

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра высшей математики

Выпускная квалификационная работа

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОРИГАМИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В
ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ**

Работу выполнила:
студентка 151 группы
Направление подготовки 44.03.05
«Педагогическое образование»,
профили «Математика и
Информатика»
Курбанова Александра
Викторовна

«Допущена к защите в ГЭК»
Зав. кафедрой

подпись

«_____» _____ 2017 г.

подпись

Научный руководитель:
канд. пед. наук, доцент кафедры
высшей математики
Шеремет Галина Геннадьевна

подпись

ПЕРМЬ
2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. ОРИГАМИ КАК МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ.....	7
1.1. Аксиоматический метод: основные положения, модель системы.....	
аксиом, требования	7
1.2. Математические теории: оригами, конструктивная геометрия	9
1.3. Проверка аксиом оригами.....	13
ГЛАВА 2. ОРИГАМИ В ПРОПЕДЕВТИКЕ ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ....	18
2.1. Возрастные особенности обучающихся в 5-6-х классах	18
2.2. Пропедевтика: определение, принципы, существующие подходы.....	
к пропедевтике геометрии.....	20
2.3. Преимущества использования оригами в пропедевтическом курсе	24
2.4. Возможности изучения геометрии в пропедевтическом курсе	
на основе разработанного пособия «В мир геометрии вместе с оригами».	26
2.4.1. Основные теоретические положения программы	27
2.4.2. Содержание программы	29
2.4.3. Примерное тематическое планирование	31
2.4.4. Пример разработки темы программы.....	33
ГЛАВА 3. ОРИГАМИ В СИСТЕМАТИЧЕСКОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ..	44
3.1. Роль оригами в систематическом курсе геометрии.....	44
3.2. Оригами – источник планиметрических задач.....	49
3.3. Моделирование при помощи оригами.....	52
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	59
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	64
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	69

ВВЕДЕНИЕ

Возникновение интереса к математике у значительного числа учащихся зависит от методики ее преподавания, от того, насколько умело будет построена учебная работа. Необходимость включения каждого ученика в деятельность обеспечивает формирование и развитие познавательных мотивов. Это особенно важно в подростковом возрасте, когда еще формируются, а иногда и только определяются постоянные интересы и склонности к тому или иному предмету.

Оторванность геометрии от практической деятельности – основной недостаток преподавания математики в традиционной школе, что является существенной причиной отчуждения школьников от данного предмета и проявляется в потере их интереса к геометрии. Одним из механизмов развития геометрического мышления и поддержания интереса к геометрии может стать совместное изучение геометрии и оригами. Это и определяет **актуальность** нашего исследования.

Объектом исследования является процесс обучения геометрии, **предметом исследования** – возможность использования оригами в преподавании геометрии.

Гипотеза исследования: оригами может являться одним из эффективных средств обучения геометрии.

Цель работы: исследовать математическую теорию оригами и ее возможности в преподавании геометрии.

В связи с этим необходимо было решить следующие задачи:

1) рассмотреть основные положения, касающиеся аксиоматического метода (что называют аксиоматическим методом, модель системы аксиом, требования к системе аксиом);

2) сравнить теорию оригами с теорией конструктивной геометрии, проверить выполняются ли требования, предъявляемые к системе аксиом, в системе аксиом оригами;

3) исследовать психолого-педагогическую литературу, посвященную возможности обучения элементам геометрии обучающихся 5-6 классов;

4) проанализировать определения понятия «пропедевтический курс» и существующие подходы к преподаванию элементов геометрии с позиции пропедевтики;

5) показать преимущества использования оригами в пропедевтическом курсе геометрии;

6) показать возможности оригами при изучении:

– геометрии в пропедевтическом курсе на основе разработанного пособия «В мир геометрии вместе с оригами»;

– систематического курса геометрии средней и старшей школы;

7) сделать вывод по каждой главе дипломного исследования, подтвердить или опровергнуть гипотезу, подвести итог о достижении цели исследования;

Для решения поставленных задач и проверки исходного предположения были использованы следующие методы исследования:

1) изучение и анализ психолого-педагогической, методической и специальной литературы по проблематике исследования;

2) сравнение двух математических теорий;

3) метод аналогии при построении математической теории оригами;

4) анкетирование.

Научная новизна и теоретическая значимость исследования состоит в том, что разработана программа пропедевтического курса геометрии «В мир геометрии вместе с оригами» и показаны возможности изучения геометрии посредством оригами в систематическом курсе. Обоснована

целесообразность включения оригами при изучении геометрии в пропедевтическом курсе геометрии.

Практическая значимость результатов исследования состоит в том, что разработанное пособие «В мир геометрии вместе с оригами» может быть использовано учителями математики при обучении геометрии.

Структура дипломной работы состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, состоящего из 34 наименований, приложения. Работа содержит 30 иллюстраций и 2 таблицы.

Во введении обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цель и гипотеза исследования, определены объект, предмет, задачи и методы исследования, раскрыты научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы.

Первая глава – «Оригами как математическая теория», – состоит из трех параграфов.

Характеристика аксиоматического метода позволила нам по аналогии построить аксиоматическую теорию оригами (первый параграф). Во втором параграфе реализовано сравнение двух математических теорий (оригами и конструктивная геометрия) путем сопоставления их аксиом. Третий параграф представляет собой проверку требований к системе аксиом оригами.

Вторая глава – «Оригами в пропедевтике обучения геометрии», – содержит четыре параграфа. В первом параграфе рассматриваются возрастные особенности обучающихся в 5-6-х классах.

Далее рассматриваются основные положения и подходы, относящиеся к пропедевтике геометрии: определения, принципы П. А. Карасева, существующие пропедевтические курсы. Оригами, как средство, в существующих курсах представлено несущественно, чтобы обосновать возможность использования оригами, мы выделили преимущества его использования в пропедевтическом курсе (третий параграф).

Четвертый параграф иллюстрирует возможности использования оригами в пропедевтическом курсе геометрии на основе разработанного пособия «В мир геометрии вместе с оригами». Данный параграф детализируется следующими фактами: основные теоретические положения программы, содержание программы, примерное тематическое планирование, пример разработки темы программы.

Третья глава – «Оригами в систематическом курсе геометрии», – содержит 3 параграфа. Первый параграф показывает роль оригами в систематическом курсе геометрии, далее оригами рассматривается как источник задач и способ моделирования пространственных фигур.

В заключении формулируются основные выводы и результаты проведенного исследования.

В приложении приведены результаты анкетирования, согласно которым делается вывод о подтверждении гипотезы.

ГЛАВА 1. ОРИГАМИ КАК МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Оригами – искусство складывания из бумаги, – в настоящее время приобретает большую популярность не столько как увлечение, сколько как механизм, помогающий современной науке. В связи этим представляется интересным и необходимым рассматривать оригами с точки зрения науки.

Изучив историю оригами и современные тенденции по его развитию, можно заметить математическую направленность использования оригами, проиллюстрируем этот факт.

Начиная с 1970-х годов, когда ряд оригамистов начали систематизировать всевозможные комбинации сгибов с целью изучить, какие типы расстояний можно построить, сочетая сгибы различным способом, идет отсчет работы над оригами, как над математической теорией. Первая систематическая теория складывания принадлежит Хумиаки Хузита, который описал набор шести базовых способов однозначно определить прямую, то есть линию сгиба, различными комбинациями совмещений существующих точек, линий и собственно линий сгиба. Эти шесть действий стали известны как «Аксиомы Хузита» (Huzita's Axioms, HA).

1.1. Аксиоматический метод: основные положения, модель системы аксиом, требования

Аксиоматический метод впервые был успешно применен при изложении геометрии Евклидом, греческим ученым, жившим в III в. до н.э. Его «Начала» построены следующим образом.

Сначала даются определения и перечисляются основные допущения – постулаты и аксиомы. Затем идут предложения (теоремы), которые Евклид стремился доказать по правилам логики на основании принятых постулат и аксиом.

Аксиоматический метод является в настоящее время основным методом исследования не только в геометрии, но и во многих других разделах современной математики.

Всякая аксиоматическая теория строится по следующему плану:

- 1) перечисляются основные понятия – основные образы и основные отношения;
- 2) приводится список аксиом-предложений, в которых фиксируются некоторые свойства основных понятий, необходимые для построения теории;
- 3) все следующие предложения (теоремы) должны быть получены из аксиом при помощи лишь одних логических законов;
- 4) все понятия, не являющиеся основными, должны быть определены через основные и понятия, ранее введенные [17, с. 21].

Понятие модели (интерпретации) системы аксиом. Допустим, что для данной системы аксиом K теории Γ_k существуют некоторые множества и такие отношения между элементами этих множеств, что все аксиомы K будут истинными предложениями.

Основные объекты математической теории Γ_k , определенной аксиомами K , могут быть любой природы, и основные отношения могут иметь любой конкретный смысл, лишь бы эти объекты и отношения удовлетворяли данной системе аксиом.

Всякий набор конкретных множеств и отношений между их элементами, удовлетворяющий требованиям системы аксиом аксиоматической теории Γ_k , называется моделью (интерпретацией) данной системы аксиом [14, с. 67].

Требования в системе аксиом. При аксиоматическом построении математической дисциплины мы принимаем некоторые предложения в качестве аксиом, из которых другие предложения выводятся по правилам формальной логики. Однако не всякую совокупность предложений данной теории можно принять в качестве системы аксиом. Для того чтобы

совокупность предложений была аксиоматикой необходимо выполнение требований:

- 1) непротиворечивость;
- 2) независимость;
- 3) полнота.

Система аксиом называется *непротиворечивой* или *совместной*, если определяемая ею теория средствами обычной логики не содержит противоречия, то есть невозможно доказать в этой теории какое-нибудь предложение A и его отрицание. В противном случае система аксиом называется противоречивой [9, с. 75].

Вопрос о непротиворечивости данной системы аксиом K сводится к другому вопросу – построению интерпретации рассматриваемой системы аксиом. Если данные аксиомы допускают интерпретацию на совокупности некоторых образов и отношений между ними в некоторой по предположению непротиворечивой теории, то из этих данных аксиом невозможно вывести противоречия.

Система аксиом называется *независимой*, если никакую из аксиом невозможно вывести как теорему из остальных аксиом. В противном случае система аксиом называется зависимой [2, с. 35].

Непротиворечивая система аксиом называется *полной*, если любые две ее модели (интерпретации) изоморфны.

Таким образом, рассмотрим, как строится аксиоматическая теория, что называется моделью (или интерпретацией) системы аксиом и каким требованиям должна соответствовать совокупность предложений, чтобы называться системой аксиом.

1.2. Математические теории: оригами, конструктивная геометрия

Рассмотрим оригами как математическую теорию построений, определим основные понятия, основные отношения между понятиями и

аксиомы оригами, а также проверим выполнение требований, предъявляемых к аксиоматике.

Основные понятия: точка, линия сгиба, квадратный лист бумаги.

Основные отношения: отношение принадлежности, отношение лежать между, отношения порядка.

Аксиомы Хузита (см. Рис. 1):

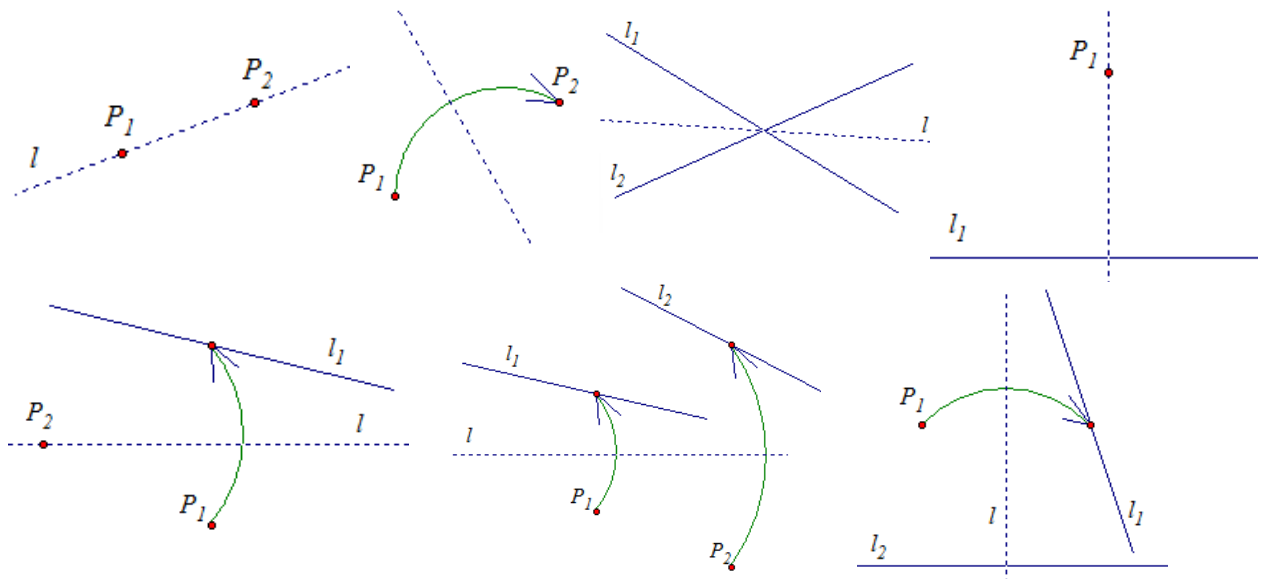


Рис. 1. Аксиомы Хузита

О1) задавшись двумя точками P_1 и P_2 , возможно соединить их прямой (сгибом);

О2) задавшись двумя точками P_1 и P_2 , возможно сгибом наложить одну точку на другую;

О3) имея две прямые l_1 и l_2 , мы можем совместить эти прямые сгибом;

О4) имея произвольную точку P_1 и прямую l_1 , возможно провести перпендикуляр к данной прямой через данную точку;

О5) имея две точки P_1 и P_2 , и прямую l_1 , возможно поместить точку P_1 на прямую l_1 сгибом, проходящим через точку P_2 ;

О6) задавшись двумя прямыми l_1 и l_2 , и двумя точками P_1 и P_2 , мы можем найти сгиб, одновременно помещающий P_1 на l_1 , и P_2 на l_2 ;

О7) имея точку P_1 и две прямые l_1 и l_2 , возможно найти сгиб, помещающий P_1 на l_1 , и при этом перпендикулярный l_2 .

Для реализации сравнения рассмотрим математическую теорию конструктивной геометрии, где основным инструментом является чертежный угольник.

Основные понятия: точка, прямая, плоскость.

Основные отношения: отношение принадлежности, отношение лежать между, отношения порядка.

Аксиомы чертежного угольника. Чертежный угольник позволяет выполнить следующие геометрические построения:

- К1) построить отрезок, соединяющий две построенные точки;
- К2) построить прямую, проходящую через две построенные точки;
- К3) через данную точку плоскости провести прямую, перпендикулярную некоторой построенной прямой;

К4) если построены отрезок AB и некоторая фигура Φ , то установить, содержит ли фигура Φ точку, из которой этот отрезок виден под прямым углом, и если такая точка существует, то построить такую точку.

Поставим в соответствие аксиомам оригами соответствующие аксиомы и теоремы конструктивной геометрии (см. Табл. 1):

Таблица 1

Оригами	Конструктивная геометрия
О1. Существует единственный сгиб, проходящий через две данные точки.	К2. Можно построить единственную прямую, проходящую через две данные точки.
О2. Существует единственный сгиб, совмещающий две данные точки.	Задача построения серединного перпендикуляра: К1. Можно построить отрезок, соединяющий две построенные точки. К3. Можно через данную точку плоскости построить прямую перпендикулярную некоторому отрезку прямой. Получается это следующим образом: Строим перпендикуляры к концам отрезка, на любом перпендикуляре берем точку, через нее строим еще один

Оригами	Конструктивная геометрия
	перпендикуляр, получаем прямоугольник. Перпендикуляр, проведенный через точку пересечения диагоналей на отрезок делит его на две равные части.
О3. Существует сгиб, совмещающий две данные прямые.	Задача построения биссектрисы угла (см. Рис. 2).
О4. Существует единственный сгиб, проходящий через данную точку и перпендикулярный данной прямой.	К3. Можно через данную точку плоскости построить прямую перпендикулярную некоторой построенной прямой.
О5. Если существует сгиб, проходящий через данную точку и помещающий другую данную точку на данную прямую, то его можно построить.	Задача построения высоты равнобедренного треугольника, проведенной к основанию; длины равных сторон этого треугольника определяются длиной отрезка $[P_1P_2]$. К3. Через данную точку плоскости провести прямую, перпендикулярную некоторой построенной прямой. К4. Если построены отрезок $[AB]$ и некоторая фигура Φ , то установить, содержит ли фигура Φ точку, из которой этот отрезок виден под прямым углом, и если такая точка существует, то построить такую точку.

Продemonстрируем реализацию аксиом оригами через аксиомы конструктивной геометрии на примере аксиомы О3, то есть покажем решение задачи на построение чертежным угольником:

(О3) Построение биссектрисы угла:

Дано: $a \cap b = O, A \in c$.

Построение:

- 1) $c \perp a, c \cap b = B, A \in c$;
- 2) $d \perp a, O \in d$;
- 3) $e \perp c, e \cap d = C, B \in e$;
- 4) $(AC), (AC) \cap (OB) = D$;
- 5) $f \perp d, f \cap d = E, D \in f$;
- 6) $(BE), (BE) \cap a = F$;
- 7) $G \in f$, отрезок $[AF]$ виден под прямым углом из точки G ;
- 8) (AG) ;
- 9) $m \perp (AG), m \cap (AG) = H, O \in m$;

10) (OH) , (OH) – биссектриса (рис. 2).

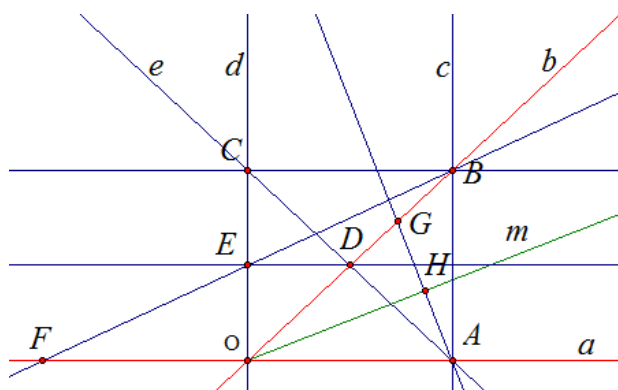


Рис. 2. Построение биссектрисы угла чертежным угольником

Аналогично можно построить реализацию аксиом O1-O5, отсюда можно сделать вывод, что система аксиом O1-O5 эквивалентна системе аксиом конструктивной геометрии, где в качестве основного инструмента используется чертежный угольник. Но вопрос об аксиомах O6 и O7 остается открытым, потому что они являются задачами построения корней кубических уравнений, что методами конструктивной геометрии в общем случае невозможно.

Следовательно, сравнение двух этих теорий не может дать нам ответа об аксиоматическом построении всей системы аксиом O1-O7 оригами, так как требуется применение других знаний. Но на основании полученных результатов можно констатировать, что класс задач на построение, решаемых методами оригами, значительно шире.

1.3. Проверка аксиом оригами

Рассмотрим выполняются ли требования непротиворечивости, независимости и полноты в системе аксиом O1-O7.

Непротиворечивость. Требование непротиворечивости тесно связано с построением конкретной реализации системы аксиом, в нашем случае это декартова реализация.

Здесь, точкой мы будем называть любую пару вещественных чисел x и y , взятых в определенном порядке (x, y) , а эти числа – координатами точки. Прямой будем называть совокупность всех точек, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению $ax + by + c = 0$. Уравнение будем называть уравнением прямой, прямые $x = 0$ и $y = 0$ – осями координат, а точку $(0, 0)$ – началом координат.

Мы будем говорить, что точка принадлежит прямой, если она является одной из ее точек. Таким образом, точка принадлежит прямой, если ее координаты удовлетворяют уравнению прямой.

При таком конкретном понимании точек и прямых каждая из аксиом origami представляет собой некоторое утверждение, относящееся к вещественным числам. Требуется показать, что каждое утверждение имеет место в силу соответствующих теорем арифметики [26, с 49].

Доказательство представлено для первых пяти аксиом, но мы рассмотрим доказательство только аксиомы O2.

O2) Существует единственный сгиб, совмещающий две данные точки.

Для начала покажем, что точка, являющаяся серединой отрезка, принадлежит прямой, проходящей через данные точки. Данные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , тогда $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ – середина отрезка. Тогда действительно, прямая $(x_2 - x_1)\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) + (y_2 - y_1)\left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 0$ проходит через каждую из точек (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Покажем, что через точку $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = (x_0, y_0)$ можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной $ax + by + c = 0$.

Допустим, что существует две такие прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Обе системы $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$ несовместимы. Поэтому $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$. Отсюда $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$. И так как система $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ имеет решение $(x = x_0, y = y_0)$, то ее решения зависимы, а следовательно, прямые совпадают.

Доказательство аксиом О6-О7 на данный момент не представляется возможным.

Таким образом можно сделать вывод, что если система алгебраических уравнений не противоречива, то и математическая теория оригами непротиворечива.

Независимость. Рассмотрим подробнее вопрос о свойстве независимости математической теории применительно к данной системе аксиом. Рассмотрим О3 и покажем ее зависимость от остальных.

О3) Существует сгиб, совмещающий две данные прямые.

Дано: a, b – прямые.

Рассмотрим следующие случаи:

а) $a \parallel b$. По аксиоме О2 мы можем построить середины E, F отрезков $[AB]$, $[CD]$ соответственно (см. Рис. 13). По аксиоме О1 строим прямую, проходящую через середины. $[EF]$ – искомая прямая (искомый сгиб).

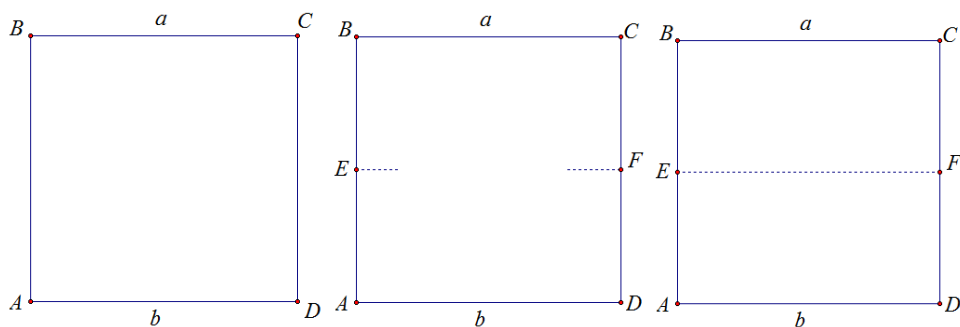


Рис. 3. Реализация аксиомы О1 методом оригами

б) $a \cap b = O$. По аксиоме O4 возможно построить прямую (AB) . По аксиоме O5 получаем исходный сгиб (OC) (см. Рис. 4).

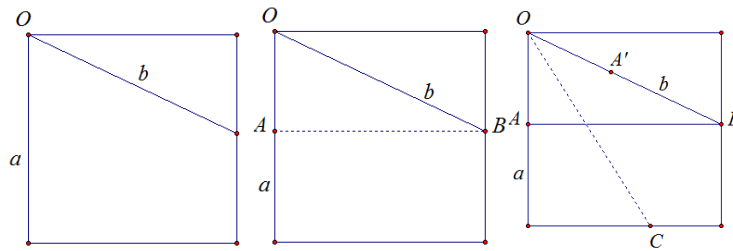


Рис. 4. Реализация аксиомы O4 методом оригами

в) $a \cap b = O_{\infty}$. Аксиома O4 позволяет нам построить перпендикуляр (CE) , биссектриса $[CF)$ выполняется по предыдущему пункту, далее перпендикуляр (HG) по аксиоме O4 и прямая (IJ) , выполняемая по аксиоме O1, искомая (см. Рис. 5).

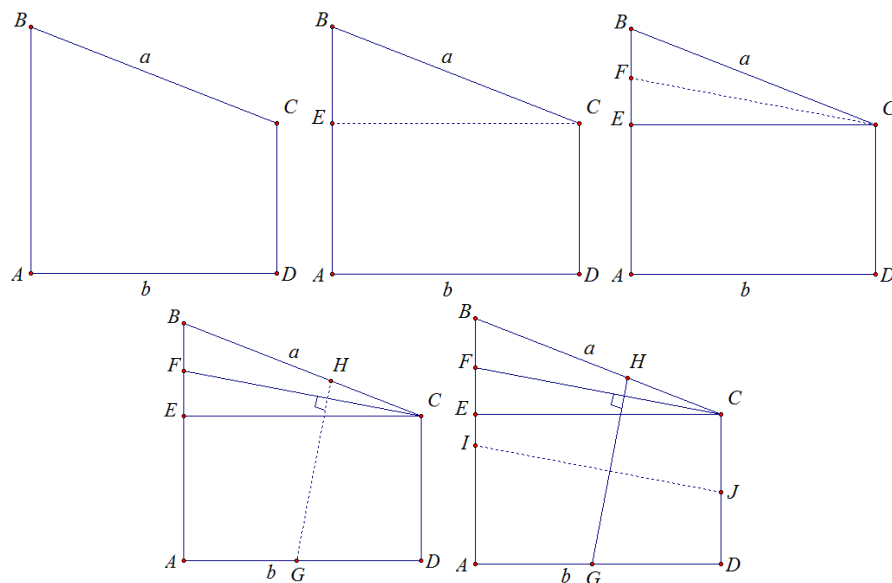


Рис. 5. Доказательство свойства независимости

Таким образом, система аксиом O1–O7 является зависимой системой, так как третью аксиому можно вывести как теорему из остальных. Но в практическом приложении нам необходима эта зависимость, потому что интересует наименьшее количество складываний листа бумаги.

Полнота. Тема доказательства полноты на данный момент открыта, и нет однозначного ответа на этот вопрос. Однако в найденной нами литературе [34], существует доказательство и вывод полноты системы аксиом НА, которые опираются на подсчет степеней свободы в системе операций. Но так как этот вопрос относится скорее к механике, чем к математике, то мы не беремся его рассматривать.

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что с помощью оригами можно решить большее число задач на построение, чем средствами конструктивной геометрии, где основным инструментом – чертежный угольник. Однако описанная в работе система аксиом оригами является независимой.

Таким образом, изложенные выше рассуждения позволяют нам назвать оригами математической теорией, в которой действует аксиоматический метод, однако с той оговоркой, что независимость системы аксиом можно было бы достигнуть, но тогда практическое приложение оригами бы затруднилось, что нецелесообразно. Поэтому оригами – это математическая теория с зависимой системой аксиом.

ГЛАВА 2. ОРИГАМИ В ПРОПЕДЕВТИКЕ ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Сложность геометрии как предмета обусловлена многими причинами, в том числе некоторых методисты выделяют недостаточную реализацию непрерывного геометрического образования, под которой мы подразумеваем недостаточное изучение досистематического курса геометрии.

Реализация пропедевтического курса геометрии в 5-6 классах в целом, а также возможность использования при этом оригами обусловлена ответами на некоторые вопросы:

- во-первых, каковы возрастные особенности учащихся 5-6 классов, имеет ли смысл изучать элементы геометрии в этом возрасте?
- во-вторых, что подразумевается под термином «пропедевтика» и какие существуют подходы к пропедевтике систематического курса геометрии?
- в-третьих, какое преимущество (или какую ценность) имеет включение оригами в пропедевтический курс?

Ответим на эти вопросы.

2.1. Возрастные особенности обучающихся в 5-6-х классах

Различные классификации определяют возраст учащихся 5-6-х классов (примерно 10-12 лет) в различные возрастные периоды. Например, в новейшей классификации Д. Б. Бромлей возраст в границах 11-15 лет называет подростковым, а Э. Эриксон 8-12 лет называет школьным возрастом, однако мы будем придерживаться периодизации, предложенной Д. Б. Элькониным, где акцент делается на появлении новых психических образований, обусловливаемых сменой и развитием ведущих типов

деятельности. У Д. Б. Эльконина возраст от 10-11 до 14-15 считается подростковым [4, с. 199].

По мнению Л. С. Выготского, главное в развитии мышления подростка – овладение процессом образования понятий, который ведет к высшей форме интеллектуальной деятельности. Функция образования понятий лежит в основе всех интеллектуальных изменений в этом возрасте. «Понимание действительности, понимание других и понимание себя – вот что приносит с собой мышление в понятия» (Л. С. Выготский) [25, с. 168].

Приступая к усвоению основ наук, подросток должен научиться рассуждать теоретически. Это значит, что перед изучением систематического курса любой науки (в нашем случае – геометрии) необходима подготовка, содержащая в первую очередь такие методы обучения, которые затрагивают психические процессы данного возраста [1, с. 74].

Наглядно-образный способ мышления – ведущий способ мышления детей 10-12 лет. Исследования психологов и физиологов показали, что правое (образное) полушарие наиболее интенсивно развивается у детей младшего школьного возраста. Конечно, следует понимать условность изолированной деятельности обоих полушарий головного мозга. Оба полушария взаимосвязаны и участвуют в деятельности мышления с самого начала развития ребенка, но в определенные периоды становления личности, роль полушарий различна в зависимости от деятельности ребенка и, конечно, от его психического развития [16, с.132].

Психологи утверждают, что если не учитывать естественный путь познания через последовательное прохождение его этапов: чувственное, чувственно-инструментальное, образно-ассоциативное, абстрактно-ассоциативное, а сразу формировать знания только при помощи словесных описаний (то есть, на абстрактно-ассоциативном уровне), то понимание будет затруднено, так как познание сущности вещей требует знакомства со

свойствами объектов во всей их полноте. Чтобы словесное описание объектов было наполнено содержанием, необходимо иметь запас различных образов объектов, их отношений с другими объектами, а это возможно при эмпирическом (наблюдение и описание объектов и их свойств) и экспериментальном (конструирование, моделирование, измерение, построение, изображение объектов) исследовании объектов окружающей действительности. А далее, в результате накопления фактов, полученных эмпирическим и экспериментальным путем, необходимо подводить учащихся к потребности в их логическом обосновании [27, с. 89].

Таким образом, необходимо так организовать деятельность учащихся по изучению математического и геометрического материалов, чтобы гармонично развивались оба полушария головного мозга: левое полушарие, отвечающее за логическое, рациональное мышление, и правое – за образное, эмоциональное.

2.2. Пропедевтика: определение, принципы, существующие подходы к пропедевтике геометрии

Прежде чем разрабатывать свою программу пропедевтики геометрии, необходимо понять, что такое пропедевтика, какие существуют подходы к пропедевтике систематического курса геометрии.

В словарях находим следующие определения данному понятию:

Пропедевтика (греч. *propaideio* – предваряю) – сокращенное изложение какой-либо науки в систематизированном виде, то есть подготовительный, вводный курс в какую-либо науку, предшествующий более глубокому и детальному изучению соответствующей дисциплины [15].

Пропедевтика – введение в какую-либо науку [21, с. 687].

Пропедевтика (от греч. *propaideuo* – предварительно обучаю) – введение в какую-либо науку, предварительный вводный курс, систематически изложенный в сжатой и элементарной форме [30, с. 549].

В целом, приведенные определения имеют один и тот же смысловой оттенок того, что пропедевтика – это вводный курс, который обладает следующими свойствами:

- курс предваряет систематическое изучение какой-либо науки, выполняя подготовительную функцию;
- курс может представлять собой сокращенное изложение или изложение в элементарной форме.

В школе пропедевтическими курсами различных наук или некоторых их теорий и методов исследования являются школьные предметы, которые должны иметь завершенный характер, а именно включать два этапа: во-первых, прохождение вводного курса, во-вторых, систематическое изучение понятий, некоторых фрагментов теории и ее приложений.

Согласно П. А. Карасеву существует два метода преподавания геометрии в школе: во-первых, дедуктивный метод, который имеет значительный минус – не учитывает психических особенностей детей, во-вторых, это наглядная геометрия (или пропедевтика).

Значимость и обоснование второго метода А. П. Карасев связывает с тем, что еще задолго до Евклида геометрические сведения, являющиеся началами учения о законах пространства, основывались на непосредственном опыте и наблюдении, и выводы делались на основании простой наглядности. Этот метод интуитивного и непосредственного опытного усвоения геометрических законов, тесно связанный с практикой построения и измерения геометрических форм, более отвечает особенностям детской психики с ее остротой восприятий, с активным воображением, с памятью главным образом моторного и зрительного типа, но еще со слабо развитым логическим мышлением. Такой путь ознакомления с началами геометрии, дающий возможность накопления и

использования геометрических сведений при помощи интуиции и опыта, называется интуитивной или наглядной геометрией [12, с. 12].

Таким образом, П. А. Карасев возможным досистематическим изложением геометрии называет наглядную геометрию, отбор содержания и методика курса наглядной геометрии, по его мнению, должны соответствовать следующим принципам:

1) план и программы преподавания наглядной геометрии должны зависеть, помимо от содержания, еще и от психологических особенностей детского возраста, и от общей целевой обстановки работы школы;

2) основными методическими принципами построения курса наглядной геометрии должны быть наглядность и конкретность его преподавания и максимальное количество практических упражнений конструктивного и чертежного характера;

3) в основу преподавания должен быть положен индуктивный метод, основанный на наглядном и практическом изучении конкретных фактов и последующем их обобщении, и отказ от дедуктивно-логического метода доказательства геометрических положений;

4) построение курса и метод его преподавания должны идти в развитии геометрического мышления от простого к сложному, от конкретного к отвлеченному;

5) движение является важнейшим фактором как создания геометрических форм, так и уяснения их свойств;

6) в учебной работе необходимо задействовать все виды памяти: зрительную, моторную, слуховую;

7) необходимо отказаться от заучивания определений, правил и др. Вместо этого необходимо вводить «живое описание» детьми своих наблюдений, подмеченных геометрических свойств;

8) главным критерием усвоения геометрии должно быть умение (умение построить фигуру, описать ее построение и др.).

Таким образом, согласно П. А. Карасеву, курс наглядной геометрии должен быть обеспечен необходимыми наглядными пособиями (наборы геометрических деталей, набор моделей отрезков, измерительные приборы и т.д.), а также должен сопровождаться наглядным интуитивным методом преподавания.

Далее идею пропедевтического курса наглядной геометрии реализуют авторы учебников «Математика: Наглядная геометрия. 5-6 класс» (И. Ф. Шарыгин, Л. Н. Ерганжиева) [33] и «Наглядная геометрия» (Т.Г. Ходот, А. Ю. Ходот) [32]. Содержание учебников данных авторов направлены на развитие геометрической интуиции, пространственного воображения, логического мышления и изобразительных навыков учащихся. Готовит обучающихся к успешному усвоению систематического курса геометрии средней школы. Этому способствует, во-первых, стиль изложения материала, а во-вторых, художественное красочное оформление учебников.

В данное время существует большое количество авторских курсов учителей, которые в различной степени используют материалы вышеизложенных авторов. Это программа «Наглядная геометрия для 5-6-х классов» (Л.А. Мосенкова), «Введение курса наглядно-практической геометрии как пропедевтики систематического курса геометрии» (А.Г. Белоусова), «Наглядно-практическая геометрия для учащихся 5-6-х классов» (С.В. Кириллова) и др.

Таким образом, к выводам данного пункта можно отнести: во-первых, осмысление понятия «пропедевтика», во-вторых, анализ существующих пропедевтических курсов геометрии показывает достаточную проработку данной темы, однако ничего не мешает нам создать некоторую альтернативу курсу наглядной геометрии, так как оригами обладает достаточно большими наглядными способностями, и как средство в вышеизложенных курсах используется несущественно.

2.3. Преимущества использования оригами в пропедевтическом курсе

При преподавании различных учебных предметов следует помнить, что прочные знания у детей будут в том случае, если учитель будет опираться на жизненный опыт ребенка, а применение наглядности при изучении геометрического материала позволит прочно и сознательно усвоить все программные вопросы.

Чтобы решить данную проблему при изучении геометрии необходимо учесть то, что мир школьной геометрии требует постоянного обращения к образам. Образную, наглядную модель евклидовой геометрии позволяет создать оригами. Оно дает возможность познакомить со всеми геометрическими объектами и облегчает усвоение систематического курса геометрии. Изучение превращений квадратного листа бумаги, возможно, – один из наиболее интересных путей создания образов плоских и пространственных геометрических фигур [24].

Выделим преимущества использования оригами в преподавании пропедевтического курса геометрии:

- 1) оригами обеспечивает наглядность и образность изучаемого геометрического материала (факты и геометрические объекты возникают в процессе складывания, то есть показывают практическую потребность в новом знании, возможность отыскать свойства не теоретически, а посредством работы с фигуркой);

- 2) занятия оригами очень полезны для развития мелких и точных движений рук, установления координации [8, с. 16]. Активная работа обеих рук влечет за собой повышение активности полушарий головного мозга, в связи с этим занятия оригами интенсивнее и на более высоком уровне развивают следующие психические процессы: восприятие (целостность и структурность образа), внимание (концентрация и устойчивость), память (зрительная и кинестетическая), мышление (пространственное и креативное) [24];

3) оригами дает возможность создания творческих заданий и игровых ситуаций (придумать сказку, героями которой были бы созданные фигурки оригами, разыграть спектакль, герои и декорации которого создаются учащимися; соревнование «Чья лягушка дальше прыгает?», «Чей самолетик лучше летает?» и т. д.);

4) включение оригами в учебный процесс дает возможность расширения коммуникативных способностей детей (оказать помощь при складывании фигурки, самому попросить помощи, совместное складывание многомодульной фигуры, например, многогранника или кусудамы);

5) оригами способствует развитию художественного вкуса, творческих способностей и фантазии (создание кусудамы – одного из ярких проявлений искусства оригами, придумывание своей фигурки оригами и т.д.);

6) с помощью оригами можно изучать не только плоские геометрические фигуры, но также и объемные – пирамиды, призмы, многогранники.

Изложенные параграфом выше пропедевтические курсы содержат разделы, связанные с оригами, но не ставят оригами на первую позицию. Так, например, П. А. Карасев в своей книге «Элементы наглядной геометрии в школе» в пункте «Листок бумаги» с помощью перегибов листа бумаги формулирует свойства ромба, при помощи листка бумаги и карандашей приходит к выводу о том, что положение плоскости вполне определяется тремя точками, и в заключении называет перегибание листа бумаги – очень ценным и богатым геометрическими возможностями наглядным методом [12, с. 47]. «Наглядная геометрия» И. Ф. Шарыгина содержит больше заданий, связанных с оригами, это работа с углами, с квадратом, построение модели куба, флексагон [33] и т.д. Похожая ситуация и с наглядной геометрией автора Т. Г. Ходот.

Учитывая большую методическую пользу, которую можно получить при использовании оригами в изучении досистематического курса геометрии, и недостаточную проработанность данного средства в существующих курсах пропедевтики имеет смысл разработать такой курс, где основным средством обучения будет являться оригами.

2.4. Возможности изучения геометрии в пропедевтическом курсе на основе разработанного пособия «В мир геометрии вместе с оригами»

«В мир геометрии вместе с оригами» – это разработанная нами программа математического кружка, предназначенного для обучающихся 5-6 классов. В силу того, что нет возможности рассмотреть весь материал, который содержит данная программа, рассмотрим некоторые ее составные части и сделаем это по следующему плану:

- 1) основные теоретические положения, включающие цель программы, задачи (обучающие, развивающие, воспитывающие), используемые методы обучения, организационно-методическое обеспечение программы (возраст детей, сроки реализации, режим занятий, наполняемость групп), предполагаемые результаты обучения, формы подведения итогов реализации дополнительной образовательной программы;
- 2) содержание программы;
- 3) примерное тематическое планирование;
- 4) пример разработки некоторых тем программы.

Пособие «В мир геометрии вместе с оригами» доступно для покупки в интернет магазине «OmniScriptum» [13].

2.4.1. Основные теоретические положения программы

Целью данной программы является всестороннее развитие геометрического мышления и формирование геометрических знаний средствами оригами.

Задачи:

Обучающие

- познакомить детей с основными геометрическими понятиями: круг, квадрат, треугольник, угол, сторона, вершина и т.д. Обогащать словарь ребенка специальными терминами;
- формировать умения следовать устным инструкциям;
- обучать различным приемам работы с бумагой;
- создавать композиции с изделиями, выполненными в технике оригами.

Развивающие:

- развивать внимание, память, логическое и пространственное воображения;
- развивать художественный вкус, творческие способности и фантазию детей;
- развивать у детей способность работать руками, приучать к точным движениям пальцев, совершенствовать мелкую моторику рук, развивать глазомер.

Воспитательные:

- воспитывать интерес к искусству оригами;
- расширять коммуникативные способности детей;
- воспитывать трудолюбие, терпение, аккуратность, усидчивость, целенаправленность, критичность, эстетический вкус, чувство удовлетворения от совместной работы, чувство взаимопомощи и коллективизма, самостоятельность в работе, волевые качества.

Используемые методы обучения:

- репродуктивный (воспроизводящий);
- объяснительно-иллюстративный (объяснение сопровождается демонстрацией наглядного материала);
- метод проблемного изложения (педагог ставит проблему и вместе с детьми ищет пути ее решения);
- частично-поисковый.

Организационно-методическое обеспечение программы (возраст детей, сроки реализации, режим занятий, наполняемость групп)

Программа кружка рассчитана на 1 год для обучающихся 5 или 6 классов. Для успешного освоения программы численность детей в группе кружка должна составлять 10-15 человек. Занятия проводятся раз в неделю, всего 34 занятия. В проведении занятий используются как индивидуальные, так и групповые формы работы.

Каждое занятие, как правило, включает теоретическую часть, которая сопряжена с практической. Для практической части можно выбрать любую подвижную модель оригами и выделить основные геометрические фигуры, связанные с ее построением. Процесс складывания должен сопровождаться изучением свойств фигуры. Для закрепления знаний, для получения дополнительных знаний, для игры или соревнования выполняем предложенные задания.

Обучающиеся приобретают необходимые в жизни элементарные знания, умения и навыки работы с бумагой в техниках классического и модульного оригами. В процессе занятий, накапливая практический опыт в изготовлении фигурок из бумаги, геометрических фигур, обучающиеся от простых изделий постепенно переходят к освоению сложных, от изменения каких-то деталей фигурки до моделирования и конструирования новых фигурок, тематических композиций.

В **результате обучения** в математическом кружке обучающийся должен

знать основные геометрические фигуры (как плоские, так и объемные), как обнаружить их свойства, их обозначения и изображение на бумаге;

иметь представление об оригами, принятых условных обозначениях, об основных приемах складывания фигур, о соединении модулей в одну фигуру;

уметь следовать устным инструкциям, читать и зарисовывать схемы фигурок, анализировать свою работу;

приобрести навыки работы с бумагой, со схемами оригами, построения моделей геометрических фигур методами оригами;

иметь опыт красиво и грамотно оформить фигурку, работы в команде.

Формы подведения итогов реализации дополнительной образовательной программы:

- составление альбома лучших работ;
- проведение выставок работ учащихся (в классе, в школе);
- участие в городских выставках детского прикладного искусства.

2.4.2. Содержание программы

Рассмотрим **содержание занятий математического кружка «В мир геометрии вместе с оригами»**. Содержание темы сопровождается ее краткой характеристикой и вариантами моделей, складываемых из бумаги фигур.

Тема 1. Введение. История оригами. Проведение игры «В поисках оригами»: игра-квест знакомит учащихся с историей оригами, основными этапами его развития. Игра создает атмосферу загадки и благодаря различным тайнам активизирует познавательную деятельность учащихся.

Тема 2. Условные обозначения оригами. Виды сгибов в оригами, их условные обозначения, геометрическая интерпретация сгибов. Геометрия циркуля и линейки, как средств рисования схем оригами. Транспортир.

Модель: самолетик, построение модели и схемы к ней.

Тема 3. Простейшие фигуры и их обозначения. Точка, прямая, отрезок, луч, угол: их описание и графическое изображение. Решение задач на закрепление понятий. Узнавание геометрических фигур на листе бумаги в процессе складывания.

Модель: различные самолетики.

Тема 4. Квадрат. Определение, свойства квадрата, средняя линия квадрата, диагональ квадрата, на какие части делят квадрат диагональ и средняя линия. Равенство фигур, как проверить равенство фигур.

Модель: различные фигурки животных.

Тема 5. Прямоугольник, ромб, параллелограмм. Прямоугольник, ромб, параллелограмм: определения и свойства. Можно ли назвать прямоугольник (ромб, квадрат) параллелограммом? Какие признаки необходимо добавить?

Модель: различные звезды (классическое и модульное оригами).

Тема 6. Куб, прямоугольный параллелепипед. Многогранник: грани, вершины, ребра. Куб: какой многоугольник является гранью? Мини-исследование свойств. Прямоугольный параллелепипед: определение, измерения. Когда прямоугольный параллелепипед можно назвать кубом?

Модель: построение куба (построение сплошной и реберной модели), создание коробочек.

Тема 7. Треугольник. Треугольник: определение, название элементов, замечательные линии и точки треугольника.

Модель: мебель.

Тема 8. Симметрия. Понятие «симметрия», виды симметрий, симметрия вокруг нас, фигуры, обладающие осевой, центральной симметрией, нахождение в фигурках оригами осей и центров симметрии.

Модель: бабочки.

Тема 9. Правильные многоугольники. Правильные многоугольники: определение, методы построения, ученые, занимающиеся этим вопросом. Построение правильных многоугольников, применение полученных многоугольников для построения фигур оригами.

Модель: цветы из бумаги (лист бумаги имеет форму правильного многоугольника).

Тема 10. Правильные многогранники. Правильные многогранники: определение, формула Эйлера. Модели правильных многогранников. Кусудамы и их связь с правильными многогранниками.

Модель: тетраэдр, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр: реберные и сплошные модели; кусудамы на основе додекаэдра.

Тема 11. Аксиоматика. Элементы аксиоматики оригами: основные понятия, отношения и аксиомы оригами.

Модель: закладка для книги.

2.4.3. Примерное тематическое планирование

Примерное тематическое планирование оформлено в виде таблицы (см. Табл. 2):

Таблица 2

№ п/п	Тема	Колич ество часов
1	Введение. История оригами	1
2	Условные обозначения оригами	2
	<i>Работа со схемами фигурок оригами (знакомство с азбукой оригами, договоренность учителя и обучающихся о системе используемых при складывании фраз)</i>	1
	<i>Работа с чертежными инструментами при построении собственных схем фигурок оригами.</i>	1
3	Простейшие фигуры и их обозначения	2
	<i>Знакомство с простейшими фигурами и их обозначениями, узнавание их в схеме фигурки оригами.</i>	1
	<i>Работа с простейшими фигурами на листе бумаги (при выполнении предлагаемых заданий).</i>	1
4	Квадрат	4
	<i>Формулирование определений квадрата, прямоугольника, выявление свойств квадрата при складывании модели прыгающей лягушки.</i>	1
	<i>Формирование навыка нахождения известных геометрических фигур при складывании бумажной модели, проговаривание определений, свойств (при выполнении предлагаемых заданий).</i>	1
	<i>Решение логических задач, связанных с квадратом (при выполнении предлагаемых заданий).</i>	1
	<i>Решение творческих заданий – придумать сказку, придумать свою модель фигурки оригами (при выполнении предлагаемых заданий).</i>	1
5	Прямоугольник, ромб, параллелограмм	4
	<i>Прямоугольник: формулирование определения и свойств при работе с прямоугольным листом бумаги.</i>	1
	<i>Параллелограмм: формулирование определения и свойств при складывании модуля для фигурки «Звезда».</i>	1
	<i>Ромб: формулирование определения и свойств при складывании модуля для фигурки «Звезда».</i>	1
	<i>Доказательство: получаемая из бумаги фигурка является ромбом (предлагаемые задачи).</i>	1
	<i>Можно ли ромб, прямоугольник, квадрат назвать параллелограммом? Какие существенные признаки их характеризуют? Обсуждение с учителем и проверка знаний при выполнении логических задач (предлагаемые задачи).</i>	1
6	Куб, прямоугольный параллелепипед	4
	<i>Обсуждение понятия «многогранник», понятий с ним связанных (ребро, грань, вершина). Построение куба, исследование его свойств.</i>	1
	<i>Прямоугольный параллелепипед: формулирование определения и свойств. Построение прямоугольного параллелепипеда.</i>	1
	<i>Построение различных моделей куба и прямоугольного параллелепипеда. Работа с фигурками «Танцующее домино» и «Кубики Сомы» (предлагаемые задачи).</i>	1
	<i>Работа с развертками куба. Решение логических задач, связанных с кубом и прямоугольным параллелепипедом (предлагаемые задачи).</i>	1

№ п/п	Тема	Колич ество часов
7	Треугольник	4
	Обсуждение понятий «многоугольник», «треугольник»: основные элементы, классификация (по мере углов, по количеству равных сторон). Обсуждение треугольников и их видов при построении фигурки оригами.	1
	Высота, биссектриса, медиана в треугольнике определение, свойства, наименования точек пересечения.	1
	Открытие и доказательство при помощи оригами теоремы о сумме углов треугольника. Градусная мера углов равностороннего треугольника. Свойство прямоугольного треугольника с углом в 30° .	1
	Решение логических задач, связанных с треугольником (предлагаемые задачи).	1
8	Симметрия	1
	Определение понятия «симметрия», осевая и центральная симметрия. Складывание фигурок и их обсуждение по заявленной теме.	1
9	Правильные многоугольники	4
	Понятие «правильный многоугольник», способы построения, многоугольники, которые можно построить при помощи циркуля и линейки, ученые, занимающиеся построением правильных многоугольников, звездчатые многоугольники.	1
	Построение правильных многоугольников, исследование свойств по приведенному плану.	1
	Построение фигурок оригами из листа бумаги, имеющей форму правильного многоугольника, поиск интересной информации про правильные многоугольники.	1
	Представление результата проекта, индивидуальная и групповая рефлексия.	1
10	Правильные многогранники	7
	Понятие «правильный многогранник», их количество, кто занимался изучением, звездчатые многоугольники.	1
	Вывод формулы Эйлера, обсуждение способов построения, построение многогранников при помощи разверток.	2
	Построение моделей правильных многогранников при помощи оригами. Построение моделей кусудам.	3
	Представление результата проекта, индивидуальная и групповая рефлексия.	1
11	Аксиоматика	1
	Элементы аксиоматики оригами: основные понятия, отношения и аксиомы оригами. Подведение итогов математического кружка.	1
Всего		34

2.4.4. Пример разработки темы программы

Каждая тема приведенной программы разработана следующим образом: в первую очередь приведены некоторые рекомендации по

обсуждению геометрической фигуры в виде диалога учителя с учащимися (ответы учащихся выделены курсивом): диалог происходит по мере складывания какой-либо фигуры.

После обсуждения материала приведены задания, которые позволяют охватить тему наиболее полно. В раздел заданий могут быть включены задания на обнаружение свойств (например, в теме «Треугольник»), творческие задания (например, в теме «Квадрат»), логические задачи (практически в каждой теме), задания на построение фигур оригами (в каждой теме), задание на применение чертежных инструментов (например, тема «Условные обозначения оригами») и прочие.

Тему завершают ссылки на интернет-сайты, перейдя по которым можно найти схемы складывания других фигур оригами.

Рассмотрим, как представлена тема «Квадрат».

Тема 4. Квадрат

Рекомендации по обсуждению: разговор следует вести по ходу складывания, обсуждая уже известные факты о квадрате, при этом добавлять новые понятия (диагональ, средняя линия, биссектриса угла) и находить новые для учащихся свойства (см. Рис. 6).

Что такое квадрат? Как называются элементы квадрата? Какие свойства квадрата вы знаете? Что значит равенство сторон и углов? Каким образом проверяется равенство фигур? Как мы можем проверить равенство сторон и углов квадрата при помощи этого листа?

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется квадратом. Элементы квадрата: вершины, стороны, углы. Свойства: стороны равны, углы равны и равны 90° . Стороны и углы равны, если совмещаются наложением.

Две смежные стороны нашего квадрата пересекаются под прямым углом, прямые, которые пересекаются таким образом будем называть перпендикулярными.

Две противоположные стороны не пересекаются, на плоскости, такие не пересекающиеся прямые будем называть параллельными.

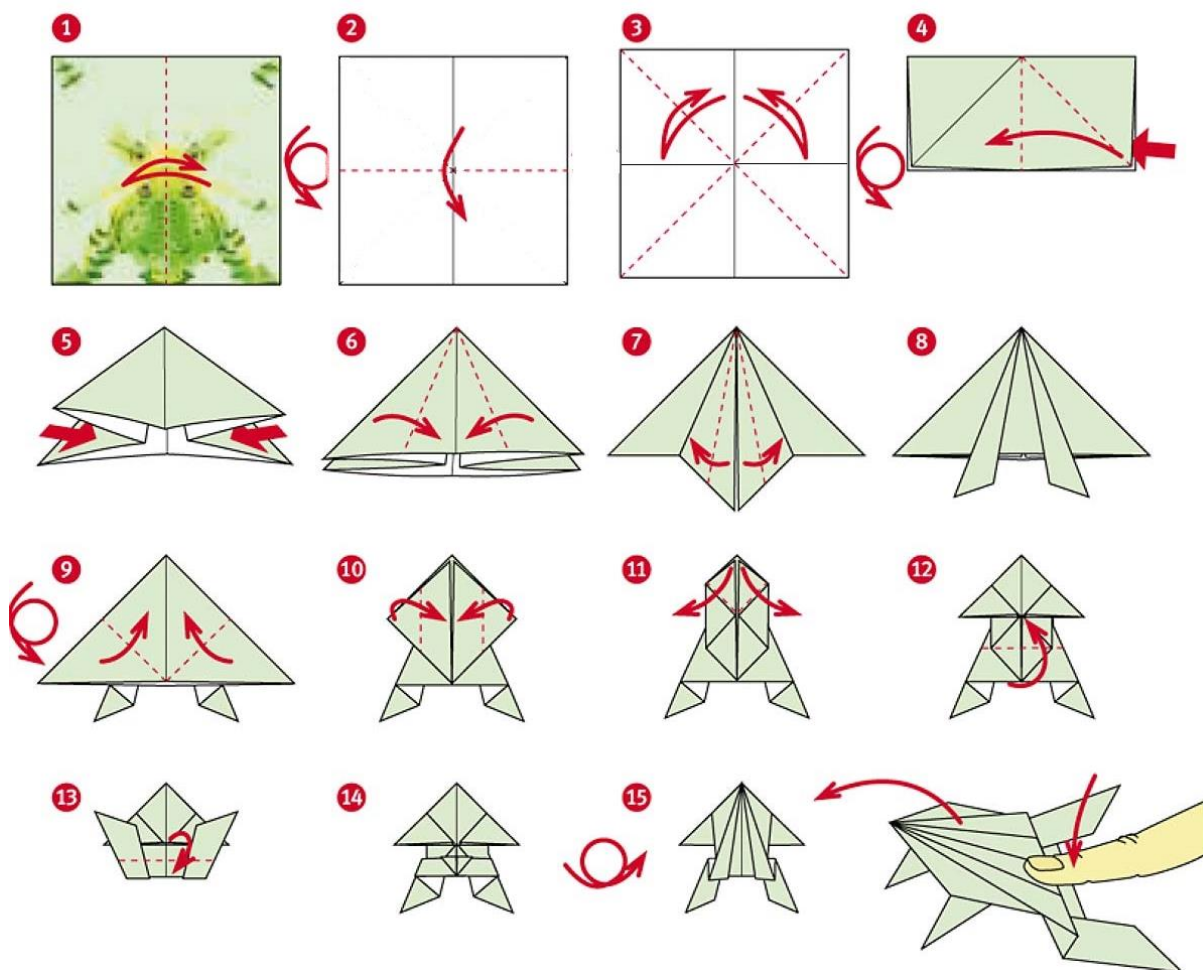


Рис. 6. Схема складывания лягушки [28]

1-2 этапы. Как можно назвать сгибы, получившиеся при проверке равенства сторон? Они проходят через середины противоположных сторон, назовем их средними линиями. Чему равна каждая из средних линий? Сравните их со сторонами квадрата. Сколько точек пересечения средних линий? Что можно сказать об отрезках, которые разбивает точка пересечения? Какие углы получаются при пересечении средних линий? Как расположены средние линии квадрата и его стороны? Могут ли они пересекаться?

Средние линии равны между собой и равны стороне квадрата. Средние линии пересекаются в одной точке и ею делятся пополам.

Средние линии пересекаются под углом 90° . Средние линии параллельны соответствующей паре сторон.

3 этап. Проведем сгиб, проходящий через две не соседние вершины квадрата. Как называется линия этого сгиба? Проведите сгиб по второй диагонали. Сформулируйте определение диагонали. Какие элементы квадрата совмещаются при таком сгибе? Диагональ на какие фигуры делит квадрат? Равны ли эти фигуры? На какие фигуры делят квадрат две диагонали? Если прямоугольные треугольники равны, то диагональ делит угол квадрата на какие два угла? Такую прямую, которая делит угол на два равных угла будем называть биссектрисой угла.

Диагональю квадрата называется отрезок, соединяющий две не соседние его вершины. Совмещаются пары смежных сторон, противоположащие углы. Диагональ делит квадрат на два равных прямоугольных треугольника. Диагонали делят квадрат на четыре равных прямоугольных треугольника. Диагональ делит угол квадрата на два равных угла.

Если диагональ делит квадрат на два равных треугольника, тогда что можно сказать об этих двух диагоналях? Сколько точек пересечения диагоналей? Назовем эту точку центром квадрата. Что можно сказать об отрезках, на которые разбивает точка пересечения диагоналей? Как это проверяется? Какие углы получаются при пересечении диагоналей?

Диагонали квадрата равны, пересекаются в одной точке и этой точкой делятся пополам. Проверяется наложением. Диагонали пересекаются под прямым углом.

4 этап. Согнем по одной из средних линий. Какая плоская фигура получилась? Назовите свойства этой фигуры. С учетом того, что проведена средняя линия, какое свойство можно сформулировать?

Получился прямоугольник. В прямоугольнике углы прямые, параллельные стороны равны. Средняя линия делит квадрат на два равных прямоугольника.

4-5 этап. Данная фигура имеет название «двойной треугольник», он будет очень часто встречаться при складывании других фигур.

6-7 этапы. Проведем следующие два сгиба. Как мы называли эти прямые? Обратите внимание, что биссектрисы делят пополам угол, а не треугольник!

Проведенные сгибы являются биссектрисами.

Обратите внимание на фигуру на переднем плане, что вы о ней можете сказать?

Это четырехугольник, имеет по паре равных смежных сторон.

Такой четырехугольник мы будем называть дельтоидом.

9 этап. Какую часть составляет треугольник от квадрата? То есть какова его площадь относительно площади исходного квадрата?

Площадь треугольника – половина площади исходного квадрата.

10 этап. Какова площадь получившегося на предыдущем шаге квадрата? Какова его площадь относительно исходного квадрата?

Квадрат в 4 раза меньше исходного квадрата, и его площадь также в 4 раза меньше.

11-15 этапы. Продолжаем выполнять перегибы, пока не построим фигурку.

Задания:

Задание 1. Сложите фигурку оригами, проговаривая названия элементов фигуры, которые вы знаете (например, квадрат, диагональ квадрата, треугольник, средняя линия квадрата и др.), по возможности давайте определение элементам (см. Рис. 7).

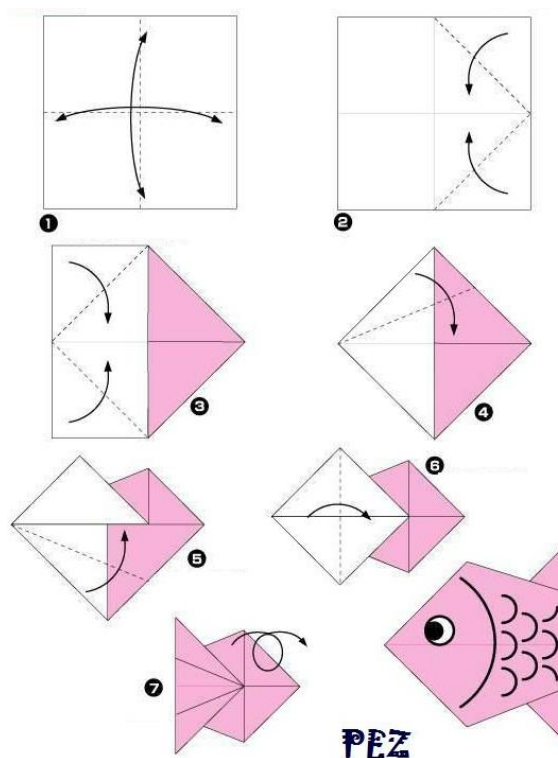


Рис. 7. Схема складывания рыбки [29]

Задание 2. Придумайте схему складывания любого животного и сложите свою фигурку. Нарисуйте схему складывания.

Задание 3. Сложи фигурку по словесному описанию.

- 1) взять квадратный лист бумаги и перегнуть его пополам по средним линиям. Перевернуть его;
- 2) перегнуть по двум диагоналям и снова перевернуть квадрат;
- 3) надавив на центр листа, собрать все четыре уголка вместе, сгибая бумагу по намеченным линиям;
- 4) получившаяся фигура – это базовая форма «квадрат». При работе с этой формой важно следить где находится ее «глухой» (нераскрывающийся) угол;
- 5) положить базовую форму квадрат «глухим» углом вверх. Спереди отогнуть две нижние стороны к центральной линии;
- 6) верхний треугольник перегнуть вниз;
- 7) согнутые стороны отогнуть;

- 8) один слой бумаги тянуть вверх, сгибая его по указанным линиям. Важно следить, чтобы две «долины» стали «горами»;
- 9) шаги 5-8 повторить аналогично;
- 10) фигурку сложить «ножками» вниз. Спереди и сзади согнуть нижние боковые стороны к центральной вертикали;
- 11) обе «ножки» согнуть наверх и немного в стороны;
- 12) проверить положение «ножек» и опустить вниз;
- 13) обе «ножки» вогнуть внутрь по намеченным линиям;
- 14) получили шею и хвост. На шее вогнуть головку внутрь [7, с. 12];
- 15) отпустить крылья вниз до упора и немного расплющить «горбик» спины между ними, потянув немного крылышки в сторону.

Какая фигурка у вас получилась?

Задание 4. Найдите в схеме складывания следующие геометрические фигуры: квадрат, диагональ квадрата, биссектриса угла, дельтоид, треугольник. При желании постройте фигурку (см. Рис.8).

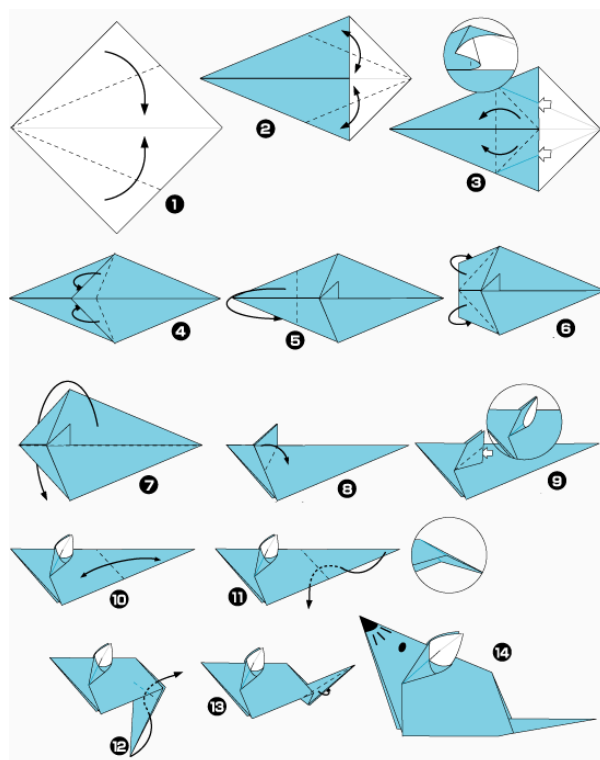


Рис. 8. Схема складывания мышки [10]

Задание 5. Придумайте сказку, в которой главными героями будут сложенные вами фигурки (лягушка, журавлик, мышка и др.).

Задание 6. У вас есть квадратный лист бумаги, разрежьте его на четыре равные части разными способами; на пять равных частей.

Задание 7. Сколько одинаковых квадратов надо взять, чтобы из них можно было сложить в два раза больший квадрат?

Задание 8. Разрежьте квадратный лист бумаги следующим образом (см. Рис. 9), предварительно необходимо провести перегибания. Возможно ли сразу согнуть по необходимым линиям? Какие перегибы нужно выполнить сначала? Какие геометрические фигуры вы узнаете? При помощи полученных геометрических фигур сложить понравившиеся фигурки.

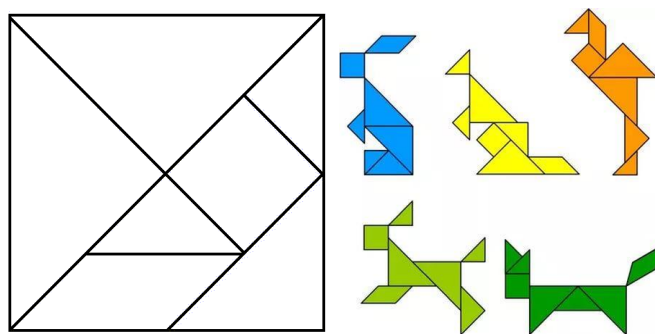


Рис. 9. Танграм

Задание 9. Имеется квадратный пруд (см. Рис. 10). По углам его, близ самой воды, растет 4 старых развесистых дуба. Пруд понадобилось расширить, сделать вдвое больше по площади, сохраняя квадратную форму. Но вековых дубов трогать не желают. Можно ли расширить пруд до требуемых размеров так, чтобы все 4 дуба, оставаясь на своих местах, не были затоплены водой, а стояли бы у берегов нового пруда?



Рис. 10. Пруд

Ссылки на схемы складывания других фигурок:

- зебра [23];
- бабочка [3];
- голубь [22];
- лебедь [13].

При изучении данной темы при помощи оригами у обучающихся формируется понимание основных определений и свойств квадрата.

Полный список новых знаний включает следующие факты:

- 1) как проверить равенство геометрических фигур;
- 2) определение квадрата;
 - *равенство всех сторон;*
 - *углы по 90° ;*
- 3) определение и свойства средней линии квадрата:
 - *средние линии равны между собой и равны стороне квадрата;*
 - *средние линии пересекаются в одной точке и ею делятся пополам;*
 - *средние линии пересекаются под углом 90° ;*
 - *средние линии параллельны соответствующей паре сторон;*
- 4) определение диагонали;

- *диагональ делит квадрат на два равных прямоугольных треугольника;*
- *диагональ делит угол квадрата на два равных угла;*
- *диагонали квадрата равны, пересекаются в одной точке и этой точкой делятся пополам;*
- *диагонали пересекаются под прямым углом;*
- 5) определение биссектрисы угла;
- 6) определение дельтоида.

Подобным образом разработаны все темы программы пропедевтического курса «В мир геометрии вместе с оригами». Считаем, что принципы, которые определил П. А. Карасев как основополагающие в пропедевтическом курсе наглядной геометрии в предлагаемой нами программе выполняются:

1) программа преподавания нашего курса зависит от психологических особенностей детского возраста (работа обеими руками способствует развитию обоих полушарий головного мозга, постоянный момент игры не позволяет возникнуть усталости и скуке);

2) основным методическим принципом построения курса является наглядность, оригами это обеспечивает, также присутствует немалое количество практических упражнений конструктивного и чертежного характера;

3) дедуктивно-логический метод используется редко (в основном в разговоре о признаках фигур), в то время как индуктивный метод изучения геометрического материала является основным и опирается на то, что можно проверить самому;

4) в учебной работе задействованы все виды памяти: зрительная («вижу, как делать»), моторная («делаю»), слуховую («слышу, как делать»);

5) в нашей программе не предусмотрено заучивание определений, правил и т.д., они запоминаются естественно при увеличении количества фигур, которые складываются и др.

Таким образом, изложенные выше рассуждения позволяют нам сделать вывод: о том, что психологические особенности обучающихся 5-6 классов позволяют их обучать элементам геометрии, анализ понятия «пропедевтика» и анализ существующих курсов показывает высокую степень проработки данного вопроса, однако при этом обнаруживает низкую степень включения оригами в подобные курсы. Этот факт, а также перечисленные преимущества оригами и большой объем геометрического материала, который возможно охватить при изучении данного курса, определяют новизну и актуальность разработанной нами программы.

ГЛАВА 3. ОРИГАМИ В СИСТЕМАТИЧЕСКОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

Предыдущая глава – это иллюстрация возможностей оригами при обучении элементам геометрии в пропедевтическом курсе, однако и в систематическом курсе геометрии оригами также может играть большую роль.

3.1. Роль оригами в систематическом курсе геометрии

Оригами помогает учащимся, работающим с определенной геометрической фигурой, путем различных перегибаний *открывать свойства этой фигуры*.

Покажем, как это можно сделать на примере прямоугольника и равнобедренного треугольника.

Прямоугольник:

В прямоугольнике противоположные стороны равны (см. Рис. 11).

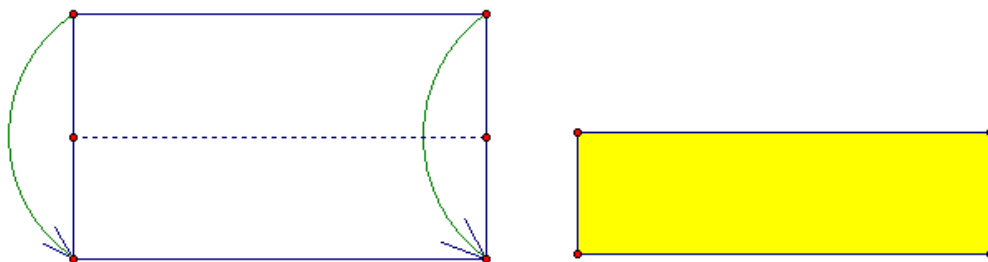


Рис. 11. Свойство сторон прямоугольника

В прямоугольнике все углы прямые (см. Рис. 12).

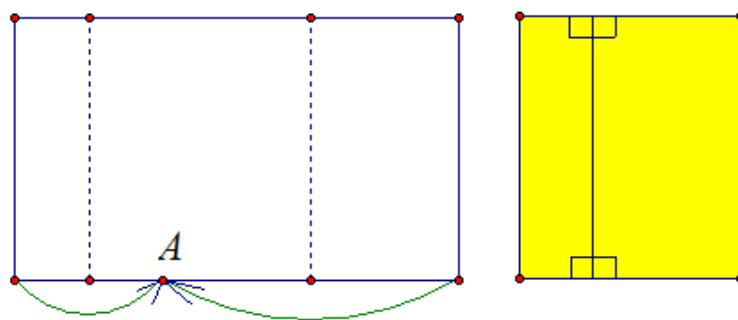


Рис. 12. Свойство углов прямоугольника

Точка A – произвольная точка, лежащая на стороне прямоугольника. Следует отметить, что учащиеся могут допустить ошибку, выполняя построение так (см. Рис. 13):

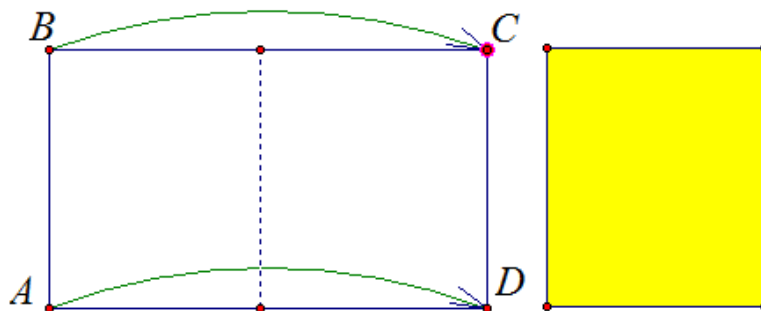


Рис. 13. Свойство пар углов прямоугольника

Такое построение может лишь подтвердить, что $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$, а это справедливо и для равнобедренной трапеции.

Диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам (см. Рис. 14).

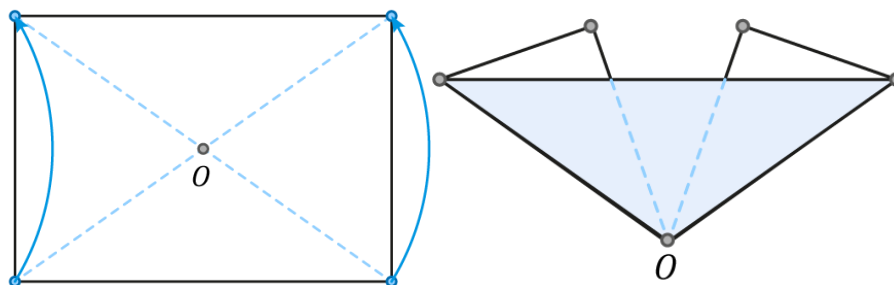


Рис. 14. Свойство диагоналей прямоугольника

Равнобедренный треугольник:

Достаточно перегнуть треугольник так, как показано на Рис. 15, и учащиеся сами назовут все свойства равнобедренного треугольника.

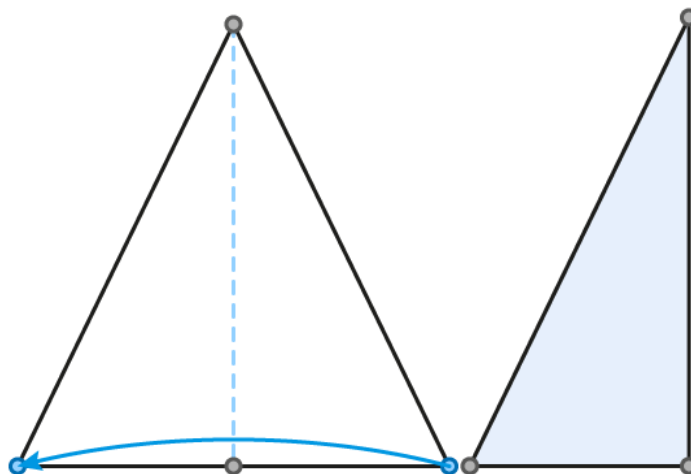


Рис. 15. Свойства равнобедренного треугольника

При помощи оригами можно **доказывать некоторые теоремы планиметрии**, рассмотрим возможности оригами на примере теоремы о сумме углов треугольника.

Теорема. Сумма углов треугольника равна 180° (см. Рис. 16).

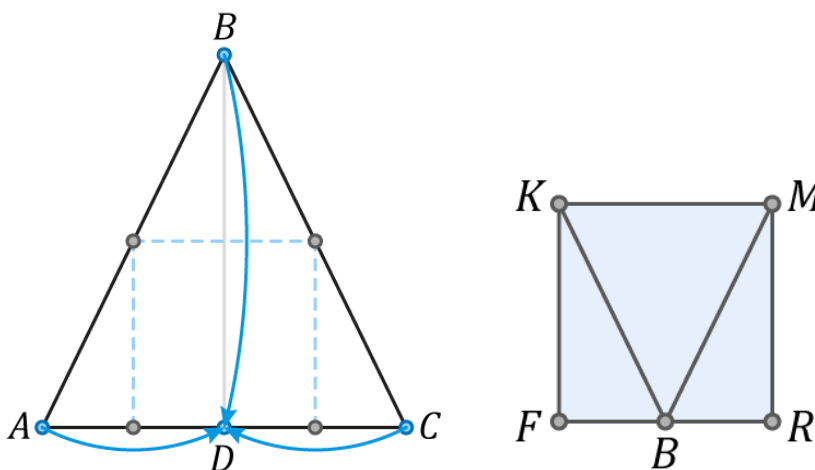


Рис. 16. Сумма углов треугольника

Теорему о сумме углов треугольника можно доказать так:

- 1) найти точку основания высоты треугольника (точку D);

2) перегнуть лист так, чтобы все вершины треугольника ABC совместились с точкой D ;

3) по построению получили, что развернутый угол FDR равен сумме углов треугольника ABC .

С помощью этого же алгоритма построения можно доказать, что средняя линия треугольника равна половине стороны треугольника, которой она параллельна, то есть $KM = \frac{1}{2}AC$. Действительно, в прямоугольнике $FKMR$ противоположные стороны KM и FR равны, а по построению $FR = \frac{1}{2}AC$, поэтому $KM = \frac{1}{2}AC$.

Кроме свойства средней линии треугольника и доказательства теоремы о сумме углов треугольника, такое построение также можно использовать для доказательства формулы площади треугольника: $S = \frac{1}{2}ah$.

Как уже было сказано, аксиомы оригами (см. Глава 1) позволяют **решать задачи на построение**, причем, даже те, которые неразрешимы относительно циркуля и линейки.

Рассмотрим некоторые задачи:

1) если задан произвольный треугольник, то его биссектрисы, а, стало быть, и центр его вписанной окружности можно найти, применив аксиому $O3$ ко всем парам его сторон;

2) срединные перпендикуляры и центр описанной окружности можно найти, применив аксиому $O2$ ко всем парам его вершин. После этого найти медианы и центр тяжести, применив аксиому $O1$ к каждой вершине в паре с уже найденной выше серединой противоположной стороны;

3) высоты и ортоцентр можно найти, применив аксиому $O4$ к каждой вершине в паре с противоположной стороной.

Далее можно убедиться, что ортоцентр, центр тяжести и центр описанной окружности действительно лежат на прямой Эйлера, применив аксиому $O1$ к любой паре из этих точек.

Конечно, сгибая так листок, невозможно построить окружность, но, оказывается, любую точку, которую можно построить с помощью циркуля и линейки, можно построить сгибаниями.

Чтобы доказать это, достаточно предъявить построение двух типов точек:

1) Точки пересечения окружности с прямой, если про окружность известно только местоположение центра и одна точка на ней;

2) точки пересечения двух окружностей, если про каждую окружность известно только местоположение центра и одна точка на ней.

Первое можно сделать, применив аксиому $O5$, взяв за P_1 центр окружности, за P_2 точку на окружности, а за l_1 данную прямую. Последовательность второго построения можно получить, показав, что с помощью перегибаний можно построить инверсию точки относительно окружности, если про окружность известно только местоположение центра и одна точка на ней. Потом, применив инверсию, которая переводит одну из двух данных окружностей в прямую, свести задачу к предыдущей.

Рассмотрим одну из задач древности, которая состоит в трисекции угла, она неразрешима циркулем и линейкой, однако задачу можно решить при помощи оригами.

Построение. Пусть угол задан двумя складками p и q , обозначим через A вершину угла. Сначала проведем подготовительное построение, нам нужно:

1) восстановить перпендикуляр l к q через A ($O4$),
2) отметить на l произвольно точку B и восстановить срединный перпендикуляр q' к отрезку AB ($O2$).

Сложим лист так, чтобы A попала на q' , а B' на p ($O6$). При этом образ A' вершины A ляжет на первую «триссектрису» нашего угла, а точка

С на пересечении q' с новой складкой будет лежать на второй. То есть лучи AA' и AC будут делить угол на три равные части (см. Рис. 17).

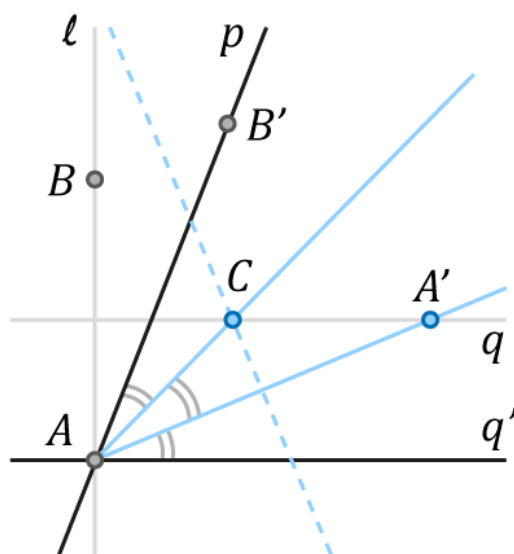


Рис. 17. Трисекция угла

3.2. Оригами – источник планиметрических задач

Оригами может способствовать появлению практико-ориентированных задач в изучении математики. Например, задачи на построение, доказательство, вычисление и исследование. Рассмотрим подробнее это на примерах.

Начиная с 7 класса, в школьном курсе геометрии учащиеся начинают изучать задачи на построение, тогда же происходит знакомство с первой правильной фигурой – равносторонним треугольником. Здесь, можно использовать оригами, как возможность построения несколькими способами правильного треугольника. Рассмотрим один из способов (см. Рис. 18).

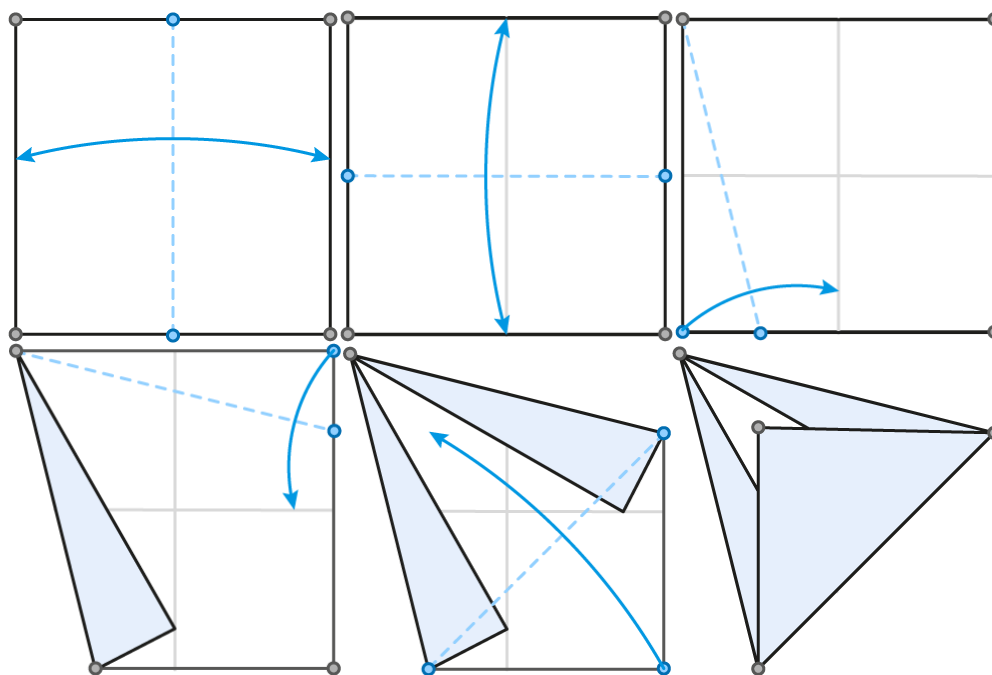


Рис. 18. Построение правильного треугольника

Одной из задач, которые предоставляет оригами – это задача на доказательство. Например, по заданной складке доказать, что $\triangle AGD$ – равносторонний треугольник (см. Рис. 19).

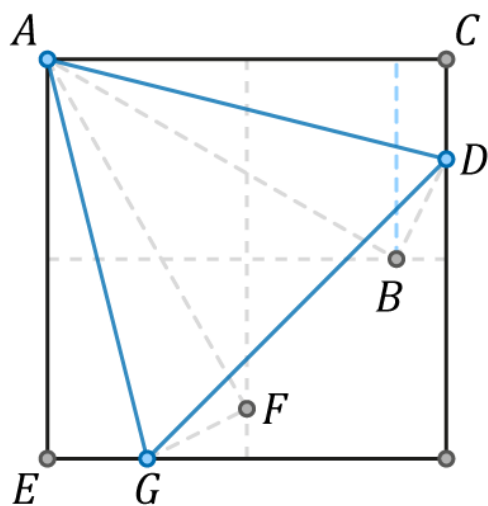


Рис. 19. Чертеж для доказательства

В $\triangle ABC$: $AB=1$, $BC=\frac{1}{2}$, то есть $\angle BAC=30^\circ$, AD – биссектриса $\angle BAC$, то $\angle BAD=15^\circ$. Аналогично, $\angle EAF=30^\circ$, $\angle GAF=15^\circ$, отсюда $\angle FAB=90^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 30^\circ$.

$\triangle AGD$ – равнобедренный ($AG=AD$) и $\angle GAD=60^\circ$, то углы при основании равны 60° , следовательно, $\triangle AGD$ – правильный.

Задачи на вычисления можно свести к тому, что при заданной величине стороны квадрата, найти площадь построенного треугольника (если задать величину стороны квадрата), отношение площади данного треугольника к площади квадрата.

Вопрос о том, можно ли разбить правильный треугольник на 6, 8, 10 и так далее правильных треугольников, для учеников может являться задачей для исследования.

Учитель может помочь учащимся созданную бумажную модель разбить на 6 правильных треугольников. Для этого достаточно сторону исходного треугольника разделить на три равные части, затем при помощи складывания построить на этой стороне три правильных треугольника со стороной равной $\frac{1}{3}$ стороны данного, и соединить вершины полученных трех треугольников отрезком прямой. Тем самым правильный треугольник разобьется на 6 правильных треугольников. А нельзя ли аналогично разбить правильный треугольник на 8, 10 и так далее правильных треугольников? Поиск учащихся подтвердит возможность такого деления. Если не налагать условия равенства этих треугольников, то исходный треугольник можно разбить и на нечетное количество правильных треугольников (начиная с 7). Таким образом, может возникнуть гипотеза: правильный треугольник можно разбить на любое число $n \geq 6$ правильных треугольников.

3.3. Моделирование при помощи оригами

Модульное оригами дает возможность построения моделей пространственных фигур – тетраэдр, куб, октаэдр и др., при построении модуля может возникнуть множество планиметрических задач. Далее приведены схемы построения и примеры заданий.

Рассмотрим способ построения сплошной модели додекаэдра из листа А4 (см. Рис. 20).

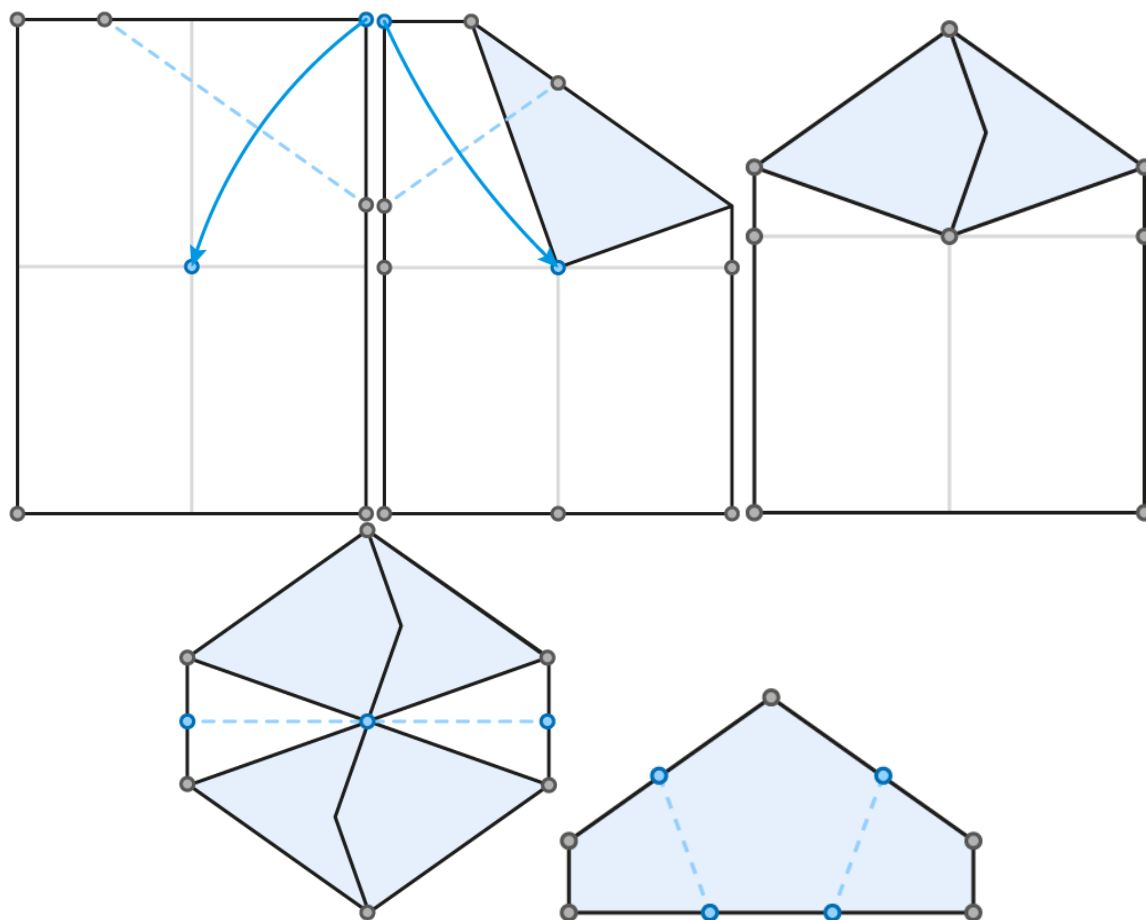


Рис. 20. Схема складывания модуля для сплошной модели додекаэдра [5, с. 134]

Проведем анализ схемы складывания:

Задание 1. Найдите градусную меру угла грани в сплошной модели додекаэдра.

Для начала выясним, чему равен угол, полученный на втором шаге складывания модуля. Рассмотрим схему складывания в развернутом виде (см. Рис. 21).

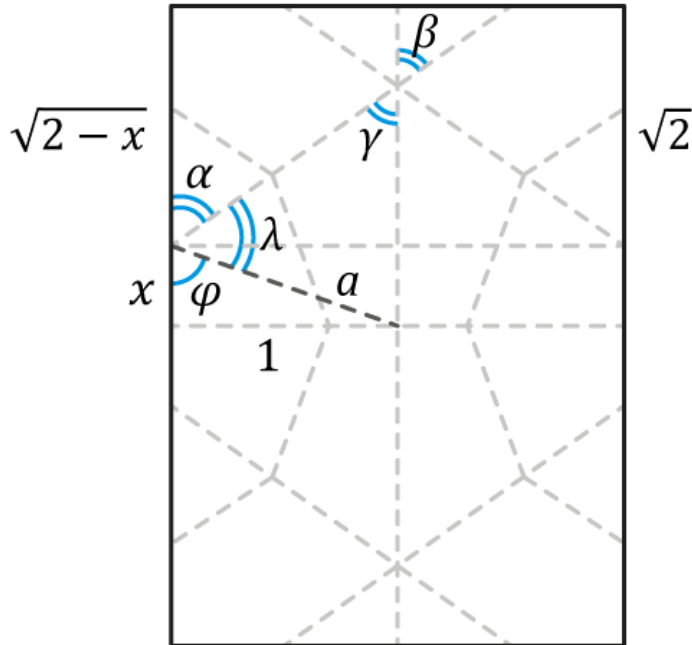


Рис. 21. Схема модуля в развернутом виде

Введем обозначения: пусть малая сторона исходного прямоугольного листа бумаги равна 2, большая сторона равна $2\sqrt{2}$, тогда половины этих сторон будут равны 1 и $\sqrt{2}$ (см. Рис. 21).

$\angle\alpha$ – искомый угол,

$\angle\beta, \angle\gamma, \angle\phi, \angle\lambda$ – понадобятся для нахождения $\angle\alpha$,

x – меньшая часть середины большей стороны прямоугольника,

$\sqrt{2} - x$ – большая часть середины большей стороны прямоугольника,

a – прямая, совпадающая при наложении со стороной, которая равна $\sqrt{2} - x$.

Решение:

$\angle\beta = \angle\gamma$ – так как они накрест лежащие;

$\angle\beta = \angle\alpha$ – соответственные углы, при которых две параллельные прямые пересечены секущей;

$\angle\alpha = \angle\lambda$ – так как они совпадают при наложении друг на друга.

Найдем меньшую часть половины большей стороны прямоугольника

$$(\sqrt{2} - x)^2 = 1^2 + x^2,$$

$$2 - 2\sqrt{2}x + x^2 = 1 + x^2,$$

$$2\sqrt{2}x = 1,$$

$$x = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Найдем $\angle \lambda = \angle \alpha$:

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}; \angle \varphi \approx 70,5^\circ$$

$$2 \cdot \angle \lambda + \angle \varphi = 180^\circ, \angle \lambda \approx 54,74^\circ;$$

$\angle \lambda = \angle \alpha \approx 54,74^\circ$ – искомый угол, что и требовалось выяснить.

Опираясь на выше представленные вычисления, найдем градусную меру угла грани в сплошной модели додекаэдра.

Рассмотрим схему складывания в развернутом виде (см. Рис. 22).

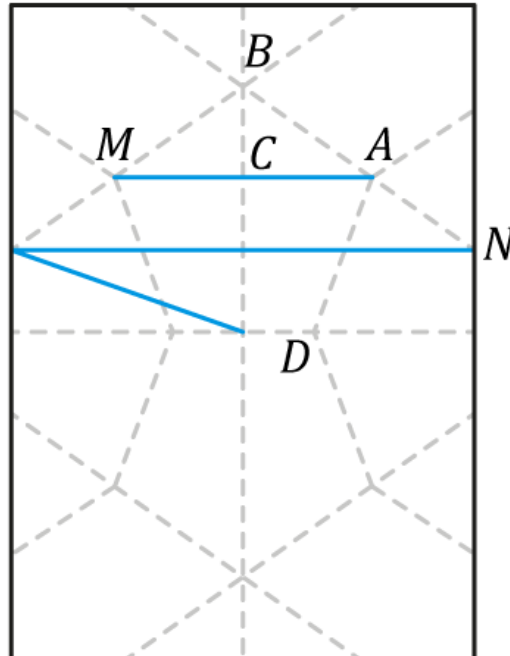


Рис. 22. Развертка модуля для сплошной модели додекаэдра

Введем обозначения (см. Рис. 22):

$\angle BAD$ – искомый,

AD – биссектриса угла MAN .

В прямоугольном треугольнике ABC : $\angle C = 90^\circ$, $\angle B \approx 54,74^\circ$ – ранее доказывали, следовательно $\angle A \approx 35,26^\circ$.

Так как $\angle BAN = 180^\circ$ – развернутый угол, то $\angle MAN = 180^\circ - 35,26^\circ \approx 144,74^\circ$;

Биссектриса AD делит наполовину угол $\angle MAN$, поэтому $\angle MAD \approx 72,37^\circ$;

$\angle BAD \approx 107,63^\circ$ – искомый угол.

Из теории о правильных многоугольниках мы знаем, что в правильном пятиугольнике все углы равны 108° . Угол, меру которого мы находили, близок по значению с углом в правильной фигуре. Таким образом, пользуясь этой схемой складывания модели додекаэдра, мы получим лишь приблизительно правильную фигуру.

Схема, представленная на Рис. 23, показывает каким образом можно сложить правильный пятиугольник, что необходимо для складывания модуля додекаэдра (см. Рис. 25).

Задание 2. Доказать, что пятиугольник, получающийся по схеме Рис. 23, является правильным.

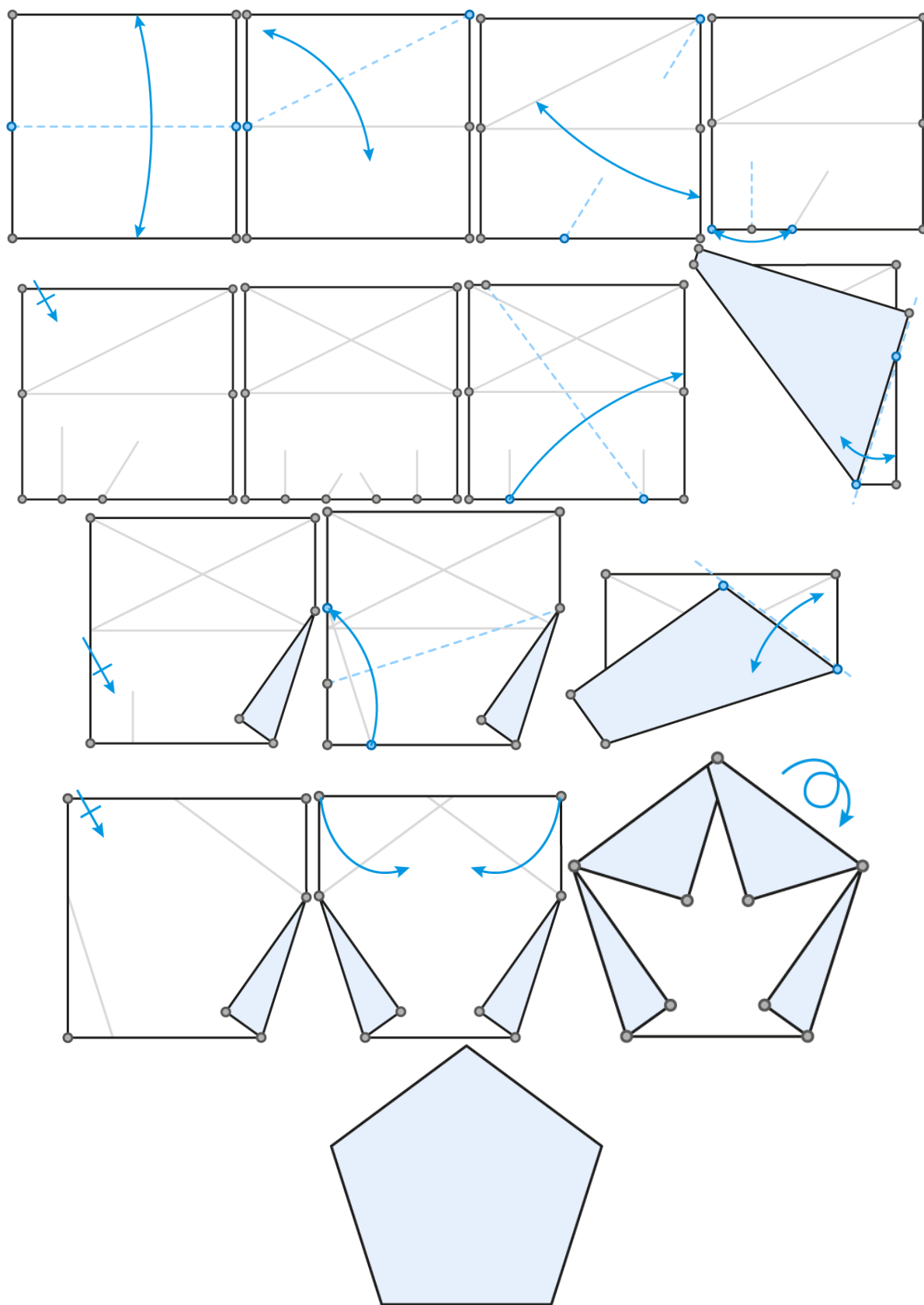


Рис. 23. Построение правильного пятиугольника

Задание 3. Вычислить в общем виде длину стороны пятиугольника, который можно получить по схеме Рис. 23.

Примечание: сторону квадрата принять за a , для удобства можно использовать чертеж Рис. 24.

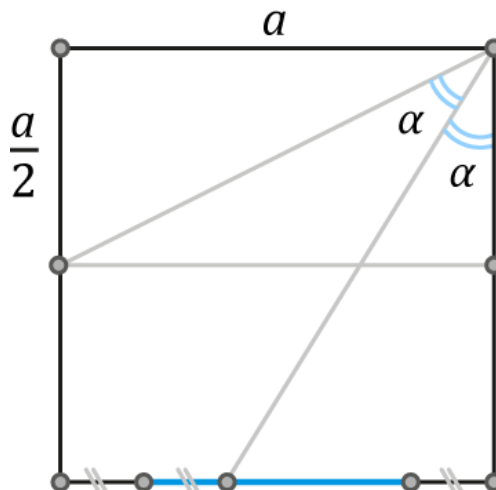


Рис. 24. Иллюстрация к *Задаче 3*.

Задание 4. Вычислить приближенно, какой получится сторона пятиугольника, если в качестве стороны квадрата взять меньшую сторону листа А4.

Задание 5. Вычислить приближенно, с какой стороной нужно взять квадрат, чтобы сторона правильного пятиугольника равнялась бы 10 см.

Задание 6. Доказать, что модуль, получающийся по схеме Рис. 25, является гранью додекаэдра.

Задание 7. Вычислить в общем виде длину стороны ребра додекаэдра, получаемого по схеме Рис. 25.

Примечание: при решении задачи использовать факты, представленные на Рис. 26.

Задание 8. Вычислить приближенно, с какой стороной нужно исходный пятиугольник, чтобы сторона модуля равнялась бы 38.

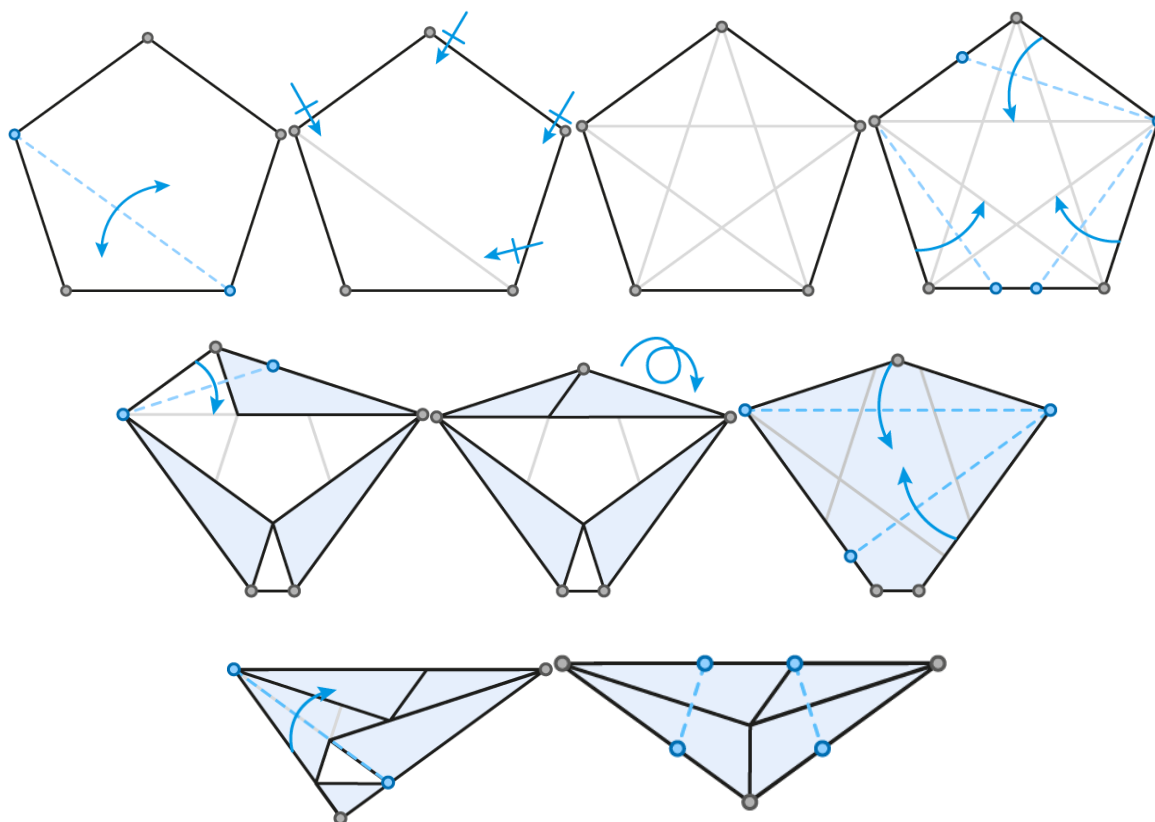


Рис. 25. Построение сплошной модели додекаэдра

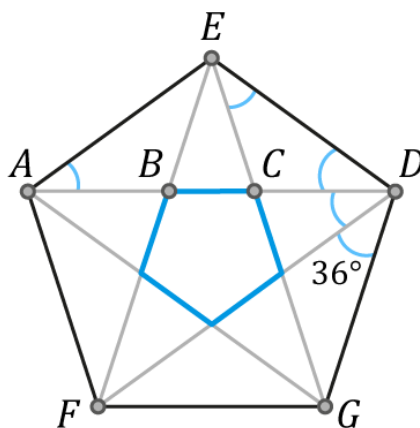


Рис. 26. Иллюстрация к Задаче 7

Таким образом, при помощи оригами в систематическом курсе геометрии можно открывать свойства изучаемых геометрических фигур, доказывать теоремы, решать задачи на построение. А также оригами позволяет создавать модели пространственных фигур и является источником планиметрических задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе исследования достигли следующих результатов:

- 1) раскрыто понятие аксиоматического метода, его основные положения, модель системы аксиом, а также требования, предъявляемые к системе аксиом;
- 2) была сделана характеристика оригами как математической теории (основные понятия, отношения, аксиомы). Сравнили теорию оригами с теорией конструктивной геометрии, путем сопоставления их аксиом и оформления его в таблицу. Проверили выполнимость требований, предъявляемых к системе аксиом, в системе аксиом оригами: система аксиом непротиворечивая, полная, но зависимая, при этом обоснована необходимость зависимости аксиом;
- 3) показана возможность обучения элементам геометрии обучающихся 5-6 классов на основе анализа психолого-педагогической литературы;
- 4) на основе найденных определений понятия «пропедевтика» сформулированы его существенные свойства, приведены основные принципы, которым должна удовлетворять программа пропедевтического курса, показана степень проработки пропедевтики геометрии в целом и в отношении использования оригами в данных программах;
- 5) сформулированы преимущества использования оригами в пропедевтическом курсе геометрии, среди которых наглядность и образность оригами, преимущества в развитии мелкой моторики, творческого мышления и другие;
- 6) показана возможность изучения геометрии при помощи оригами при изучении пропедевтического курса благодаря описанию фрагмента разработанной нами программы «В мир геометрии вместе с оригами», которое включает основные теоретические положения (цели,

задачи, используемые методы и т.д.), содержание программы, примерное тематическое планирование и пример разработки темы «Квадрат»;

7) показана возможность изучения систематического курса геометрии при помощи оригами: иллюстрация свойств геометрических фигур, доказательство теорем, решение задач на построение, появление планиметрических задач и возможность моделирования;

8) во время проведения мастер-класса по оригами для учащихся школ города Перми и Пермского края было проведено анкетирование (см. Приложение), результаты которого подтвердили правильность выдвинутой гипотезы о том, что оригами является одним из эффективных средств обучения геометрии.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что все задачи, которые были поставлены перед началом работы, выполнены, на этом основании предполагаем, что цель исследования достигнута, то есть оригами – это математическая теория, которая обладает большим методическим потенциалом для преподавания геометрии.

Основные положения проведенного исследования излагались в виде ***докладов и выступлений на следующих конференциях:***

1) Весенняя научная сессия математического факультета ПГГПУ 7.04.2014-25.04.2014 (доклад «Оригами и задачи на построение»).

2) Осенняя научная сессия математического факультета ПГГПУ 6.10.2014-12.11.2014 (доклад «Аксиоматическое построение оригами»).

3) Весенняя научная сессия математического факультета ПГГПУ 7.04.2015-24.04.2015 (доклад «Трисекция угла»).

4) Всероссийская научно-практическая конференции молодых ученых с международным участием «Фундаментальные и прикладные проблемы математики, механики, информатики» 26.05.2015 – 28.05.2015 года, г. Пермь (доклад «История оригами»).

5) Осенняя научная сессия математического факультета ПГГПУ 4.10.2016-22.10.2016 (доклад «Применение оригами в пропедевтическом курсе геометрии»).

6) Весенняя научная сессия математического факультета ПГГПУ 3.04.2016-21.04.2016 (доклад «Оригами как пропедевтика геометрии»).

7) Всероссийская научно-практическая конференция молодых ученых с международным участием «Математика и междисциплинарные исследования – 2016», посвященная 100-летию Пермского государственного национального исследовательского университета 16.05.2016-19.05.2016 г. (доклад «Применение оригами в пропедевтическом курсе геометрии»).

8) Международный студенческий конкурс на лучший научный доклад «Современные тенденции естественно-математического образования: школа – вуз», 14 апреля 2017 года, г. Соликамск (доклад «Теория оригами и ее применение в пропедевтике обучения геометрии») – 3 место.

9) XV Международный научный форум «Человек, Общество, Культура: современное и историческое измерения», исторический факультет, ПГГПУ, 10.04.2017-14.04.2017 (доклад «Оригами: от религиозного искусства к инструменту науки»).

10) Университетский этап конкурса на лучшую научно-исследовательскую работу, наименование работы «Математическая теория оригами и ее применение в обучении геометрии», май, 2017, ПГГПУ.

Тезисы по теме исследования были напечатаны в следующих сборниках:

1) «Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах» [6, с. 22], наименование статьи «О возможности точного построения трисекции угла методами оригами».

2) «Наука, технология, техника: перспективные исследования и разработки» [20, с. 776] наименование статьи «Математическая теория

оригами с точки зрения конструктивной геометрии». Статья награждена дипломом 1 степени в номинации «Лучшая статья по направлению ФИЗИКА и МАТЕМАТИКА».

3) «Фундаментальные и прикладные проблемы математики, механики, информатики» [31, с. 41-45], наименование статьи «История оригами».

4) «Математика и междисциплинарные исследования – 2016» [18, с. 374], наименование статьи «Применение оригами в пропедевтическом курсе геометрии».

5) «Математика и междисциплинарные исследования – 2017» [19, с. 374], наименование статьи «Оригами как возможность реализации предметных результатов и межпредметных связей».

Результаты исследования были также апробированы при ***проведении мастер-классов и участия в выставках:***

1) «Оригами» на открытии Фестиваля японского кино, сентябрь, 2015 г.

2) «Построение правильных многогранников с помощью оригами» на курсах повышения квалификации по дополнительной профессиональной программе «Технологии обучения математике в основной школе: внедрение ФГОС», октябрь, 2015 г.

3) Выставка «Лепестки сакуры», ЦДТ «Росток», 16.10.2015-16.11.2015, г. Пермь.

4) «Оригами» в рамках весенней научной сессии студентов математического факультета ПГГПУ, апрель, 2017 г.

5) «Оригами и геометрия» в рамках Дня открытых дверей на математическом факультете ПГГПУ, апрель, 2017 г.

6) Выставка «Легенда о горе Нара», Центральный выставочный зал, 16.05.2017-22.05.2017, г. Пермь.

7) Мастер-класс по оригами для учащихся школ города Перми и Пермского края в рамках мероприятия «Классная математика и информатика», ПГНИУ, май, 2017 г.

8) Мастер-класс в рамках форума «Наука и глобальные вызовы XXI века», ПГНИУ, май, 2017 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1) Акрушенко А.В. Психология развития и возрастная психология: учеб. пособие [Электронный ресурс] / А.В. Акрушенко, О.А. Ларина, Т.В. Катарьян. – Электрон. дан. – Саратов: Научная книга, 2012. – 127 с. – Режим доступа : <http://www.iprbookshop.ru/6328.html>. – ЭБС «IPRbooks» (дата обращения 20.04.2017).

2) Атанасян С.Л. Основания геометрии: учеб. пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических вузов [Электронный ресурс] / С.Л. Атанасян, В.Г. Покровский – Электрон. дан. – М.: Московский городской педагогический университет, 2010. – 248 с. – Режим доступа : <http://www.iprbookshop.ru/26543.html>. – ЭБС «IPRbooks» (дата обращения 27.0.2017).

3) Бабочка оригами [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – URL: <http://modulnoe-origami.net/origami/149-babochka-origami-avtor-joshio-tsuda.html> (дата обращения: 27.04.2017).

4) Батюта М.Б. Возрастная психология: учеб. пособие [Электронный ресурс] / М.Б. Батюта, Т.Н. Князева – Электрон. дан. – М.: Логос, 2013. – 306 с. – Режим доступа : <http://www.iprbookshop.ru/51628.html>. – ЭБС «IPRbooks» (дата обращения 27.0.2017).

5) Владимирова С.Е. Оригами и кусудамы [Электронный ресурс] / С.Е. Владимирова – Электрон. дан. – М.: РИПОЛ классик, 2012. – 264 с. – Режим доступа : <http://www.iprbookshop.ru/38635.html>. – ЭБС «IPRbooks» (дата обращения 27.0.2017).

6) Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. межрегион. науч. – практ. конф. студентов матем. фак-тов / ред. кол.: Ю. В. Корзнякова, И. В. Косолапова;

под общ. Ред. Ю. В. Корзняковой; Перм. Гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2015. – Вып. 8. – 95 с.

7) Зайцев В.Б. Оригами [Электронный ресурс] / В.Б. Зайцев – Электрон. дан. – М.: РИПОЛ классик, 2012. – 16 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/38634.html>. – ЭБС «IPRbooks» (дата обращения 27.0.2017).

8) Ильина Н.К. Оригами. Необычные модели для развития фантазии [Электронный ресурс] / Н.К. Ильина. – Электрон. дан. – М.: РИПОЛ классик, 2012. – 263 с. – Режим доступа : <http://www.iprbookshop.ru/38636.html>. – ЭБС «IPRbooks» (дата обращения 27.0.2017).

9) Каган В. Ф. Основания геометрии. Учение об основании геометрии в ходе его исторического развития. Ч.1. / В. Ф. Каган. – М.: ТехТеорЛит, 1949. – 492 с.

10) Как сделать оригами мышка [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – URL: <http://keramoplitnn.ru/archives/2830> (дата обращения: 27.04.2017).

11) Карасев П. А. Элементы наглядной геометрии в школе. / П. А. Каган. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства Просвещения РСФСР, 1955. – 206 с.

12) Книжный онлайн-магазин MoreBooks [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – URL: <https://www.morebooks.de/> (дата обращения: 24.05.2017).

13) Конспект урока по наглядной геометрии [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – URL: <https://multiurok.ru/files/konspekt-uroka-po-naghiadnoi-ghieometrii-tanghram.html> (дата обращения: 27.04.2017).

14) Костин В.И. Основания геометрии [Электронный ресурс] / В.И. Костин. – Электрон. дан. – М. : Государственное учебно-педагогическое издательство, 1948. – 306 с. – Режим доступа :

«Университетская Библиотека Онлайн» (дата обращения 09.07.2015).

15) Краткий словарь философских терминов [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – URL: <http://nenuda.ru/%D0%%BE%D0%B2.html> (дата обращения: 27.04.2017).

16) Кулагина И.Ю. Психология развития и возрастная психология. Полный жизненный цикл развития человека: учебное пособие для вузов [Электронный ресурс] / И.Ю. Кулагина, В.Н. Колюцкий. – Электрон. дан. – М.: Академический проект, 2015. – 421 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/36766.html>. – ЭБС «IPRbooks» (дата обращения 27.0.2017).

17) Кутузов, Б.В. Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии [Электронный ресурс] / Б.В. Кутузов. – Электрон. дан. – М. : Государственное учебно-педагогическое издательство, 1950. – 128 с. – Режим доступа : <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=220831> – ЭБС «Университетская Библиотека Онлайн» (дата обращения 21.07.2015).

18) Математика и междисциплинарные исследования – 2016 [Электронный ресурс]: сб. док. всеросс. науч.-практ. конф. молодых ученых с междунар. участием (г. Пермь, 16–19 мая 2016 г.) / гл. ред. Ю.А. Шарапов; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2016. – 12 Мб.

19) Математика и междисциплинарные исследования – 2017: материалы Всерос. науч.-практ. конф. молодых ученых с междунар. Участием (г. Пермь, 15-20 мая 2017 г.): в 2 т. / гл. ред. А. П. Шкарапута; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2017. Т. 1. – 236 с.

20) Наука, технология, техника: перспективные исследования и разработки: сборник научных трудов по материалам I Международной научно-практической конференции студентов, магистрантов и аспирантов 30 ноября 2016 г. Калининград: НОО «Профессиональная наука», 2016. – 793 с.

- 21) Ожегов С. И. Толковый словарь русского языка: ок. 100000 слов, терминов и фразеологических выражений / С. И. Ожегов; под ред. Проф. Л. И. Скворцова. – 28-е изд., перераб. – М. : Оникс. 2012. – 1376 с.
- 22) Оригами звезды и звездочки из бумаги [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – URL: <http://tehnologi.su/origami-zvezdy-i-zvezdochki-iz-bumagi> / (дата обращения: 27.04.2017).
- 23) Оригами зебра [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – URL: <http://yourorigami.info/2008/08/29/origami-zebra.html> (дата обращения: 27.04.2017).
- 24) Оригами как одно из средств обучения геометрии в основной школе [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – URL: <http://textarchive.ru/c-1546219.html> (дата обращения: 27.05.2017).
- 25) Першина Л.А. Возрастная психология: учеб. пособие [Электронный ресурс] / Першина Л.А. – Электрон. дан. – М.: Академический Проект, Альма Матер, 2016. – 256 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/60021.html>. – ЭБС «IPRbooks» (дата обращения 20.04.2017).
- 26) Погорелов А. В. Основания геометрии / А. В. Погорелов. – М.: Наука, 1979. – с. 151.
- 27) Самыгин С. И. Психология развития, возрастная психология для студентов вузов [Электронный ресурс] / С.И. Самыгин [и др.]. – Электрон. дан. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2013. – 222 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/58990.html>. – ЭБС «IPRbooks» (дата обращения 10.04.2017).
- 28) Сборка оригами для детей [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – URL: http://rucco.ru/content/articles/origami/Sborka-origami-dlya-detej-stol/?sphrase_id=7366 (дата обращения: 27.04.2017).
- 29) Схема для оригами рыбка [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – URL: <http://zalogk.ru/shema-dlya-origami-rybka/> (дата обращения: 8.10.2016).

30) Ушаков Д. Н. Толковый словарь современного русского языка. / Д. Н. Ушаков. – М. : «Аделант», 2013. – 800 с.

31) Фундаментальные и прикладные проблемы механики, математики, информатики [Электронный ресурс]: сб. докл. всеросс. науч.-практ. конф. с междунар. участием (г. Пермь, 26-28 мая 2015 г.) / гл. ред. А. П. Шкарапута; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2015.

32) Ходот Т. Г. Математика: наглядная геометрия: учеб. для учащихся 5 кл. общеобразоват. учреждений / Т. Г. Ходот, А. Ю. Ходот. – М. : Просвещение, 2007. – 143 с.

33) Шарыгин И. Ф. Математика: Наглядная геометрия. 5-6 кл. : учебник / И. Ф. Шарыгин, Л. Н. Ерганжиева. – 2-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2015. – 189 с.

34) Robert J. Lang. Origami and geometric constructions / Robert J. Lang. – Tokyo.: Gallery origami house, 2010. – 68 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Анкетирование обучающихся в рамках проведения мастер-класса по оригами для 15 учащихся 10 класса Лицея №2 города Перми проводилось в два этапа: перед началом проведения мастер-класса и после мастер-класса.

Вопросы первой анкеты:

1) Оцените по десятибалльной шкале ваш интерес к изучению геометрии в школе (1 – совершенно не интересно, 4 – не очень интересно, 6 – скорее интересно, 10 – очень интересно).

2) Оцените по десятибалльной шкале, какова для вас практическая значимость изучения геометрии (1 – совершенно не значима, 4 – не очень значима, 6 – скорее значима, 10 – очень значима)?

3) Знакомы ли вы с искусством оригами? Если да, то считаете ли вы его связанным с математикой?

Вопросы второй анкеты:

1) Оцените по десятибалльной шкале ваш интерес к изучению геометрии в школе (1 – совершенно не интересно, 4 – не очень интересно, 6 – скорее интересно, 10 – очень интересно).

2) Оцените по десятибалльной шкале, какова для вас практическая значимость изучения геометрии (1 – совершенно не значима, 4 – не очень значима, 6 – скорее значима, 10 – очень значима)?

3) Какие факты геометрии вы вспомнили в процессе складывания фигур оригами?

4) С какими новыми фактами вы познакомились в результате построения моделей?

5) Стоит ли использовать оригами при изучении геометрии? Почему?

6) Какие положительные стороны применения оригами в изучении геометрии вы выделите?

Мастер-класс состоял в обсуждении Платоновых тел, в складывании обучающимися додекаэдра, работа с ним (подсчет количества вершин, ребер и граней, открытие формулы Эйлера, задача нахождения гамильтонова цикла) и построении октаэдра.

Анкетирование было проведено при помощи сервиса Google Формы.

Анализ ответов *первого анкетирования* позволяет сделать следующие выводы:

– большинство обучающихся не проявляет особого интереса к геометрии, так как 26,7% обучающихся высказали нейтральную позицию (между «не очень интересно» и «скорее интересно»), 53,4% обучающихся ответили, что им не интересна геометрия, и только 19,9% обучающихся интересуются геометрией.

–

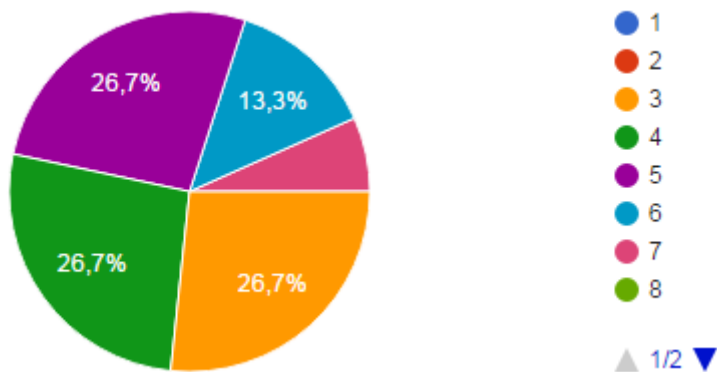


Рис. 27. Диаграмма ответов.

– среди опрошенных преобладает число обучающихся, которые высказывают нейтральную позицию относительно практической значимости геометрии (40%), треть обучающихся не находят геометрию практически значимой, оставшаяся треть обучающихся высказывается о геометрии, как о практической науке.

–

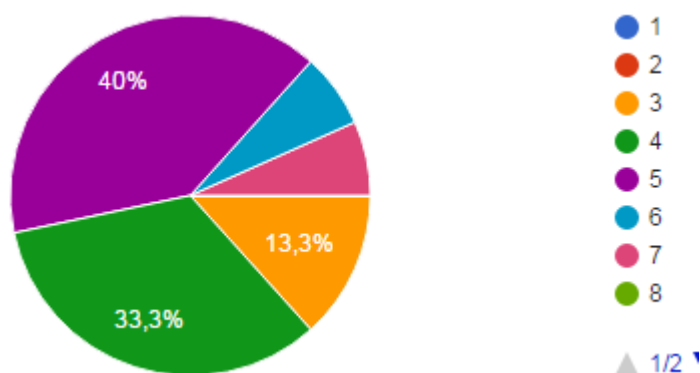


Рис. 28. Диаграмма ответов.

– большинство обучающихся (73,3%) знакомы с оригами и только 13% от общего числа опрошенных связывает оригами с геометрией.

Анализ ответов *второго анкетирования* позволяет сделать следующие выводы:

– замечено небольшое изменение ответов обучающихся: число безразличных сократилось вдвое, не интересна геометрия стала для 46,7% опрошенных, а число обучающихся, для которых геометрия интересна (в разной степени), повысилось до 40%.

—

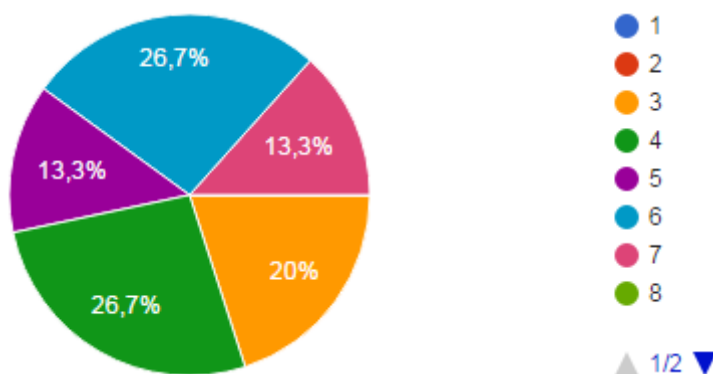


Рис. 29. Диаграмма ответов.

– также замечено изменение ответов обучающихся: среди опрошенных число обучающихся, которые высказывают нейтральную позицию относительно практической значимости геометрии снизилось до 26,6%, также треть обучающихся не находят геометрию практически

значимой, однако, число обучающихся высказывающихся о геометрии, как о практической науке повысилось до 40%.

—

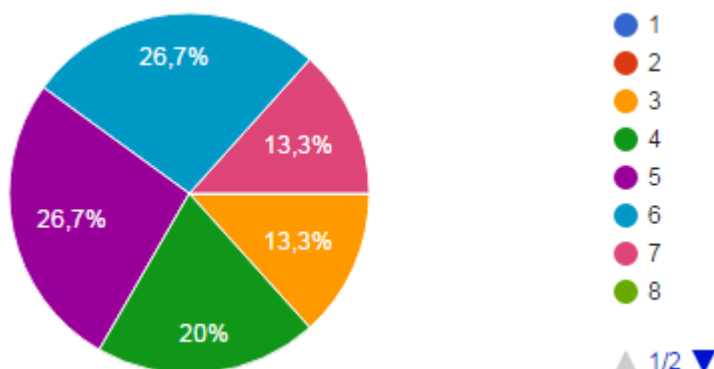


Рис. 30. Диаграмма ответов.

— в процессе складывания фигур оригами, согласно ответам учащихся, следующие факты геометрии были озвучены: квадрат, прямоугольник, их свойства, биссектриса угла, параллельные и перпендикулярные прямые, симметрия, правильный треугольник, правильный пятиугольник и др.;

— новыми для обучающихся были следующие факты: какие многогранники называют Платоновыми телами, октаэдр, додекаэдр, их свойства, формула Эйлера, гамильтонов граф и др.;

— обучающиеся единогласно ответили, что оригами стоит использовать при изучении геометрии, аргументы в пользу этого были следующие: получается интересное занятие, можно многое вспомнить из изученного, получают наглядные модели, которые в дальнейшем можно использовать и др.

Таким образом, благодаря анализу проведенного анкетирования можно сделать вывод о том, что гипотеза, согласно которой оригами является эффективным средством обучения, подтверждена.