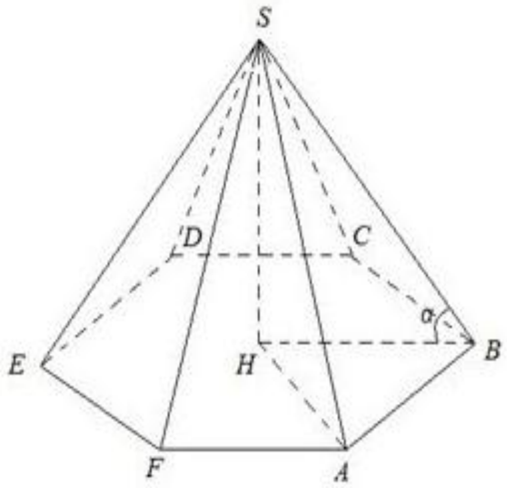

Рис. 16. Правильная шестиугольная пирамида

Задача 8. В правильной треугольной пирамиде *SABC* с основанием *ABC* известны ребра $AB = 6\sqrt{3}$, $SC = 10$. Точка *N* – середина ребра *BC*. Найдите тангенс угла, образованного плоскостью основания и прямой *AT*, где *T* – середина отрезка *SN* (рис. 17).

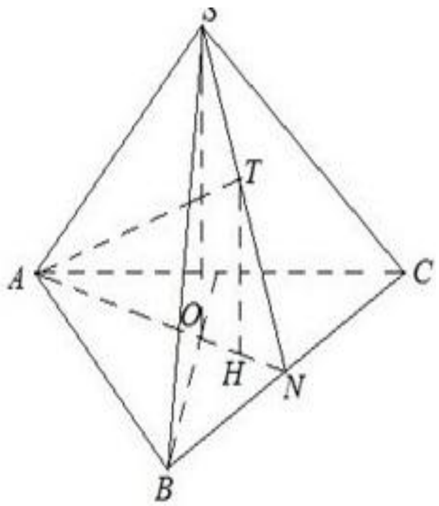

Рис. 17. Правильная треугольная пирамида SABC

2.2.4.3. Угол между плоскостями

Определение 8. Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образованных соответствующими полуплоскостями (рис. 18).

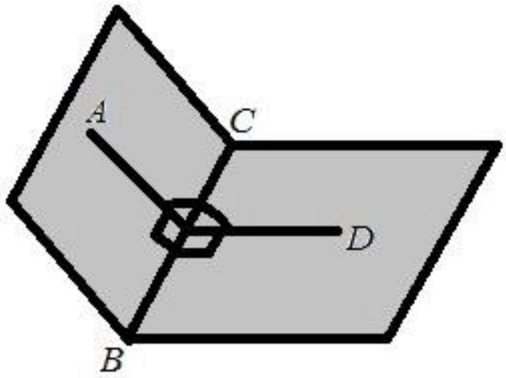

Рис. 18. Угол между двумя пересекающимися плоскостями

Определение 9. Двугранный угол измеряется соответствующим ему линейным углом.

Определение 10. Две плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

Задача 9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BDF_1 (рис.19).

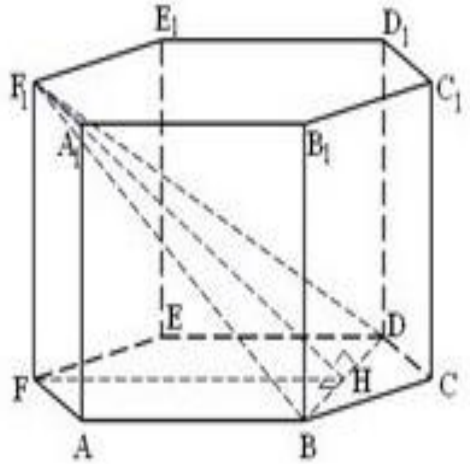

Рис. 19. Правильная шестиугольная призма

Решение:

1) $EF = 1$;

2) $FH = \frac{3}{4}FC = \frac{3}{4}\cdot 2 = \frac{3}{2}$;

3) $\gamma = FHF_1$, $FF_1=1$,

$\tan\gamma = \frac{2}{3}$.

2.3. О некоторых методах решения геометрических задач

При решении геометрических задач обычно используются три основных метода: геометрический, когда требуемое утверждение выводится с помощью логических рассуждений из ряда известных теорем; алгебраический, когда искомая геометрическая величина вычисляется на основании различных зависимостей между элементами геометрических фигур непосредственно или с помощью уравнений; комбинированный, когда на одних этапах решение ведется геометрическим методом, а на других алгебраическим. Какой бы путь решения ни был выбран, успешность его использования зависит, естественно, от знания теорем и умения их применять.

2.3.1. Метод дополнительного построения

Всякое геометрическое решение геометрической задачи начинается с работы над чертежом. При этом иногда на «естественном» чертеже (т.е. на чертеже, на котором изображено только условие) трудно заметить связи между данными и искомыми величинами, а если фигуру достроить, эти связи становятся очевидными.

Задача 10. Длины основания *CD*, диагонали *BD* и боковой стороны *AD* трапеции *ABCD* равны между собой p. Длина боковой стороны *BC* равна q. Найти длину диагонали *AC* (рис.20).

Решение:

В данной трапеции *ABCD* нелегко увидеть связь между искомой диагональю AC и другими отрезками. Если же, принять во внимание, что точка D равноудалена от точек A, B, C, провести окружность $O(D,p)$ и достроить данную трапецию до равнобедренной трапеции $ABCE$, из прямоугольного треугольника ACE легко найдем $AC = \sqrt{4p^2 - q^2}$.

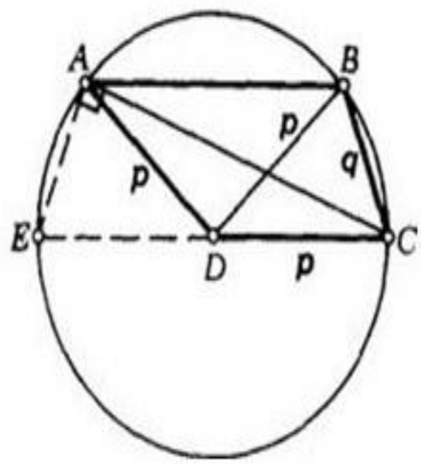

Рис. 20. Задача 10

2.3.2. Метод подобия

Подобие треугольников

Определение 11. Две фигуры F и F_1 называются подобными, если они переводятся друг в друга преобразованием подобия, т.е. таким преобразованием, при котором расстояния между соответствующими точками изменяются (увеличиваются или уменьшаются) в одно и то же число раз.

Признаки подобия треугольников:

1) Если два угла одного соответственно равны двум углам другого;
2) Если две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого и углы, образованные этими сторонами равны;
3) Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого.

Задача 11. В треугольнике *ABC* проведены высоты *AM* и *AN*. Найти углы треугольника *MNC*, если $\angle A=\alpha$ и $\angle B=\beta$ (рис. 21).

Решение:

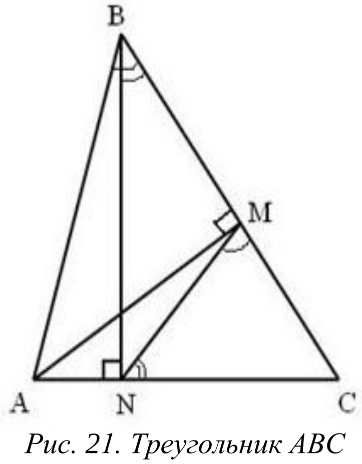

Рис. 21. Треугольник ABC

Прямоугольные треугольники *AMC* и *BNC* имеют равные острые углы при вершине *C*, следовательно, они подобны и $\frac{NC}{BC}=\frac{MC}{AC}$. Отсюда заключаем, что в треугольник *MCN* и *ACB* стороны, прилежащие к равному углу при вершине *C*, пропорциональны, следовательно (по второму признаку подобия), эти треугольники подобны. В подобных треугольниках против соответствующих сторон лежат равные углы, поэтому $\angle NMC=\alpha$ и $\angle MNC=\beta$.

Результат этой задачи можно сформировать так если соединить основания двух высот треугольника, то образуется треугольник, подобный данному.

Из определения подобия фигур следует, что в подобных фигурах все соответственные линейные элементы пропорциональны. Так, отношение периметров подобных многоугольников равно отношению длин соответствующих сторон. Или, например, в подобных треугольниках отношение радиусов вписанных и описанных окружностей равно отношению длин соответственных сторон.

Задача 12. В прямоугольном треугольнике *ABC* из вершины *C* прямого угла проведена высота *CD*. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники *ACD* и *BCD* равны соответственно r_1 и r_2. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*.

Решение:

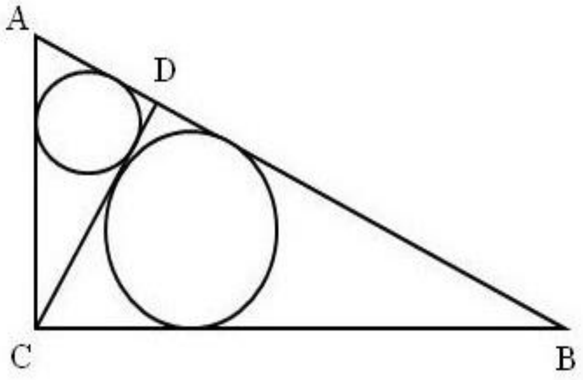

Рис. 22.Прямоугольный треугольник ABC

Обозначив искомый радиус r, предположим *AB=c*, *AC=b*, *BC=a*. Из подобия прямоугольных треугольников *ABC* и *ACD* (у них равные углы при вершине *A*) имеем $\frac{r}{r_1} = \frac{c}{b}$, откуда $b = \frac{r_1}{r} \cdot c$. Прямоугольные треугольники *CBD* и *ABC* также подобны, поэтому $\frac{r}{r_2} = \frac{c}{a}$, откуда $a = \frac{r_2}{r} \cdot c$. Так как $a^2+b^2=c^2$, то, возводя в квадрат выражения для a и b и складывая их, получим $\frac{r_1^2+r_2^2}{r^2} = 1$. Теперь находим $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

2.3.3.Метод замены

Метод замены широко применяется в алгебре, но не менее эффективно «замена» может быть применена в геометрии. Сущность этого приема решения геометрических задач состоит в следующем: фигура, о которой идет речь в условии задачи, так заменяется фигурой с той же искомой величиной, чтобы найти эту величину было легче.

Задача 13. Дано:

$\angle AOB=60^\circ$; $CD\perp OA$; $CM\perp OB$; $CN\perp ON$

ON – биссектриса $\angle AOB$

$CM=d_1$; $CD=d_2$

Найти: ON.

Решение:

Пусть: $d_2>d_1$

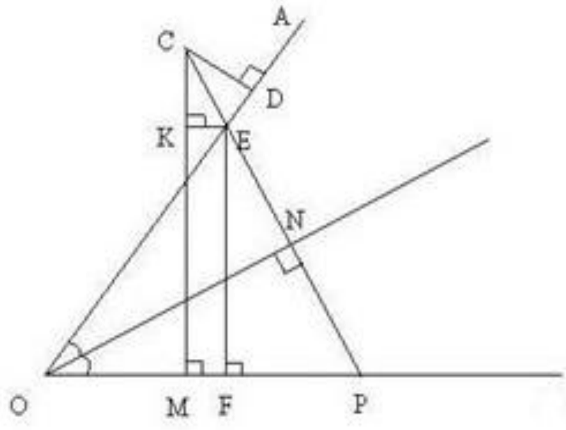

Рис. 23. Задача 13

1) $\Delta ONE=\Delta ONP$, $OP=OE$, значит ΔOEP – равнобедренный, а т.к. $\angle O=60^\circ$, то $\angle E=\angle P=60^\circ$, значит ΔOEP – равносторонний, $OP=PE$

2) Проведем $EF\perp OP$ и рассмотри ΔONP = ΔEFP (по гипотенузе и острому углу), $ON=EF$ т.е. заменим искомый отрезок ON на EF , т.к. его легче увязать с данным.

3) $EK\perp CD$; $\Delta CKE=\Delta CME$, $CK=CM=d_1$

$KD=FE$; $KD=CD–CK= d_2–d_1$.

Суть метода заключается в том, что исходя из условия задачи составляют уравнение (или систему уравнений). В качестве вспомогательных аргументов удобно выбирать величины, которые вместе с данными из условия задачи дают набор элементов, однозначно задающих некоторую фигуру.

Задача 14. В основании пирамиды лежит прямоугольник, площадь которого равна Q, две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а две другие образуют с плоскостью основания углы α и β. Найти объем пирамиды (рис. 24).

Решение:

1) Пусть в пирамиде $SABCD$: $(SBC)\perp(ABCD)$ и $(DSC)\perp(ABCD)$, значит общее ребро $SC\perp(ABCD)$, то есть SC – высота пирамиды.

2) $SC \perp (ABC)$, SB – наклонная, BC – проекция $SABC$, $\angle SBC = \alpha$, то по теореме о трех перпендикулярах $AB \perp SB$, следует $\angle SBC$ – линейный угол двухгранного угла;

$AB \perp BC$.

Аналогично $\angle SDC = \angle SAD = \beta$.

3) Пусть $BC = x$, а $DC = y$.

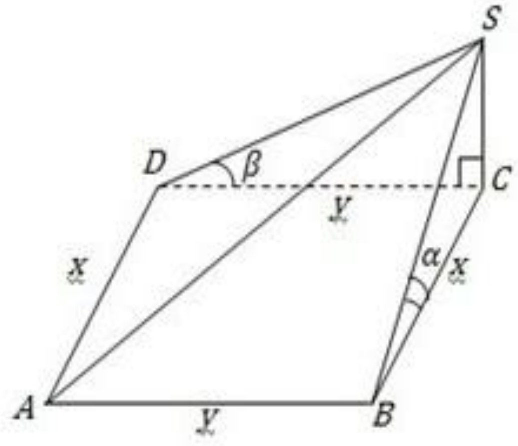

Рис. 24. Пирамида SABCD

Тогда из $\Delta BSC: SC = x \cdot tg\alpha$ и $\Delta DSC: SC = y \cdot tg\beta,$ следует что $x \cdot tg\alpha = y \cdot tg\beta,$ но по условию $x \cdot y = Q$. Получаем $y = \sqrt{Q \cdot tg\alpha \cdot ctg\beta}$ из этого следует, что $SC = y \cdot tg\beta = \sqrt{Q \cdot tg\alpha \cdot ctg\beta}$.

4)$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SC = \frac{1}{3} Q\sqrt{Q \cdot tg\alpha \cdot ctg\beta}$.

В математических задачах часто бывает полезен такой прием: двумя способами найти одну и ту же величину и приравнять полученные для нее выражения. Пусть мы, например, двумя способами нашли площадь некоторой фигуры. Если в одном из выражений для площади входит, скажем синус какого-либо угла α, то при помощи соотношения из полученного равенства можно получить некоторое неравенство, порой интересное.

Задача 15. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N, так что AM:MB=5:3 и BN:NC=2:7. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника MNB равна 11(рис. 25).

Решение:

1)$S_{MNB} = \frac{1}{2} MB \cdot BN \cdot sinB$

$S_{MNB} = \frac{1}{2} 3x \cdot 2y \cdot sinB = 3xy\, sinB.$

2) Так как площадь треугольника MNB

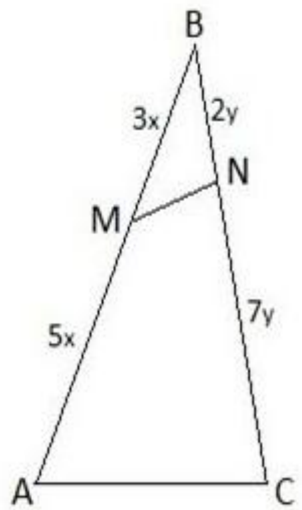

Рис. 25. Треугольник ABC

равна 11, составим уравнение:

$3xy\,sinB = 11,\ \ xy\,sinB = \frac{11}{3}.$

3) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC \cdot sinB$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}8x \cdot 9y \cdot sinB = 36xy\,sinB.$

4) Так как $xy\,sinB = \frac{11}{3}$, $S_{ABC} = 36 \cdot \frac{11}{3} = 132.$

Для нахождения расстояния от точки до плоскости или при нахождении углов между прямой и плоскостью метод «вспомогательного объёма» во многих случаях оказывается наиболее эффективным. Суть метода заключается в том, что объём некоторой фигуры выражается двумя способами, а затем из полученных равенств выражается искомая величина. Причём в этом методе нет необходимости строить проекцию прямой на плоскость или проекцию точки, что во многих случаях оказывается очень затруднительным.

Задача 16. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите расстояние от точки A до плоскости A_1BT, где T – середина ребра AD (рис. 26).

Решение:

1) Сначала найдем объем пирамиды A_1ABT:

$$V_{A_1ABT} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABT} \cdot A_1A = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{12}.$$

2) Теперь выразим объем пирамиды как:

$V_{ABTA_1} = \frac{1}{3}S_{\Delta A_1BT} \cdot AH$. Высота AH будет являться расстоянием между точкой и плоскостью, выразим её из второго равенства:

$AH = \frac{3V_{ABTA_1}}{S_{\Delta A_1BT}}$; $\qquad S_{\Delta A_1BT} = \frac{1}{2}TH_1 \cdot A_1B$;

$TB = \sqrt{AT^2 - AB^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

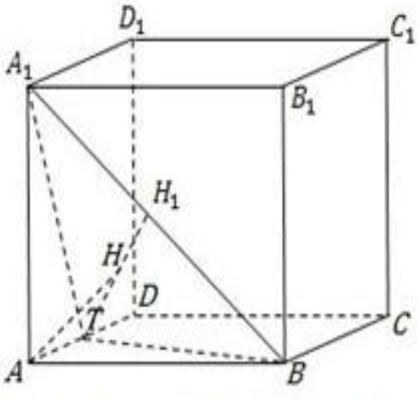

Рис. 26. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$

$$TH_1 = \sqrt{TB^2 - H_1B^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$S_{\Delta A_1BT} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4};$$

$$AH = \frac{3 \cdot \frac{1}{12}}{\frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

2.3.4. Векторный метод

Применение критериев коллинеарности и компланарности векторов в решении задач. Критерии коллинеарности и компланарности векторов служат основной для применения векторной алгебры в решении стереометрических задач. Они позволяют выразить в виде векторных равенств различные утверждения о расположенных точках, прямых и плоскостей в пространстве. Переход от векторных равенств к скалярным происходит на основе единственности разложения вектора по двум неколлинеарным и трём некомпланарным векторам.

Координаты на плоскости и в пространстве можно вводить бесконечным числом разных способов. И, решая ту или иную геометрическую задачу методом координат, можно использовать различные координатные системы, выбирая ту из них, в которой задача решается проще, удобнее. Некоторые виды координатных систем, отличные от прямоугольных.

1. Косоугольные (аффинные) координаты.
2. Полярные координаты.
3. Цилиндрические координаты.
4. Сферические координаты.
5. Прямоугольные координаты.

Рассмотрим самые употребительные и простые координаты в пространстве, называемые прямоугольными. Их называют ещё декартовыми по имени Рене Декарта (1596-1650) – французского учёного и философа, впервые ввёдшего координаты в геометрию (на плоскость).

Задача 17. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M лежит на ребре AA_1, причем $AM:AM_1=3:1$, а точка N – середина ребра BC. Вычислите косинус угла между прямыми MN и DD_1 (рис. 27).

Решение:

1) $M(1;0;\frac{3}{4})$; $N(0;\frac{1}{2};0)$; $D(1;1;0)$; $D_1(1;1;1)$.

2) $\overrightarrow{MN}\left\{1-1;\ \frac{1}{2}-0;\ 0-\frac{3}{4}\right\}$; $\overrightarrow{MN}\left\{0;\ \frac{1}{2};-\frac{3}{4}\right\}$.

$\overrightarrow{DD_1}\{1-1;\ 1-1;\ 1-0\}$; $\overrightarrow{DD_1}\{0;0;1\}$.

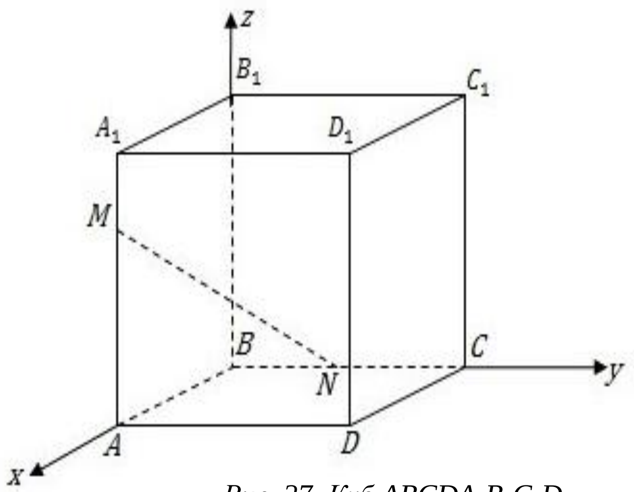

Рис. 27. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$

3) $\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{DD_1}\right)=\frac{\left|-\frac{3}{4}\right|}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{4}+\frac{9}{16}\right)}}=\sqrt{\frac{3}{29}}$.

2.4. Правильное решение геометрической задачи

При решении геометрической задачи необходимо рассмотреть все возможные случаи взаимного расположения элементов фигуры. Решение задачи, допускающей различные конфигурации, будет неполным и ошибочным, если ограничиться рассмотрением лишь одного из возможных случаев. Решая такие задачи, важно не ошибиться, приняв частное за общее.

Задача 18. Через точку пересечения двух окружностей проведите секущую так, чтобы ее часть, заключенная внутри кругов, была наибольшей.

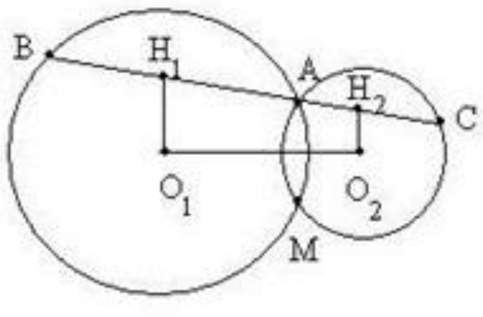

Рис. 28.

Решение:

Пусть данный окружности

пересекаются в точках A и M. Проведем через точку A произвольную прямую, пересекающую окружность с центром O_1 в точке B, а окружность центром O_2 – точке C. Проведем перпендикуляры O_1H_1 и O_2H_2 к прямой BC. Легко увидеть, что $BC=2H_1H_2$. Поскольку H_1H_2 ортогональная проекция отрезка O_1O_2 на прямую BC, $H_1H_2= O_1O_2cos\alpha$, где α – угол между секущей BC и линией центров O_1O_2, так что $BC=2\ O_1O_2cos\alpha$, отрезок BC имеет наибольшую длину, равную $2O_1O_2$, тогда, когда $\alpha=0$, т.е. секущая BC параллельна прямой O_1O_2 (рис. 28).

Приведенное рассуждение, однако, неверно. Дело в том, что в задаче говорится не об отрезке BC, а об отрезке секущей, заключенном внутри кругов (рис. 29). Возможны три случая расположения точек B и C: секущую можно провести так, что эти точки будут лежать:

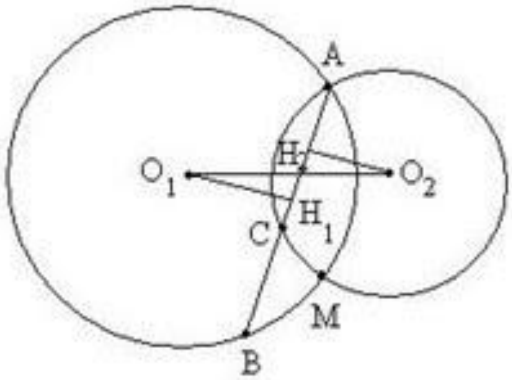

Рис. 29.

1) по разные стороны от точки A;

2) по одну сторону от точки A;

3) одна из них, например, точка C будет совпадать с точкой A.

В случае, если точка C лежит между точками A и B, отрезком секущей, заключенным внутри кругов, является не отрезком BC, а отрезок AB – хорда окружности. Хорда же имеет наибольшую длину, если она проходит через центр и является диаметром окружности (рис. 30). Таким образом, следует еще выяснить, такой из отрезков

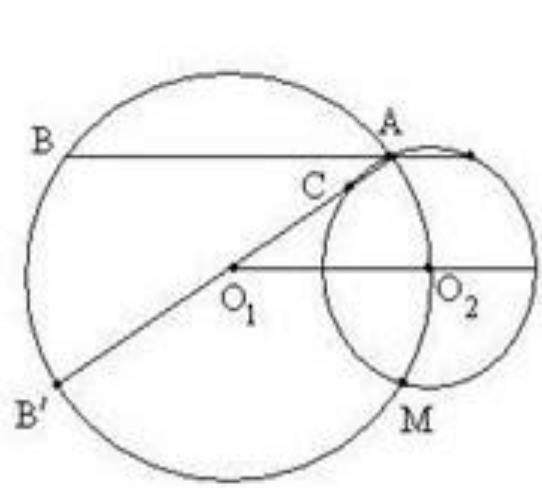

Рис. 30.

больше: отрезок, параллельный прямой O_1O_2, длина которого равна $2O_1O_2$ (во всех перечисленный способах BC=$2H_1H_2$), или же диаметр $2R$ большей окружности. Окончательно получается следующий ответ: если $O_1O_2>R$, то секущую следует провести параллельно линии центров если O_1O_2; если $O_1O_2<R$, то секущую следует провести через центр большей окружности; если $O_1O_2=R$, то условию задачи удовлетворяют две прямые, одна из которых параллельна O_1O_2, а другая проходит через центр большей окружности.

Для окружностей одинакового радиуса получается аналогичный ответ, только в случаях $O_1O_2 \leq R$ к указанным прямым добавляется еще прямая, проходящая через центр второй окружности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выделены и представлены основные части и виды геометрических задач, определена сущность и структура методов решения.

Цель исследования состояла в развитии методики формирования творческой самостоятельности школьников основной школы. Для достижения цели были решены следующие задачи:

1. Изучена психолого-педагогическая и учебно-методическая литература.
2. Определена роль и место задач в курсе геометрии.
3. Выявлена типология геометрических задач.
4. Проанализированы этапы обучения и методы решения геометрических задач.
5. Проведен обзор геометрических задач.

В ходе исследований сделаны следующие выводы: надо показать такое решение, при котором задача выступает как объект тщательного изучения, а её решение – как объект конструирования и изобретения, что было понятно ребёнку.

Результатом работы служит подборка геометрических задач, на которых хорошо прослеживается каждая составная часть и каждый этап процесса решения разных видов задач, что может помочь как учителю, так и учащимся.

Необходимо не забывать, что иногда удается найти и такой подход к задаче, который, обладая общностью, помогает получить решение, охватывающее все возможные случаи. Решение одной и той же задачи различными способами не только позволяет отыскивать наиболее простое и красивое решение, но и служит эффективным средством контроля и проверки. Такую работу можно использовать в дальнейшем в качестве подготовительного курса к экзамену или курсу по выбору.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Белозёров С.Е.* Пять знаменитых задач древности. История и современная теория. – Ростов н/Д.: 1975.

2. *Виленкин Н. Я.* Алгебра и математический анализ 10 класс. Учебник для углубленного изучения математики в общеобразовательных учреждениях, Издательство Мнемозина, 13-е изд. стереотипное, 2006. - 336с.

3. *Гаврилова Т.Д.* Занимательная математика. 5 – 11 классы. (Как сделать уроки математики нескучными)// Т.Д. Гаврилова. – Волгоград: Учитель, 2005, – 96 с.

4. *Гельфанд И.М.,* Львовский С.М., Тригонометрия, М.: МЦНМО, 2003, –7-16 с.

5. *Глейзер Г. И.* История математики в школе. – М.: Просвещение, 1964, – С. 324-325.

6. *Епишева О.Б.* Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учебной деятельности: кн. Для учителей //О.Б. Епишева В.И.. Крупич. – М.: Просвещение, 2000, – С. 102-136.

7. *Захарова И. Г.* Информационные технологии в образовании: учебное пособие для студ. пед. учеб. заведений / И. Г. Захарова,– М.: Издательский центр «Академия», 2003, – 192 с.

8. *Звавич В.И.,* Пигарев Б.П. Тригонометрические уравнения (решение уравнений + варианты самостоятельных работ) // Математика в школе.№3, С.18-27.

9. *Колмагорова А.Н.* Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений, 17-е изд. – М.: Просвещение, 2008, – 384 с.

10. *Королев С.В.* Тригонометрия на экзамене по математике, изд. Экзамен, 2006, – 254 с.

11. *Лихтарников Л.М.* Логические задачи: книга для учащихся 3-7 кл. / Л.М. Лихтарников.– Новгород: НГПИ, 1995, – 288 с.

12. *Марасанов А.Н.* О методологическом подходе в обучении тригонометрии / А.Н. Марасанов, Н.И. Попов // Знание и понимание. Умение. -2008, – №4, – 139-141 с.

13. *Марасанов А.Н.* Тригонометрия: учебное пособие, 2-е изд., испр и доп. (Н.И. Попов, А.Н. Марасанов.-Йошкар-Ола; Мар. гос. Ун-т), 2009, – 114 с.

14. *Макарычев Ю.Н.,* Миндюк Н.Г., Нешков К.И. Тригонометрия. 10 класс, М.: Просвещение, 2008, – 61 с.

15. *Мордкович А.Г.* Алгебра и начала анализа.10-11 классы. Часть 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений(базовый уровень). – 10-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009, – 399 с.

16. *Оганесян В.А.* Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учебное пособие для студ. физ.-мат. фак. пед. ин-тов // В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканин и др.– М.: Просвещение, 1980, – 480 с.

17. *Полякова Т.С.* История математического образования в России. Два века. – М.: МГУ, 2002.

18. *Прасолов В. В.* Три классические задачи на построение. Удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга. М.: Наука, 1992. 80 с. Серия «Популярные лекции по математике», выпуск 62.

19. *Никольский М.К.* Алгебра и начала анализа: Учеб. Для 10 класса общеобразовательных учреждений. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009, – 430 с.

20. *Просветов Г.И.* Тригонометрия. Задачи и решения, Альфа-Пресс, 2010, – 72 с.

21. *Решетников Н.Н.* Тригонометрия в школе: М. Педагогический университет «Первое сентября», 2006.

22. *Темербекова А.А.* Методика преподавания математики: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений// А.А. Темербекова. – М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2003, – 490 с.

23. *Шахмейстер А.Х.* Тригонометрия. Изд. «МЦНМО, Петроглиф, Виктория плюс», 2009, – 752 с.

24. *Шевкин А.В.* Обучение решению текстовых задач.: Книга для учителя// А.В. Шевкин. – М.:Галс плюс, 1998, – 168 с.

25. *Шевкин А.В.* Роль текстовых задач в школьном курсе математике. Математика – 2005, – № 17, – С. 23-30.

26. *Щетников А. И.* Как были найдены некоторые решения трёх классических задач древности? Математическое образование, № 4 (48), 2008, – С. 3–15.