МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра высшей математики

Выпускная квалификационная работа

# МЕТОДИЧЕСКОЕ ОСНАЩЕНИЕ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ»

Работу выполнила:
студентка 151 группы
направления подготовки 44.03.05
«Педагогическое образование»,
профили «Математика и Информатика»,
Багданова Азалия Юсуповна

______________________
подпись

«Допущена к защите в ГЭК»
Зав. кафедрой

______________________
*подпись*

«____» __________ 2017 г.

Руководитель:
канд. пед. наук, доцент
кафедры высшей математики
Латышева Любовь Павловна

______________________
*подпись*

ПЕРМЬ
2017

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

# ВВЕДЕНИЕ

Символ интеграла был введен в 1675 г., а вопросами интегрального исчисления ученые начали заниматься с 1696 г. [5]. Интеграл изучают как математики, так и ученые-физики. В физике практически ни одна формула не обходится без применения дифференциального и интегрального исчислений. Интегральное и дифференциальное исчисления составляет основу математического анализа. Интегральное исчисление – раздел математики, занимающийся изучением интегралов, их свойств и методов вычисления [4].

Интегральное исчисление появилось во времена античного периода математической науки и начало развиваться с метода исчерпывания, который был разработан математиками Древней Греции и представлял собой набор правил. По этим правилам вычисляли площади и объёмы. Далее метод получил своё развитие в работах Евклида. Особым искусством и разнообразием применения метода исчерпывания прославился Архимед [5].

Известно, какие замечательные и разнообразные приложения имеет математический анализ, как в самой математике, так и в смежных областях знания.

**Целью** данной работы является иллюстрация примерами применения в задачах теоретических основ тройного интеграла, снабженная методическими комментариями.

Для достижения цели были поставлены следующие **задачи**:

1) проанализировать учебную и научную литературу по теме исследования;
2) изучить сведения из истории возникновения понятия «Тройной интеграл»;

3) рассмотреть теоретические основы введения понятия «Тройной интеграл»;
4) обосновать важность введения понятия тройного интеграла и оценить его практическую и теоретическую значимость;
5) представить рекомендации к изучению темы «Тройной интеграл»;
6) привести снабженные методическими комментариями примеры решения задач с применением тройного интеграла.

**Объектом** исследования являются основы методики изучения интегрального исчисления функций одной и нескольких переменных.

**Предметом** исследования выступают методические рекомендации к решению вычислительных и прикладных задач по теме «Тройной интеграл».

**Методы исследования**: анализ имеющейся по данному вопросу литературы, сравнение материала в вузовских учебниках разных авторов, обобщение и систематизация полученных знаний о методических рекомендациях по данной теме.

Работа состоит из Введения, двух глав «Теоретические основы вычисления тройного интеграла» и «Методические особенности применения тройного интеграла в вычислительных и прикладных задачах», Заключения и Библиографического списка, содержащего 31 наименование. Работа насчитывает 43 страницы.

Во введении представлены актуальность темы выпускной работы, цели и задачи исследования, краткая характеристика структуры работы и описание ее частей.

В первой главе рассмотрено понятие тройного интеграла и его приложения, а также представлены особенности вычисления тройного интеграла в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.

Во второй главе приведены некоторые общие рекомендации по изучению тройного интеграла и показаны примеры решения разного рода задач, основанного на вычислении тройного интеграла.

Материалы исследования были представлены на конференциях:

1. Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах; доклад «Об одном примере применения двойного интеграла в решении прикладной задачи» (апрель, 2015) [1].

2. Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах; доклад «Вычисление массы тела в цилиндрической системе координат» (апрель, 2016) [2].

3. Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах; доклад «Методическое обеспечение решения задач по теме «Тройной интеграл»» (апрель, 2017) [3].

# ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

В данной главе основное внимание уделим краткому изложению теории тройного интеграла и рассмотрению примеров вычисления тройных интегралов в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.

## 1.1. Определение и вычисление тройных интегралов в декартовых координатах

Пусть требуется вычислить массу заданного в системе координат $Oxyz$ (рис. 1) ограниченного тела $V$ с плотностью $\mu = f(x, y, z) > 0$. Для решения задачи «разрежем» это тело на $n$ «кусочков» $v_i$, где $i = 1,2,...,n$.

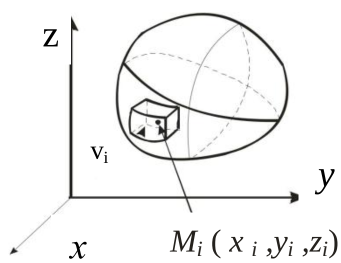


*Рис. 1. Ограниченное тело V*

Можно принять, что внутри каждого «кусочка» плотность постоянна: $\mu = const = f(M_i),$ где $M_i(x_i, y_i, z_i)$ – некая «средняя» точка в $v_i$. Обозначим объём «кусочка» $v_i$ через $\Delta v_i$, тогда масса этого «кусочка» будет приближенно равна: $\Delta m_i \approx f(M_i)\Delta v_i.$ Масса всего тела $V$ будет равна сумме масс «кусочков» $v_i$ : $m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i.$ Назовем $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i$ – интегральной суммой. Перейдем к пределу при $n \to \infty$ таким образом, что каждый «кусочек» $v_i$ будет стягиваться в точку (при этом максимальный диаметр $v_i$ стремится к нулю). Получим: $m = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i$, $\max diam v_i \to 0$, $1 \le i \le n$. Задача о массе тела решена.

Введем новое понятие. Если предел интегральной суммы существует, то он называется тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по объему $V$ и обозначается: $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i$ ; $\max diam v_i \to 0, 1 \le i \le n$ [29].

Или иначе: если предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$ (где $\lambda = \max diam v_i$) существует, то он называется тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по объему $V$ и обозначается:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i .$$

Терминология для тройных интегралов совпадает с соответствующей терминологией для двойных интегралов. Точно так же формулируется и теорема существования тройного интеграла [14].

Свойства двойных интегралов, по сути, полностью переносятся на тройные интегралы. Заметим только, что если подынтегральная функция $f(x,y,z)$ тождественно равна 1, то тройной интеграл выражает объем $V$ области $\Omega$: $\iiint\limits_\Omega dv = V$ [15]. Потому, известные для двойного интеграла свойства надо теперь сформулировать следующим образом:

1) Если функция $f(x,y,z)$ во всех точках области интегрирования $\Omega$ удовлетворяет неравенствам $m \le f(x,y,z) \le M$, то $mV < \iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv < MV$,

где $V$ – объем области $\Omega$.

2) Тройной интеграл равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке области интегрирования на объем области интегрирования, т.е. $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv = f(\xi,\eta,\zeta)V$ [17]. Тройные интегралы обладают

теми же свойствами, что и двойные интегралы: линейность, аддитивность, аналог формулы среднего значения и т.д.

Обратимся теперь к вопросу о вычислении тройного интеграла.

Пусть функция $f(x,y,z)$ непрерывна в рассматриваемой области $V$.

$V=[a, b; c, d; e, f]$ – прямоугольный параллелепипед, проектирующийся на плоскость $yOz$ в прямоугольник

$R=[c, d; e, f]$. Тогда $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_R f(x,y,z)dydz$ (1). Заменяя в (1) двойной интеграл повторным, получим: $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_e^f f(x,y,z)dz$ (2).

Вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трёх определённых интегралов. Если первые два интеграла в (2) объединить в двойной, то будем иметь: $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_P dxdy \int\limits_e^f f(x,y,z)$ (3), где $P=[a, b; c, d]$ – проекция параллелепипеда $V$ на плоскость $xOy$ [25].

Пусть область $V$ заключена между плоскостями $x=a, x=b,$ причём каждое сечение области $V$ плоскостью $x=const, a \le x \le b,$ представляет собой квадрируемую фигуру $G(x)$ (рис. 2).

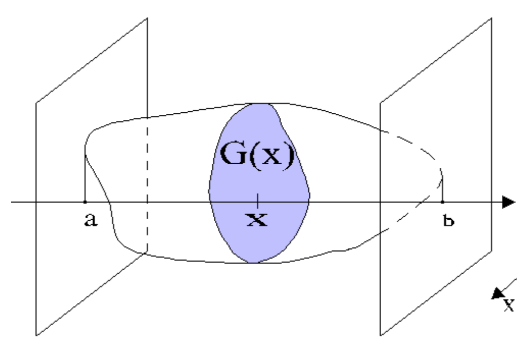


*Рис. 2. Квадрируемая фигура G(x)*

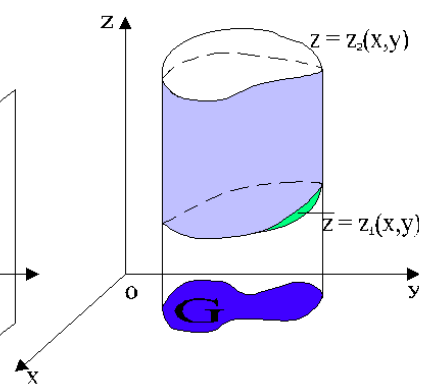


*Рис. 3. Квадрируемая фигура G*

Тогда $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{G(x)} f(x,y,z)dydz$ (4).

Тело $V$ представляет собой «цилиндрический брус», ограниченный снизу и сверху, соответственно, поверхностями $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$, проектирующимися на плоскость $xOy$ в некоторую квадрируемую фигуру $G$ (рис. 3).

$z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ – непрерывны в $G$. Тогда

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{G(x)} f(x, y, z)dydz \quad (5).$$

Если $G = \{(x, y) : a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$, то

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x.y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

*Замена переменных в тройном интеграле* $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$ – это переход от переменных *x, y, z* к новым переменным *u, v, w* по формулам: $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w), (u, v, w) \in \tau$ (6). При этом если выполняются условия:

1) отображение (6) взаимно однозначно;

2) функции в (6) непрерывно дифференцируемы в области $\tau$;

3) якобиан отображения $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \ne 0$, то имеет место формула:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_\tau f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))|\Delta| dudvdw \quad (7).$$

Формулы (6) связывают декартовы координаты с криволинейными координатами (*u, v, w*) в области *V*. Рассмотрению вопроса о вычислении тройного интеграла в системах криволинейных координат [10] посвятим следующий параграф.

## 1.2. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах

Приведем краткое описание подхода к рассмотрению цилиндрических координат. Пусть область $\Omega$ будет отнесена к системе цилиндрических координат $(r,\varphi,z)$, в которой положение точки $M$ в пространстве определяется полярными координатами $(r,\varphi)$, ее проекции $P$ на плоскость $xOy$ и ее аппликатой ($z$). Выбрав взаимное расположение осей координат (рис. 4), установим связь, между декартовыми и цилиндрическими координатами точки $M$: $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ z = z.$

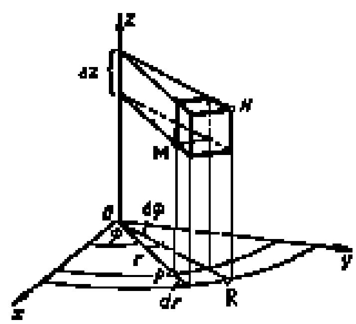


*Рис. 4. Взаимное расположение осей*

Далее разобьем область $\Omega$ на частичные области $v_i$ тремя системами координатных поверхностей: $r = const,\ \varphi = const,\ z = const$ (8), которыми будут соответственно круговые цилиндрические поверхности, осью которых является ось $Oz$, полуплоскости, проходящие через ось $Oz$, и плоскости, параллельные плоскости $xOy$. Частичными областями $v_i$ являются прямые цилиндры $MN$ (рис. 4). Так как объем цилиндра $MN$ равен площади основания, умноженной на высоту, то для элемента объема получаем выражение: $dv = rdrd\phi dz$ [27].

Преобразование тройного интеграла $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$ к цилиндрическим координатам производится совершенно аналогично преобразованию двойного интеграла к полярным. Для этого нужно в выражении подынтегральной функции $f(x, y, z)$ переменные $x,\ y,\ z$ заменить по формулам (8) и взять элемент объёма равным $rdrd\varphi dz$. Получим:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega^*} f(r\cos\phi, r\sin\phi, z)rdrd\phi dz.$$

Если, $f(x, y, z) = 1,$ то $V = \iiint\limits_{\Omega} rdrd\phi dz$. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах приводится к интегрированиям по $r$, по $\varphi$ и по z на основании тех же принципов, что и в случае декартовых координат. В частности, если областью интегрирования служит внутренность цилиндра $r \le R,\ 0 \le z \le h$, то пределы трехкратного интеграла постоянны и не меняются при перемене порядка интегрирования.

Опишем аналогично общий подход к вычислению тройного интеграла в сферических координатах.

Пусть область интегрирования $\Omega$ будет относиться к системе сферических координат $(r, \theta, \varphi)$.

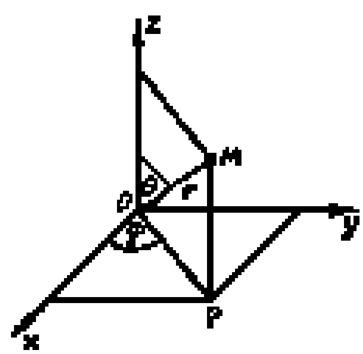


*Рис. 5. Проекция радиуса вектора точки на плоскость Оху и ось Ох*

В этой системе координат положение точки $M$ в пространстве определяется её расстоянием $r$ от начала координат (длина радиуса-вектора точки), углом $\theta$ между радиусом-вектором точки и осью $Oz$ и углом $\varphi$ между проекцией радиуса вектора точки на плоскость $xOy$ и осью $Ox$ (рис. 5).

При этом $\theta$ может изменяться от 0 до $\pi$, а $\varphi$ – от 0 до $2\pi$.

Связь между сферическими и декартовыми координатами легко устанавливается:

$$MP = r\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = r\cos\theta,\ OP = r\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = r\sin\theta,\ x = OP\cos\varphi,\ y = OP\sin\varphi.$$

Отсюда $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ (9). Разбиваем область $\Omega$ на частичные области $v_i$, тремя системами координатных поверхностей: $r = const,\ \varphi = const,\ \theta = const,$ которыми будут, соответственно, сферы с центром в начале координат, полуплоскости, проходящие, через ось *Oz*, и конусы с вершиной в начале координат и с осями, совпадающими с одной из полуосей *Oz*. Частичные области $v_i$ – «шестигранники» (рис. 6) [26].

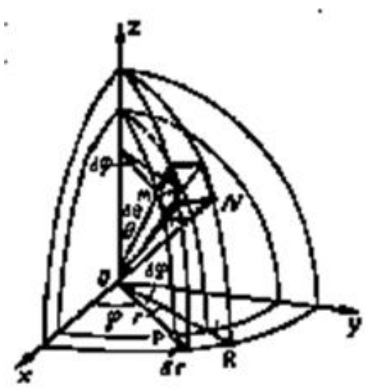


*Рис. 6. Шестигранник MN*

Рассмотрим шестигранник *MN* как прямоугольный параллелепипед с измерениями, равными: $dr$ по направлению полярного радиуса, $rd\theta$ по направлению меридиана, $r\sin\theta d\varphi$ по направлению параллели. Для элемента объема мы получим выражение $dv = r^2\sin\theta drd\varphi d\theta$. Заменив в тройном интеграле $x, y, z$ по формулам (9) и взяв элемент объема равным полученному выражению, будем иметь:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\varphi d\theta.$$

Особенно удобно применение сферических координат в случае, когда область интегрирования $\Omega$ – шар с центром в начале координат или шаровое кольцо. Например, в последнем случае, если радиус внутреннего шара $R_1$, а внешнего $R_2$, пределы интегрирования расставляются следующим образом:

$$\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_{R_1}^{R_2} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta.$$

Если $\Omega$ – шар, то нужно положить $R_1 = 0$.

## 1.3. Применение тройного интеграла в прикладных задачах

Как показано ранее, тройной интеграл выражает собой массу неоднородного тела объема *V*, плотность которого в каждой точке равна $\gamma = \gamma(x, y, z)$:

$$m = \iiint_V \gamma(x, y, z) dxdydz. \quad (10)$$

Пусть плотность вещества, из которого состоит тело, равна $\gamma = \gamma(x, y, z)$. Тогда координаты центра тяжести тела вычисляются посредством формул:

$$x_t = \frac{\iiint_V \gamma x dxdydz}{m}, \; y_t = \frac{\iiint_V \gamma y dxdydz}{m}, \; z_t = \frac{\iiint_V \gamma z dxdydz}{m}. \quad (11)$$

Если плотность $\gamma = 1$, то (11) есть координаты центра тяжести однородного тела.

Моменты инерции неоднородного тела массы *m* плотности $\gamma = \gamma(x, y, z)$ относительно координатных осей *Ox*, *Oy*, *Oz* выражаются соответственно формулами:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \cdot \gamma dv, \; I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \cdot \gamma dv, \; I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \cdot \gamma dv. \quad (12)$$

Моменты инерции тела относительно оси играют важную роль при вычислении кинетической энергии тела при его вращении около соответствующей оси. Пусть тело $\Omega$ вращается около оси *Oz* с постоянной угловой скоростью $\omega$. Найдем кинетическую энергию $J_z$ тела. Как известно, кинетическая энергия точки измеряется величиной $\frac{1}{2}mv^2$, где $m$ – масса точки, а $v$ – величина ее скорости. Кинетическая энергия системы точек определяется как сумма кинетических энергий отдельных точек, а кинетическая энергия тела – как сумма кинетических энергий всех частей, на которые оно разбито. Это обстоятельство позволяет применить для вычисления кинетической энергии тройной интеграл [12].

Возьмем какую-нибудь окрестность $dv$ точки $P(x, y, z)$ тела $\Omega$. Величина линейной скорости $v$ точки $P$ при вращении около оси *Oz* равна $\omega\sqrt{x^2 + y^2}$, и значит, кинетическая энергия части $dv$ тела $\Omega$ выразится так : $\frac{1}{2}\delta(P)dv\omega^2(x^2 + y^2)$, где $\delta(P) = \delta(x, y, z)$ – плотность тела в точке $P$. Для кинетической энергии всего тела $\Omega$ получаем $J_z \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)\delta(P)dv = \frac{1}{2}\omega^2 \iiint\limits_{\Omega}(x^2 + y^2)\delta(P)dv$, т.е. $J_z = \frac{1}{2}\omega^2 I_z$. Кинетическая энергия тела, вращающегося около некоторой оси с постоянной угловой скоростью, равна половине квадрата угловой скорости, умноженной на момент инерции тела относительно оси вращения [31].

**Выводы первой главы**

В данной главе проанализированы основные теоретические сведения, связанные с понятием тройного интеграла и его применением в решении прикладных задач, позволяющие при составлении методических рекомендаций лучше ориентироваться в учебном материале.

# ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

Данную главу посвятим рассмотрению некоторых методических указаний, полезных при изучении раздела «Кратные интегралы», входящего в вузовскую учебную дисциплину «Математический анализ». А также рассмотрим с методическими комментариями примеры на вычисление объемов тел с помощью тройного интеграла и некоторые другие задачи вычислительного и прикладного характера, связанные с тройным интегралом.

## 2.1. Методические рекомендации к изучению понятия «Тройной интеграл»

Как указано в [26], ввиду сложности теоретических основ и прикладного аппарата высшей математики, очевидно, что актуальными являются анализ существующих методов преподавания высшей математики для студентов различных специальностей (в том числе, педагогических) и на его основе – разработка инновационных дидактических методов.

Как известно, современная педагогика опирается на основные дидактические принципы:

1) научность;
2) наглядность;
3) связь теории с практикой.

Научность отражается в математике как в универсальном методе исследования и обучения, инструменте построения теории других наук, в абстрактности ее конструкций и понятий [21]. Наглядное представление учебного материала или визуализация применяется с целью улучшения запоминания ассоциативных связей и отношений между понятиями. Значение наглядных схем и таблиц неоценимо, так как позволяет человеку использовать автоматически срабатывающие алгоритмы обработки зрительной информации [26]. По мнению Т.В. Кудрявцева, наглядность – это мост, перекинутый от знаний в понятиях к конкретным практическим задачам [16].

Принцип связи теории с практикой является фундаментом метода изложения учебного материала, при котором демонстрация и закрепление основных положений теории, рассмотренных во время лекций, осуществляется посредством решения прикладных задач на практических занятиях [16].

Основополагающим приемом обучения, с нашей точки зрения, является синтез трех методов – это наглядное структурирование фрагментов учебного материала с помощью схем или таблиц, сопровождение визуализированного представления знаний объяснением преподавателя, а также решение задач практического содержания. Подобный комплекс закрепляет теоретические знания студентов по конкретной изучаемой теме и обеспечивает их профессионально ориентированное применение к решению прикладных задач.

На наш взгляд, важно рассмотреть и проанализировать некоторые компоненты методики преподавания математики, включающие наглядное представление теоретических положений учебного материала в виде таблиц и решение некоторых прикладных задач, которые приводят к понятию и вычислению тройного интеграла.

Вычисление массы, координат центра тяжести и моментов инерции пространственного тела представляет собой одно из важных приложений тройного интеграла в механике. Изучение данной темы следует начинать на лекции с определения и вычисления тройного интеграла в различных системах координат, с формулировки теоретических положений, вывода основных формул, а также их наглядного представления в виде таблицы 1 [19].

*Таблица 1*

Вычисление тройного интеграла

| Тройной интеграл $I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$ | | |
|---|---|---|
| Система координат | Область $V$ – правильная фигура | Описание области интегрирования |
| *Декартовы прямоугольные координаты* | В направлении оси $Oz$: прямая, параллельная оси $Oz$, пересекает границу $V$ не более, чем в двух точках | $x = a, x = b(a < b), y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x),$ $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x), z = z_1(x, y), z = z_2(x, y),$ $z_1(x, y) \le z_2(x, y)$ |
| Сведение к трехкратному интегралу $I = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$ | | |
| *Цилиндрические координаты* | $V$ образована цилиндрической поверхностью | $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = Z$ $(r \ge 0,\ \varphi \in [0; 2\pi],\ Z \in R)$ |
| Сведение к трехкратному интегралу $I = \iiint\limits_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz$ | | |
| *Сферические координаты* | $V$ – шар, его часть или $f = f(x^2 + y^2 + z^2)$ | $x = \rho\cos\varphi \cdot \sin\theta,\ y = \rho\sin\varphi \cdot \sin\theta,\ z = \rho\cos\theta$ $(\rho \ge 0, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi)$ |

Сведение к трехкратному интегралу

$$I = \iiint\limits_V f(\rho\cos\varphi \cdot \sin\theta, \rho\sin\varphi \cdot \sin\theta, \rho\cos\theta) \cdot \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta$$

В учебном пособии [18, с. 90] приводятся методические рекомендации к применению определённого интеграла, общий характер которых позволяет выполнить их «перенос» на понятие тройного интеграла.

Как видно из табл. 1, при определенных условиях тройной интеграл сводится к рассмотрению трех однократных интегралов, каждый из которых вычисляется независимо. Поэтому, как и в изложении любой теории интеграла, в случае тройного интеграла полезно придерживаться общей схемы: а) задача, приводящая к понятию; б) определение; в) свойства; г) условия существования; д) вычисление е) приложения.  Методическое обеспечение изучения тройного интеграла, как и любого другого интеграла Римана, состоит в иллюстрации смысла понятия. В первой главе, по сути, была представлена реализация названных здесь пунктов а), б), в), д), е) приведенной схемы.

Таким образом, изложение теоретических сведений по теме «Тройной интеграл» с использованием приемов схематизации и визуализации показывает, что на сегодняшний день остается востребованным внимание  к практической реализации в процессе обучения основных дидактических принципов (научности, наглядности и связи теории с практикой) путем наглядного структурирования фрагментов учебного материала с помощью схем или таблиц.

## 2.2. Примеры вычисления тройного интеграла в декартовых, цилиндрических и сферических координатах

Основные методические особенности обучения вычислению тройных интегралов связаны с необходимостью научить студентов придерживаться основных общих правил. Можно их представить в виде схемы, представленной в форме приведенного ниже перечня.

1. Построение чертежа, на котором представлена фигура (тело) $V$ – область интегрирования.

2. Построение проекции данной фигуры (тела) на какую-либо из координатных плоскостей. Выбор плоскости проектирования связан с обеспечением наибольшей простоты способа вычислении повторного интеграла, включающего в себя двойной интеграл.

3. Выбор системы координат, в которой удобнее вычислять повторный интеграл и в случае выбора криволинейной системы координат преобразование подынтегрального выражения к соответствующему виду.

4. На основе наглядного образа (чертежа) тела и его проекции расстановка пределов интегрирования в повторном интеграле (также по неким общим правилам в зависимости от выбранной системы координат).

5. Непосредственное вычисление определенных интегралов, входящих в состав повторного интеграла. При этом особое значение придается знанию таблицы интегралов и различных методов интегрирования.

Покажем реализацию приведенной общей схемы на конкретных примерах.

*Пример 1.* Требуется вычислить интеграл $I = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$, распространённый на тетраэдр $(V)$, ограничиваемый плоскостями $x=0$, $y=0$

(рис. 7) $z=0$ и $x+y+z=1$ [6].

Решение: Запишем границы изменения каждой из переменных:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1-x, \\ 0 \le z \le 1-x-y. \end{cases}$$

Тогда получим интеграл:

$$I=\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2}\right]dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2}\right]_0^{1-x-y}dy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3-x}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).$$

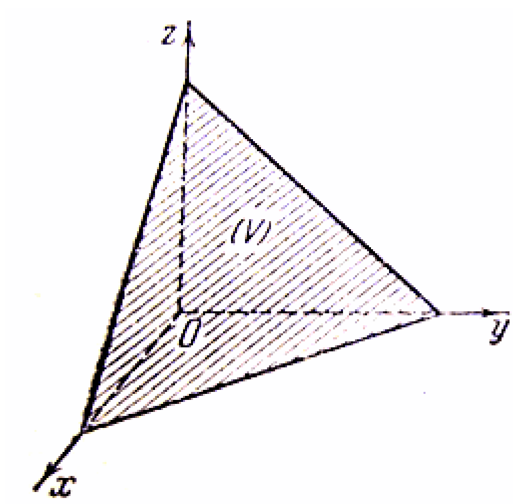


*Рис. 7. Тетраэдр* $(V)$

*Пример 2*. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V (2x+y-z)dxdydz$, где область $V$ ограничена поверхностями $2x+y-z=2, x=0,\ y=0,\ z=0$ [11].

Решение: Поверхности, ограничивающие область интегрирования, являются плоскостями, а область $V$ является тетраэдром, который определяется системой неравенств: $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 2-2x, \\ 2x+y-2 \le z \le 0. \end{cases}$

Изобразим область $V$ (рис. 8).

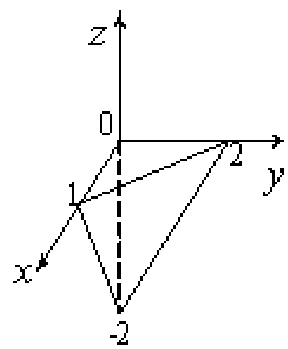


*Рис. 8. Область V*

Проекцией области $V$ на плоскость $xOy$ является прямоугольный треугольник, определяемый системой неравенств: $\begin{cases} 2x+y \le 2, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$

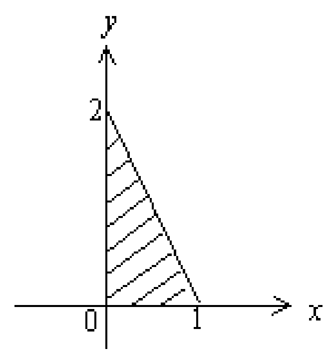


*Рис. 9. Проекция области V*

Данная проекция на рис. 9 необходима для правильной расстановки пределов интегрирования в повторном интеграле. Поэтому, используя общие рекомендации по вычислению тройного интеграла в декартовых координатах, получим следующий результат:

$$\iiint\limits_V (2x+y-z)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} dy \int\limits_{2x+y-2}^{0} (2x+y-z)dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} \left( (2x+y)z - \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_{z-2x+y-2}^{0} dy = -\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} \left( (2x+y)(2x+y-2) - \frac{(2x+y-2)^2}{2} \right) dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left( 8 - 8x - \frac{8}{3} + \frac{8x^3}{3} \right) dx = -4\int\limits_0^1 \left( \frac{2}{3} - x + \frac{x^3}{3} \right) dx = -4\left( \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 \right) \Bigg|_0^1 = -1.$$

*Пример 3*. Вычислим тройной интеграл $I = \iiint\limits_\Omega (x+y+z)dxdydz,$ где $\Omega$ - область, ограниченная координатными плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0$ и плоскостью $x+y+z=1$ [8].

Решение: Интегрирование по $z$ совершается от $z=0$ до $z=1-x-y$. Поэтому, обозначая проекцию области $\Omega$ на плоскость $xOy$ через $D$, получим:

$$I = \iiint\limits_\Omega (x+y+z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{1-x-y} (x+y+z)dz = \iint\limits_D \left[ (x+y)z + \frac{z^2}{2} \right]\Bigg|_0^{1-x-y} dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \left[ (x+y) - (x+y)^2 + \frac{(1-x-y)^2}{2} \right] dxdy.$$

Расставим теперь пределы интегрирования по области $D$ – треугольнику, уравнения сторон которого $x=0, y=0, x+y=1$:

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left((x+y)-(x+y)^2+\frac{(1-x-y)^2}{2}\right)dxdydz=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left[(x+y)-(x+y)^2+\frac{(1-x-y)^2}{2}\right]dy=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\left[\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{(x+y)^3}{3}-\frac{(1-x-y)^3}{6}\right]\Bigg|_0^{1-x}=$$

$$=\int\limits_0^1\left[\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}+\frac{x^3}{3}+\frac{(1-x)^3}{6}\right]dx=\frac{1}{8}.$$

*Пример 4*. Вычислить интеграл $I=\iiint\limits_U e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdydz,$ где область $U$ представляет собой единичный шар $x^2+y^2+z^2\le 1$ [6].

Решение: Центр данного шара расположен в начале координат. Следовательно, в сферических координатах область интегрирования $U$ описывается неравенствами $0\le\rho\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\pi.$ Записывая интеграл в сферических координатах, получаем:

$$I=\iiint\limits_U e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdydz=\iiint\limits_U e^{\left(\rho^2\right)}\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 e^{\rho^2}\rho^2 d\rho\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta.$$

Тройной интеграл вырождается в нахождение трех однократных интегралов, каждый из которых вычисляется независимо. В результате находим:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 e^{\rho^3}\rho^2 d\rho\int\limits_0^{x}\sin\theta d\theta=\left[(\varphi)\Big|_0^{2x}\right]\cdot\int\limits_0^1\left(e^{\rho^3}\cdot\frac{1}{3}d\rho^3\right)\cdot\left[(-\cos\theta)\Big|_0^{x}\right]=$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{3}\left[\left(e^{\rho^3}\right)\Big|_{\rho^3=0}^{\rho^3=1}\right]\cdot\left(-\cos\pi+\cos 0\right)=\frac{2\pi}{3}\cdot(e-1)\cdot 2=\frac{4\pi}{3}(e-1).$$

*Пример 5*. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_T\left((x+y)^2-z\right)dxdydz$, если область $T$ ограничена поверхностями $z=0$ и $(z-1)^2=x^2+y^2$ [10].

Решение: Область $T$ представляет собой конус (рис. 10, а).

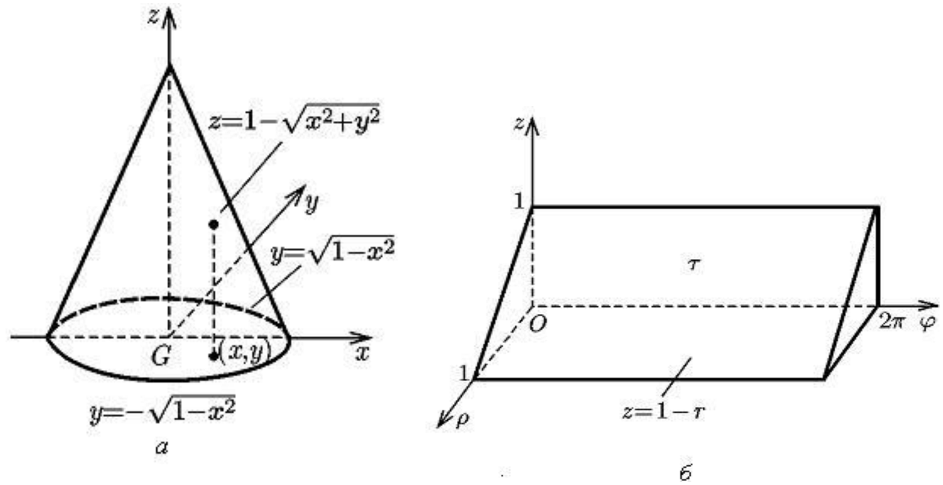


*Рис. 10. Коническая поверхность*

Уравнение конической поверхности, ограничивающей область *T*, имеет вид: $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$. Саму область *T* можно представить следующим образом: $T = \{(x, y, z) : (x, y) \in G, 0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$, где *G* – круг радиуса 1 с центром в начале координат. Данный тройной интеграл можно свести к последовательному вычислению трех определенных интегралов в прямоугольных координатах:

$$I = \iiint_T \left((x+y)^2 - z\right) dxdydz = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} \left[(x+y)^2 - z\right] dz.$$

Удобнее вычислить интеграл, перейдя к цилиндрическим координатам $(\rho, \varphi, z)$: $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z.$ Тогда прообраз круга *G* прямоугольник $\{(\rho, \varphi) : 0 \le \rho \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, прообраз конической поверхности – плоская поверхность $z = 1 - \rho$, а прообраз области *T* – область *τ*, изображенная на (рис. 10, б). Якобиан перехода к цилиндрическим координатам равен *ρ*, подынтегральная функция в цилиндрических координатах равна $\rho^2(1 + \sin 2\varphi) - z\rho^2$ [31].

*Пример 6.* Вычислить интеграл $\iiint\limits_U (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)dxdydz$, где область $U$ ограничена поверхностью $x^2 + y^2 \le 1$ и плоскостями $z = 0, z = 1$ на рис. 11 [9].

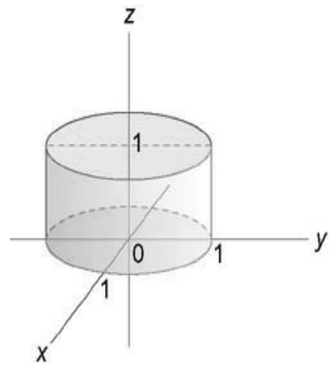


*Рис. 11. Область U*

<u>Решение:</u> Данный интеграл удобно вычислить в цилиндрических координатах. Проекция области интегрирования на плоскость *xOy* представляет собой круг $x^2 + y^2 \le 1$ или $0 \le \rho \le 1$ (рис. 12).

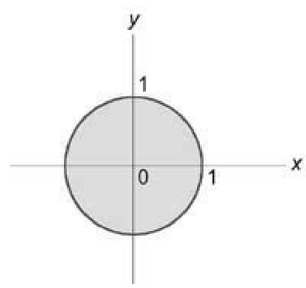


*Рис. 12 Проекция области U*

Заметим, что подынтегральное выражение записывается в виде $(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) = (x^2 + y^2)^2 = (\rho^2)^2 = \rho^4$. Тогда интеграл будет равен $I = \iiint\limits_U \rho^4 \rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2x} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^4 \rho d\rho \int\limits_0^1 dz$. Здесь во втором интеграле добавлен множитель $\rho$ якобиан преобразования декартовых координат в цилиндрические. Все три интеграла по каждой из переменной не зависят друг от друга. В результате тройной интеграл легко вычисляется:

$$I = \iiint\limits_U \rho^4 \rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2x} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^4 \rho d\rho \int\limits_0^1 dz = 2\pi \int\limits_0^1 \rho^5 d\rho \int\limits_0^1 dz = 2\pi \cdot 1 \cdot \int\limits_0^1 \rho^5 d\rho = 2\pi \left( \frac{\rho^6}{6} \right) \Bigg|_0^1 = 2\pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

*Пример 7*. Вычислить интеграл $\iiint\limits_U (x^2 + y^2) dxdydz$, где область $U$ ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 3z,\ z = 3$ [11].

<u>Решение</u>: Область интегрирования изображена на рис. 13.

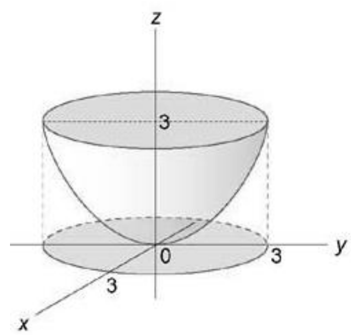


*Рис. 13. Область интегрирования*

Для вычисления интеграла перейдем к цилиндрическим координатам: $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z$. Дифференциал при этом равен $dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz$ ($\rho$ – якобиан). Уравнение параболической поверхности принимает вид: $\rho^2 \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi = 3z$ или $\rho^2 = 3z$. Проекция области интегрирования $U$ (рис. 14) на плоскость $xOy$ представляет с собой окружность $x^2 + y^2 \le 9$ радиусом $\rho = 3$.

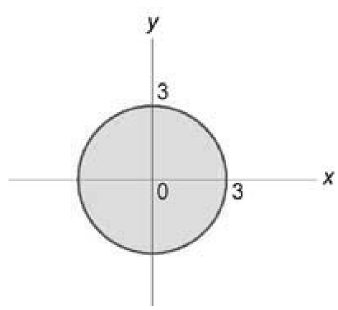


*Рис. 14. Проекция области интегрирования*

Координата $\rho$ изменяется в пределах от 0 до 3, угол $\varphi$ от 0 до $2\pi$ и координата $z$ от $\dfrac{\rho^3}{3}$ до 3. В результате интеграл будет равен:

$$I = \iiint\limits_{U} \left(x^2 + y^2\right) dxdydz = \iiint\limits_{U'} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \rho^3 d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{3}}^{3} dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \rho^3 d\rho \cdot (z) \Big|_{\frac{\rho^2}{3}}^{3} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \rho^3 \left(3 - \frac{\rho^2}{3}\right) d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \left(3\rho^3 - \frac{\rho^5}{3}\right) d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{3\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{18} \right) \Big|_0^3 \right] d\varphi = \left( \frac{3 \cdot 81}{4} - \frac{729}{18} \right) \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{81}{4} \cdot 2\pi = \frac{81\pi}{2}.$$

Таким образом, приведенные примеры показывают, что при вычислении тройных интегралов, как в декартовых прямоугольных, так и цилиндрических координатах существенную роль играет наглядное представление области интегрирования.

Далее рассмотрим примеры на вычисление тройного интеграла в сферической системе координат.

*Пример 8.* Вычислить интеграл $J = \iiint\limits_{T} (x + y + z) dxdydz$, где $T$ область, ограниченная поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z = 0$, $z \geq 0$ (рис. 15) [8].

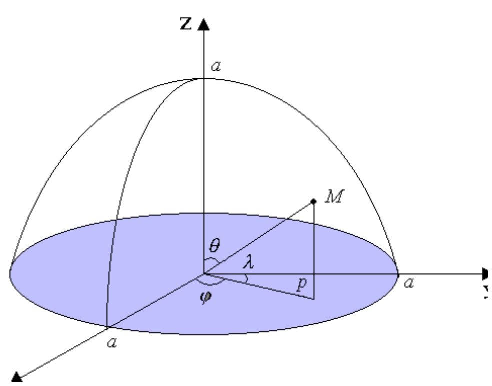


*Рис. 15. Область T*

Решение: Перейдём в интеграле к сферическим координатам по формуле (9). Тогда область интегрирования можно задать неравенствами $\tau = \left\{(\varphi, r, \theta): 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le a, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$. Значит,

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a (\sin\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi) r^3 \sin\varphi dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin^2\varphi(\cos\theta + \sin\theta) + \cos\varphi\sin\varphi\right] \left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^a d\theta =$$

$$= \frac{a^4}{4}\left[\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi(\sin\theta - \cos\theta)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} \sin\varphi d(\sin\varphi)\right] =$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}(1 - \cos 2\varphi)d\varphi = \frac{a^4}{4}\left[(\varphi)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi d2\varphi\right] = \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right), V = \frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

*Пример 9.* Найти интеграл $\iiint\limits_U \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$, где область интегрирования $U -$ шар, заданный уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ [7].

Решение: Поскольку область $U$ представляет собой шар, и к тому же подынтегральное выражение является функцией, зависящей от функции вида $f(x^2 + y^2 + z^2)$, то перейдем к сферическим координатам. Сделаем замену: $x = \rho\cos\varphi\sin\theta, y = \rho\sin\varphi\sin\theta, z = \rho\cos\theta.$ Новые переменные изменяются в пределах: $0 \le \rho \le 5, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi$. Учитывая якобиан $\rho^2 sin\ \theta$, записываем интеграл в виде:

$$I = \iiint\limits_U \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz = \iiint\limits_U \rho\rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 \rho^3 d\rho \int_0^\pi \sin\theta d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 \rho^3 \left[(-\cos\theta)\Big|_0^x\right] d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 \rho^3 (-\cos\pi + \cos 0) d\rho =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 \rho^3 d\rho = \int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^3\right] d\varphi = 2\int_0^{2\pi} \frac{5^4}{4} d\varphi = \frac{625}{2} \cdot 2\pi = 625\pi.$$

*Пример 10*. Найти интеграл $\iiint\limits_U \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, где область интегрирования $U-$ шар, заданный уравнением $x^2+y^2+z^2=25$ [7].

<u>Решение</u>: Поскольку область $U$ представляет собой шар, и к тому же подынтегральное выражение является функцией, зависящей от функции вида $f(x^2+y^2+z^2)$, то перейдем к сферическим координатам. Сделаем замену: $x=\rho\cos\varphi\sin\theta, y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z=\rho\cos\theta.$ Новые переменные изменяются в пределах: $0\le\rho\le 5, 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\theta\le\pi.$ Учитывая якобиан $\rho^2 \mathit{sin}\ \theta$, записываем интеграл в виде:

$$I=\iiint\limits_U \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\iiint\limits_U \rho\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^5\rho^3 d\rho\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^5\rho^3\left[(-\cos\theta)\Big|_0^x\right]d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^5\rho^3(-\cos\pi+\cos 0)d\rho=$$

$$=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^5\rho^3 d\rho=\int\limits_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^3\right]d\varphi=2\int\limits_0^{2\pi}\frac{5^4}{4}d\varphi=\frac{625}{2}\cdot 2\pi=625\pi.$$

## 2.3. Примеры вычисления объема тела с помощью тройного интеграла

На практическом занятии с целью осознанного усвоения знаний, необходимых студентам при изучении других фундаментальных и математических дисциплин, им предлагаются для решения некоторые задачи прикладного содержания [26].

Решение задач на применение формул, содержащих тройной интеграл, в геометрических задачах в методическом плане определяется, прежде всего, необходимостью правильного выбора соответствующей формулы. А затем, по сути, реализуется та же схема, которая рассматривалась в связи с вычислением тройного интеграла.

*Пример 11.* Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями (рис. 16): $x+y=6,\ y=\sqrt{3x},\ z=4y,\ z=0.$

Решение:

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int\limits_0^3 dy\int\limits_{\frac{1}{3}y^2}^{6-y}dx\int\limits_0^{4y}dz=\int\limits_0^3 dy\int\limits_{\frac{1}{3}y^2}^{6-y}4ydx=\int\limits_0^3\left(24y-4y^2-\frac{4}{3}y^3\right)\Big|_0^3 dy=45.$$

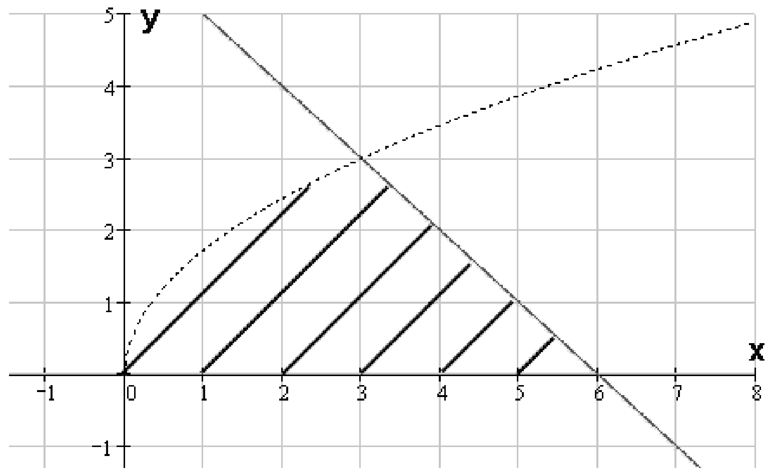


*Рис. 16. Проекция тела, ограниченного поверхностями:* $x+y=6, y=\sqrt{3x}, z=4y, z=0$.

*Пример 12.* Требуется вычислить объём тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2-ax=0$ (рис. 17) [7].

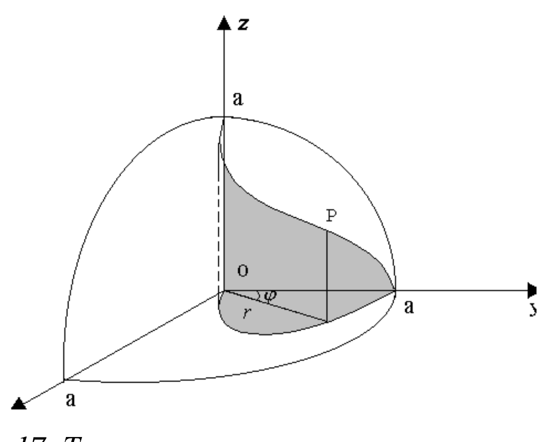


*Рис. 17. Тело, ограниченное поверхностями*

Решение: Рассмотрим $V$ – одну четвёртую часть тела, лежащую в первом октанте. Часть поверхности $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},$ вырезанная цилиндром, проектируется в область $D=\left\{(x,y):0\le x\le a, 0\le y\le \sqrt{ax-x^2}\right\}$. Тогда $\frac{1}{4}V=\iiint\limits_V dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz$. Перейдём в интеграле к цилиндрическим координатам по формулам $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z$. При этом уравнение окружности $x^2+y^2-ax=0$ преобразуется в кривую $r=a\cos\varphi,$ где $0\le\varphi\le\frac{1}{2}\pi,$ а уравнение поверхности $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ к виду $z=\sqrt{a^2-r^2}.$ Таким образом,

$$\frac{1}{4}V=\iiint\limits_V dxdydz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{a\cos\varphi}rdr\int\limits_0^{\sqrt{a^2-r^2}}dz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{a\cos\varphi}\sqrt{a^2-r^2}\,rdr=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{a\cos\varphi}\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[a^3\left(1-\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}-a^3\right]d\varphi==\frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)d(\cos\varphi)+\frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=$$

$$=\frac{a^3}{3}\left(\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{a^3}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{a^3}{3}\left(-1+\frac{1}{3}\right)+\frac{a^3\pi}{6}==-\frac{a^3}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{a^3\pi}{6}=\frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right),$$

$$V=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

*Пример 13.* С помощью тройного интеграла вычислить объём тела, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $x+2y+3z-6=0.$ Изобразить данное тело и его проекцию на плоскость $xOy$ [28].

<u>Решение</u>: Изобразим данное тело на рис. 18 и его проекцию (рис. 19) на плоскости $xOy$.

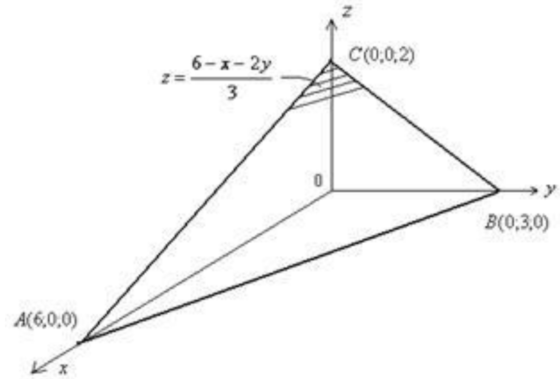


*Рис. 18. Тело, ограниченное координатными плоскостями*

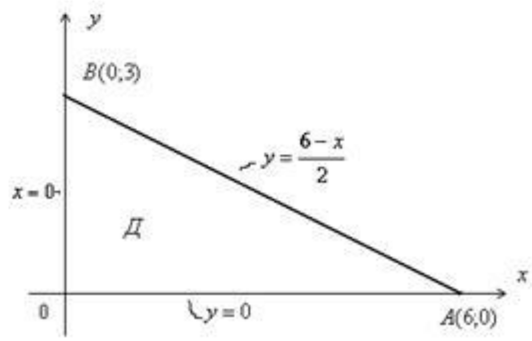


*Рис. 19. Проекция данного тела*

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_A dxdy \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} dz = \iint\limits_A \frac{6-x-2y}{3} dxdy = \frac{1}{3}\int_0^6 dx \int_0^{\frac{6-x}{2}} (6-x-2y)dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(6y - xy - 2\frac{y^3}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{1-x}{3}} = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(6y - xy - 2\frac{y^3}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(6\frac{6-x}{2} - x\frac{6-x}{2} - \left(\frac{6-x}{2}\right)^3\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^6 \left(18 - 3x - 3x + \frac{x^2}{2} - 9 + 3x - \frac{x^2}{4}\right)dx = \frac{1}{3}\int_0^6 \left(\frac{x^2}{4} - 3x + 9\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{12} - \frac{3x^2}{2} + 9x\right)\Bigg|_0^6 = \frac{1}{3}(18 - 54 + 54) = 6.$$

*Пример 14.* Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Выполнить чертеж данного тела и его проекции на плоскость *xOy*: $z = 0; y + z = 2; x^2 + y^2 = 4$ [7].

<u>Решение</u>: Сделаем чертеж, соответствующий данной задаче (рис. 20).

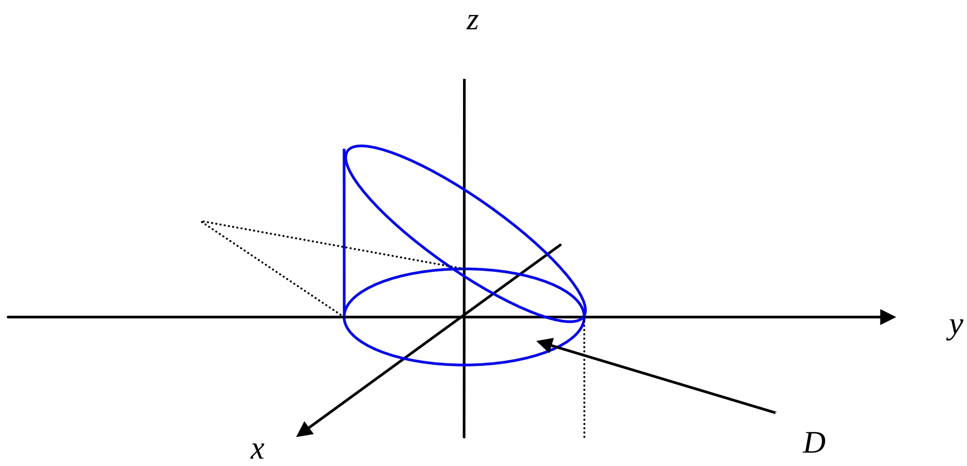


*Рис. 20. Тело, ограниченное заданными поверхностями.*

Тогда объем будет равен:

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_0^{2-y}dz=\iint\limits_D z\Big|_0^{2-y}dxdy=\iint\limits_D(2-y)dxdy=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2(2-r\sin\varphi)rdr=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(2r-r^2\sin\varphi\right)dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(r^2-\frac{1}{3}r^3\sin\varphi\right)\Bigg|_0^2 d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(4-\frac{8}{3}\sin\varphi\right)d\varphi=\left(4\varphi+\frac{8}{3}\cos\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=4\cdot 2\pi+\frac{8}{3}\cos 2\pi-4\cdot 0-\frac{8}{3}\cos 0=8\pi+\frac{8}{3}-\frac{8}{3}=8\pi.$$

## 2.4. Вычисление тройного интеграла в физических задачах

В случае решения с помощью тройного интеграла задачи с физическим содержанием на первый план выходит этап выбора подходящей формулы. Очевидно, что при этом большую важность в методическом смысле приобретает как понимание физических явлений и процессов, так и знание соответствующих формул, содержащих тройной интеграл, позволяющих вычислить ту или иную физическую величину. А далее снова наступает этап реализации уже обозначенной ранее методической схемы вычисления тройного интеграла. Проиллюстрируем эти положения примерами.

*Пример 15.* Найдем центр тяжести однородного полушара $\Omega$: $x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ z \ge 0$ [9].

Решение: Две координаты центра тяжести $\xi$ и $\eta$ равны нулю, полушар симметричен относительно оси *Oz*. Интеграл $\iiint\limits_{\Omega} zdv$ удобно вычислить, перейдя к сферическим координатам:

$$\iiint\limits_{\Omega} zdv = \iiint\limits_{\Omega} r\cos\theta r^2 \sin\theta drd\phi d\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{R} r^3 dr = \frac{1}{2} 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{4}\pi R^4.$$

Так как объём полушара равен $\frac{2}{3}\pi R^3$, то $\zeta = \dfrac{\frac{1}{4}\pi R^4}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{8}R$.

*Пример 16.* Вычислить массу тела, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$, если плотность тела в точке $M(x,y,z)$ равна $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(x+y+z+1)^3}$.

Решение: Построим область интегрирования (рис. 21).

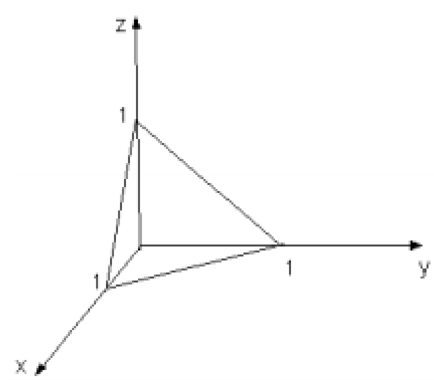

*Рис. 21. Искомая область интегрирования*

Тогда проекция на плоскость *xOy* будет иметь вид (рис. 22):

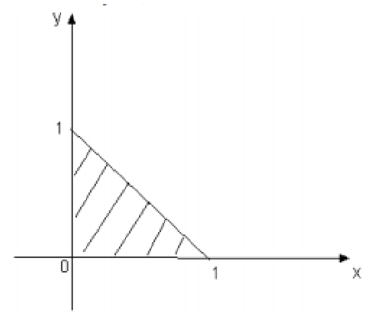


Рис. 22. Проекция области интегрирования

Тогда масса будет равна:

$$m=\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(x+y+z+1)^3}=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(-\frac{1}{2(x+y+z+1)^2}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y}dy=-\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{(x+y+1-x-y)^2}-\frac{1}{(x+y+1)^2}\right)dy=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{(x+y+1)^2}\right)dy=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{4}y+\frac{1}{x+y+1}\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{4}(1-x)+\frac{1}{x+1-x+1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\right)dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{4}-\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x-\frac{x^2}{8}-\ln|x+1|\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}-\ln 2\right)=\frac{\ln 2}{2}-\frac{5}{16}.$$

**Выводы второй главы**

Визуализация изучаемого материала в виде схем или таблиц делает возможным усвоение студентами теоретических основ математики на базе дидактического принципа наглядности, систематизирует знания обучающихся, способствует осознанному запоминанию ими учебного материала.

Таким образом, в данной главе приведены и подробно разобраны основные типы задач, связанных с изучением темы «Тройной интеграл». Задачи снабжены рисунками, что позволяет, если придерживаться приведенных выше методических схем, быстро найти и реализовать необходимый путь решения. Рассмотрен ряд прикладных задач механики, основанных на применении интегрального исчисления: нахождение массы, координат центра тяжести.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрено понятие тройного интеграла, его свойства и вычисление, а также его применение к решению прикладных задач. С помощью тройных интегралов возможно нахождение объёмов, ограниченных различными поверхностями. Рассмотрено вычисление тройного интеграла в декартовых, сферических, цилиндрических координатах. Представлены в теоретическом смысле некоторые механические приложения тройного интеграла: нахождение статических моментов, координат центра тяжести кривой, массы тела. Приведены теоретические основы физических приложений. Предпринята попытка привести общие методические рекомендации к решению вычислительных и прикладных задач, связанных с тройным интегралом. Показаны примеры решения задач на нахождение тройного интеграла, служащие иллюстрацией применения указанных рекомендаций на практике.

Важно было показать не только теоретический материал, но и разработать рекомендации по изучению избранной темы математического анализа, привести примеры задач, указать способы их решения.

В процессе выполнения работы была достигнута поставленная цель – предложена иллюстрация примерами применения в задачах теоретических основ тройного интеграла, снабженная методическими комментариями.

Решены сформулированные в начале исследования задачи.

Апробация материалов исследования состояла в публикации тезисов нескольких докладов на научно-практических студенческих конференциях ПГГПУ в 2015-2017 гг.

Представленный материал может быть использован в будущей профессиональной деятельности. Приведенные в работе сведения можно рассматривать при изучении соответствующей темы в вузе. Перспективы работы над темой могут быть связаны с рассмотрением других видов задач на вычисление и применение кратных интегралов.

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Багданова А.Ю.* Об одном примере применения двойного интеграла в решении прикладной задачи / А.Ю. Багданова (Науч. рук. Латышева Л.П.) // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. межрегион. науч.- практ. конф. студентов матем. фак-тов / ред. кол.: Ю.В. Корзнякова, И.В. Косолапова; под общ. ред. Ю.В. Корзняковой; Перм. гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2016. – Вып. 9. С. 10-11.

2. *Багданова А.Ю.* Вычисление массы тела в цилиндрической системе координат / А.Ю. Багданова (науч. рук. Латышева Л.П.) // Вопросы математики, её истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. межрегион. науч.- практ. конф. студентов матем. фак-тов / ред. кол.: Ю.В. Корзнякова, И.В. Косолапова; под общ. ред. Ю.В. Корзняковой; Перм. гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2015. – Вып. 8. С. 9-10.

3. *Багданова А.Ю.* Методическое обеспечение решения задач по теме «Тройной интеграл» / А.Ю. Багданова (Науч. рук. Латышева Л.П.) // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. межрегион. науч.- практ. конф. студентов матем. фак-тов / ред. кол.: Ю.В. Корзнякова, И.В. Косолапова; под общ. ред. Ю.В. Корзняковой; Перм. гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2017. – Вып. 10. С. 59-60.

4. *Болгарский Н.П.* История математики / Н.П. Болгарский. – М. : Физматлит, 2000. – 100 с.

5. *Бурбаки Н.А.* Очерки истории математики / Н.А. Бурбаки [Электронный ресурс]. – Электрон. дан.– Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view&book_id=112134&page_id=264 (дата обращения: 18 03.2015).

6. *Васяк Л.В.* Профессионально ориентированные задачи по математике для студентов инженерных специальностей: учеб. пособие / Л.В. Васяк. – М: Сфера, 2010. – 60 с.

7. *Виноградова И.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу / И.А. Виноградова. – М. : Наука, 2011. – 280 с.

8. *Данко П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко. – М.: Наука, 2009. – 815 с.

9. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1980. – 210 с.

10. *Запорожец Г.И.* Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. – М.: Просвещение, 1996. – 120 с.

11. *Зиновьева Л.А.* Сборник задач по математическому анализу для студентов второго курса факультета математики-информатики / Л.А. Зиновьева. - Славянск-на-Кубани: СФАГПИ, 2010. – 48 с.

12. *Зорич В.А*. Математический анализ / В.А. Зорич. – М.: МЦМО, 2007. – 300 с.

13. *Ильин В.А.* Основы математического анализа / В.А. Ильин. – М.: Физматлит, 2009. – 330 с.

14. *Ковальчук В.Е.* Лекции по математическому анализу [Электронный ресурс] / В.Е. Ковальчук. – М.: Научное книгоиздательство, 2003. – 304 с. – Режим доступа: http://ua.booksee.org/book/805920 (дата обращения: 1.11.2016).

15. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2006. – 336 с.

16. *Кудрявцев Т.В.* Процесс и способы решения технических задач / Т.В. Кудрявцев. − М.: Педагогика, 2009. – 304 с.

17. *Курант Л.Д.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / Л.Д. Курант. – М.: Наука, 2003. – 280 с.

18. *Латышева Л.П.* Дифференцирование и интегрирование функций одной переменной: учеб. пособие. Направление подготовки 050100 – «Педагогическое образование», профиль – «Математика. Информатика», квалификация (степень) – «Бакалавр педагогического образования» / Л.П. Латышева; Перм. гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2013. – 106 с.

19. *Левина А.И.* Кратные интегралы: Методические указания к выполнению домашнего задания курсовой работы по дисциплине «Кратные и криволинейные интегралы, ряды» / А.И. Левина. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. – 31 с.

20. *Марков И.П.* Дополнительные главы математического анализа / И.П. Марков. – М.: Просвещение, 2008. – 319 с.

21. *Математический* форум Math help planet – Электрон. дан.– Режим доступа: http://mathhelpplanet.com (дата обращения: 12.03.2017).

22. *Никольский С.М.* Дифференциальные уравнения / С.М. Никольский. – М.: Наука, 2001. – 130 с.

23. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление [Электронный ресурс] / Н.С. Пискунов. – М.: Научное книгоиздательство, 2011. – 494 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view&book_id=222233 (дата обращения: 14.02.2017).

24. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов / Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2011. – 544 с.

25. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 10-е изд., испр. – 604 с.

26. *Применение* тройного интеграла к решению задач [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://sibac.info/conf/pedagog/lxiv/53305 (дата обращения: 22.04.2017).

27. *Рыбников К.А.* История математики / К.А. Рыбников. – М.: Просвещение, 2006. – 187 с.

28. *Тройные* интегралы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mschool.kubsu.ru/math1/integral/troynoy/troynoy.htm (дата обращения: 10.02.2017).

29. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – 8-е изд. – Т. I. – М.: Физматлит, 2001. – 680 с.

30. *Чалов П.А.* Тройные интегралы / П.А. Чалов. – М.: Физматлит, 2009. – 310 с.

31. *Чернышев А.Н.* Математический анализ: методические рекомендации к практическим занятиям и самостоятельной работе для студентов педагогических вузов / А.Н. Чернышев. – М.: Физматлит, 2012. – 52 с.