

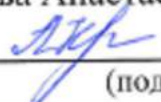
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-  
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра теоретической физики и компьютерного моделирования

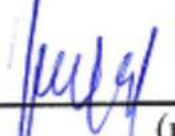
Выпускная квалификационная работа

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТОКОВ, ВОЗБУЖ-  
ДАЕМЫХ ИНЕРЦИОННЫМИ МОДАМИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ  
ЦИЛИНДРЕ**

Работу выполнила:  
Студентка 851 группы  
направления подготовки  
44.03.05 Педагогическое образование,  
Профиль «Физика и информатика»  
Кропачева Анастасия Сергеевна

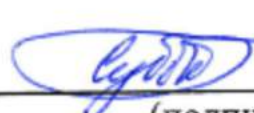
  
(подпись)

«Допущена к защите в ГАК»  
Зав. кафедрой

   
(подпись)

«13» июня 2018г.

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н., старший научный сотруд-  
ник Лаборатории вибрационной гид-  
ромеханики ФГБОУ ВО ПГГПУ  
Субботин Станислав Валерьевич

  
(подпись)

ПЕРМЬ

2018

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Введение.....                                                                                                                | 4  |
| 2. Инерционные волны и моды.....                                                                                                | 6  |
| 3. Экспериментальная установка и методика.....                                                                                  | 10 |
| 4. Результаты экспериментов.....                                                                                                | 15 |
| 5. Разработка лабораторной работы «Экспериментальное исследование потоков в неравномерно вращающемся цилиндре с жидкостью»..... | 22 |
| 6. Заключение.....                                                                                                              | 29 |
| 7. Библиографический список .....                                                                                               | 30 |

## АННОТАЦИЯ

Работа посвящена экспериментальному исследованию осредненных потоков, возбуждаемых инерционными модами во вращающейся цилиндрической полости, заполненной жидкостью. Для возбуждения инерционных мод скорость вращения полости модулируется (либрации) с частотой, соответствующей одной из собственных частот вращающейся жидкости. Обнаружено, что осциллирующее движение в объеме полости приводит к возникновению интенсивного осредненного течения в пограничном слое Стокса на боковой поверхности цилиндра. Структура течения имеет вид системы осредненных торoidalных вихрей, расположенных вдоль всей боковой границы полости. Количество вихрей определяется осевым волновым числом возбуждаемой моды и не зависит от радиального волнового числа. Показано, что интенсивность осредненного движения жидкости в вихрях пропорциональна квадрату амплитуды либраций.

Во второй части работы приведено методическое пособие для студентов физического факультета ПГГПУ для лабораторной работы «Экспериментальное исследование потоков в неравномерно вращающемся цилиндре с жидкостью».

## 1. ВВЕДЕНИЕ

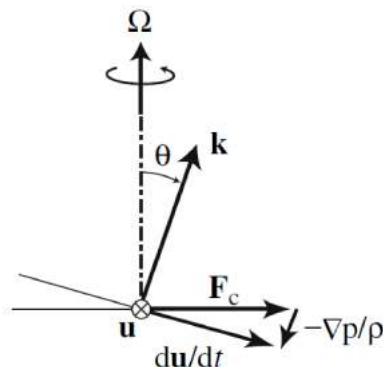
Известно, что во вращающихся жидкостях поддерживается один необычный класс волн, известный как *инерционные* (или гироскопические) волны [1]. Они имеют важнейшее значение не только для фундаментальной науки (океанические и атмосферные потоки, жидкие ядра планет, вращающиеся звезды), но и для различных технических приложений (течения в топливных баках космических аппаратов). Однако наиболее удивительные свойства инерционных волн, обусловленные их анизотропной дисперсией, связаны с распространением энергии и аномальным отражением от твердых границ [2].

В стационарном режиме вращения радиальный градиент давления жидкости уравнивает центробежную силу. Если частица жидкости будет смещаться наружу в радиальном направлении, то в силу закона сохранения момента импульса ее азимутальная скорость в инерциальной системе отсчета будет уменьшаться. В новом положении центробежная сила больше не уравнивается градиентом давления, в результате чего положение частиц жидкости восстанавливается. Поэтому в невязкой жидкости, выведенные из равновесия частицы, будут осциллировать, описывая круги в антициклоническом направлении. Во вращающейся системе отсчета этот механизм описывается действием силы Кориолиса  $\mathbf{F}_C = -2m[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}]$ .

Если вынуждающая сила действует с частотой  $\sigma < 2\Omega$ , частицы жидкости будут описывать круги во вращающейся системе отсчета в плоскости, наклонной по отношению к той, в которой происходит вращение. При этом угол  $\theta$  между нормалью к плоскости и осью вращения таков, что ускорение Кориолиса в плоскости  $2\Omega u \cos \theta$  эквивалентно ускорению  $\sigma u$  (рис. 1). В новом положении градиент давления должен уравнивать компоненту силы Кориолиса, нормальной к плоскости движения.

В замкнутой полости в результате многократного отражения от стенок полости инерционные волны могут испытывать пространственный резонанс, возбуждая так называемые *инерционные моды*. Последние являются соб-

ственными модами вращающейся жидкости в данной геометрии полости [3, 4].



**Рис. 1.** Частица, во вращающейся жидкости, испытывает действие силы Кориолиса и градиента давления, где угловая скорость  $\Omega$ . Скорость  $\mathbf{u}$  и ускорение  $\partial \mathbf{u} / \partial t$  лежат в наклонной плоскости к волновому вектору  $\mathbf{k}$ , составляющим угол  $\theta = \cos^{-1}(\sigma / 2\Omega)$  к оси вращения. Адаптировано из [2]

В настоящей дипломной работе экспериментально исследуются потоки, возбуждаемые инерционными модами во вращающейся цилиндрической полости. Содержание работы следующее. В разделе 1 дается краткое теоретическое описание инерционных волн и инерционных мод. Раздел 2 посвящен описанию экспериментальной установки и методики проведения эксперимента. В разделе 3 обсуждаются результаты экспериментов, проводится сравнение с известными теоретическими результатами. Раздел 4 посвящен разработке лабораторной работы для студентов физического факультета ПГГПУ. Наконец, в разделе 5 сделано заключение.

## 2. ИНЕРЦИОННЫЕ ВОЛНЫ И МОДЫ

Одним из наиболее распространенных способов возбуждения инерционных волн является неравномерное вращение, при котором скорость вращения полости периодически меняется с частотой  $\sigma$ . Такое воздействие в литературе традиционно называется *либрациями*. Число работ в этом направлении велико. Это связано с тем, что либрационное движение характерно для многих планет и спутников [5]. Ранее инерционные волны и моды численно исследовались в либрирующем цилиндре [6], экспериментально и численно в либрирующем коаксиальном слое с прямыми [4] и наклонными боковыми стенками [7], а также либрирующем кубе [3].

Для расчета параметров, при которых проводятся эксперименты, дадим краткое теоретическое описание инерционных волн и мод. Движение невязкой несжимаемой жидкости во вращающейся системе отсчета описывается следующими уравнениями [8]:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p - 2\rho [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}] - \rho \boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$
(2.1)

Представим центробежную силу в виде градиента

$$\boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] = -\nabla \left[ \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 \right]$$

и введем эффективное давление

$$P = p - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2.$$

Считая амплитуду волны малой и, пренебрегая нелинейным членом, запишем уравнение движения в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}] = -\frac{1}{\rho} \nabla P$$
(2.2)

Применив операцию ротор, тогда правая часть уравнения занулится, а слева

получился  $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{u} + 2[\boldsymbol{\Omega}(\nabla \mathbf{u}) - \mathbf{u}(\nabla \boldsymbol{\Omega})] = 0$ . Учитывая, что  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  и выби-

рая направление скорости вращения вдоль оси  $z$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{u} = 2\mathbf{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \quad (2.3)$$

Будем искать решение в виде плоской волны  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \exp(\mathbf{k}\mathbf{r} - \sigma t)$ . После подстановки в (3.2) получим

$$\sigma[\mathbf{k} \times \mathbf{u}] = 2i\mathbf{\Omega} k_z \mathbf{u} \quad (2.4)$$

Умножив векторно это выражение на  $\mathbf{k}$ , получим  $-\sigma k^2 \mathbf{u} = 2i\mathbf{\Omega} k_z [\mathbf{k} \times \mathbf{u}]$ .

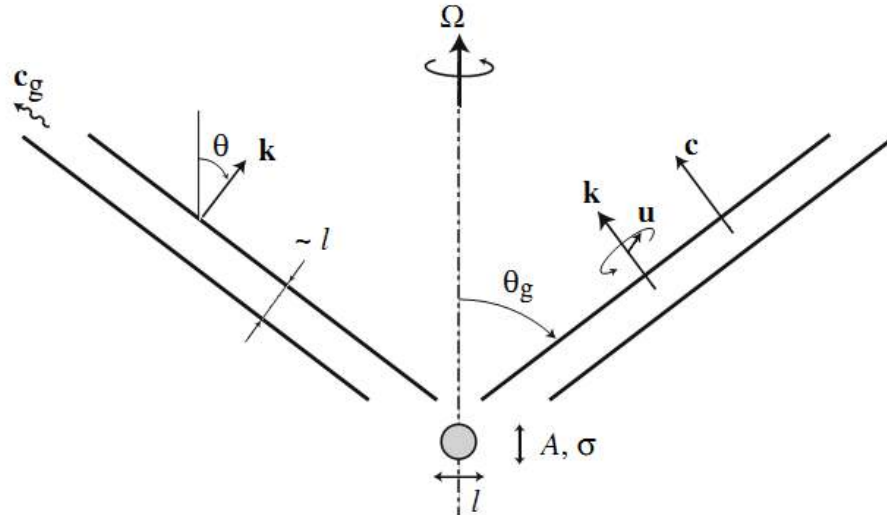
Сравнивая это выражение с (2.4) получим дисперсионное соотношение

$$\sigma = 2\mathbf{\Omega} \frac{k_z}{k} = 2\mathbf{\Omega} \cos \theta, \quad (2.5)$$

где  $\theta$  – угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{\Omega}$ . Фазовая скорость такой волны

$\mathbf{c} = \frac{\sigma \mathbf{k}}{k} = 2\mathbf{\Omega} \cos \theta \frac{\mathbf{k}}{k}$ . Видно, что скорость распространения фазы зависит не

только от величины, но и от направления волнового вектора. В свою очередь направление распространения возмущения определяется групповой скоростью  $\mathbf{c}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \sigma = 2 \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{k})}{k^3}$ , величина которой равна  $c_g = (2\mathbf{\Omega} / k) \sin \theta$ .



**Рис. 2.** Схема распространения инерционной волны от источника размером  $l$ , колеблющегося с частотой  $\sigma$  и амплитудой  $A$ . В нижней полуплоскости картина будет симметричной.

Таким образом, фазовая и групповая скорости ортогональны, а направление распространения инерционной волны определяется выражением:

$$\sigma = 2\Omega \sin \theta_g, \quad (2.6)$$

Сказанное означает, что направление распространения волн будет зависеть от частоты колебаний источника возмущений по отношению к оси вращения системы (см. рис. 2). В замкнутых полостях при отражении от стенок инерционные волны будут сохранять значение угла  $\theta_g$ , отсчитываемого от оси вращения, а не от нормали к точке падения. Благодаря специфическому закону отражения инерционные волны при многократном отражении от границы могут испытывать пространственный резонанс, возбуждая так называемые **инерционные моды**. Эти моды являются собственными частотами колебаний вращающейся жидкости и сильно зависят от геометрии полости. Значения собственных частот невязких инерционных мод в цилиндрической геометрии определяется следующим выражением

$$\sigma^2 = \frac{4n^2\pi^2}{n^2\pi^2 + \xi_{nmk}^2 L^2 / R^2}, \quad (2.7)$$

где  $n$ ,  $m$  и  $k$  – осевое, радиальное и азимутальное волновое число [1]. Параметр  $\xi_{nmk}^2$  является  $m$ -ым положительным решением трансцендентного уравнения

$$\xi \frac{d}{d\xi} J_{|k|}(\xi) + k \left( 1 + \frac{\xi^2}{n^2\pi^2 L^2 / R^2} \right)^{1/2} J_{|k|}(\xi) = 0. \quad (2.8)$$

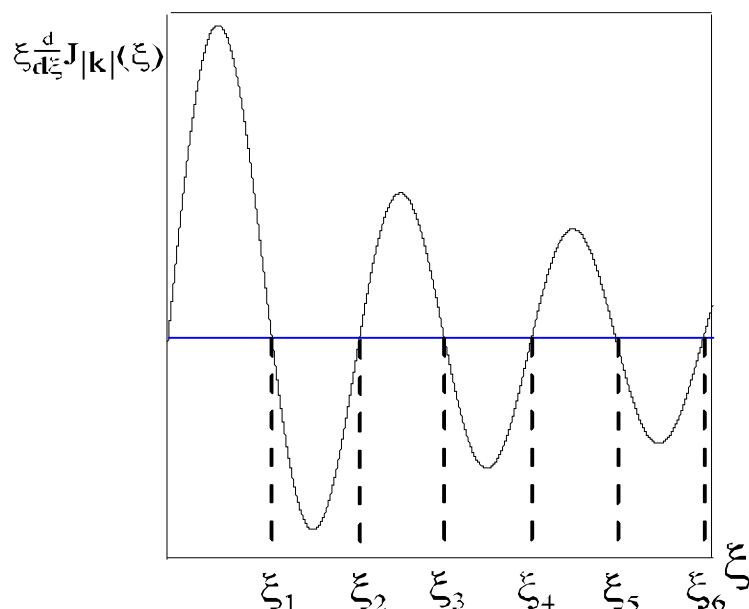
Здесь  $J_{|k|}(\xi)$  – функция Бесселя первого рода  $|k|$ -го порядка.

Рассматривается осесимметричное течение, поэтому  $k = 0$  и для пространственной характеристики инерционной моды будем использовать только осевое и радиальное волновые числа  $[n; m]$ . Поскольку либрационное воздействие симметричное, в цилиндрической полости могут возникать только симметричные моды с четными значениями  $n$ .

Решение уравнения (2.8) ищется в программе MS Excel. По значениям, полученным в программе, находятся точки пересечения функции



$\xi dJ_{|k|}(\xi)/d\xi$  с осью абсцисс (рис. 3). Результатом является набор значений параметра  $\xi_{nmk} = \xi_{n10}, \xi_{n20}, \xi_{n30}, \dots$ , соответствующих различным значениям радиального волнового числа  $m$  при данном осевом волновом числе  $n$ . Вычисленные по формуле (2.7) значения собственных частот, при которых проводятся эксперименты, приведены в таблице 1.



**Рис. 3.** Зависимость параметра  $\xi \frac{d}{d\xi} J_{|k|}(\xi)$  от  $\xi$  в диапазоне  $[0-20]$ , при  $n = 2$

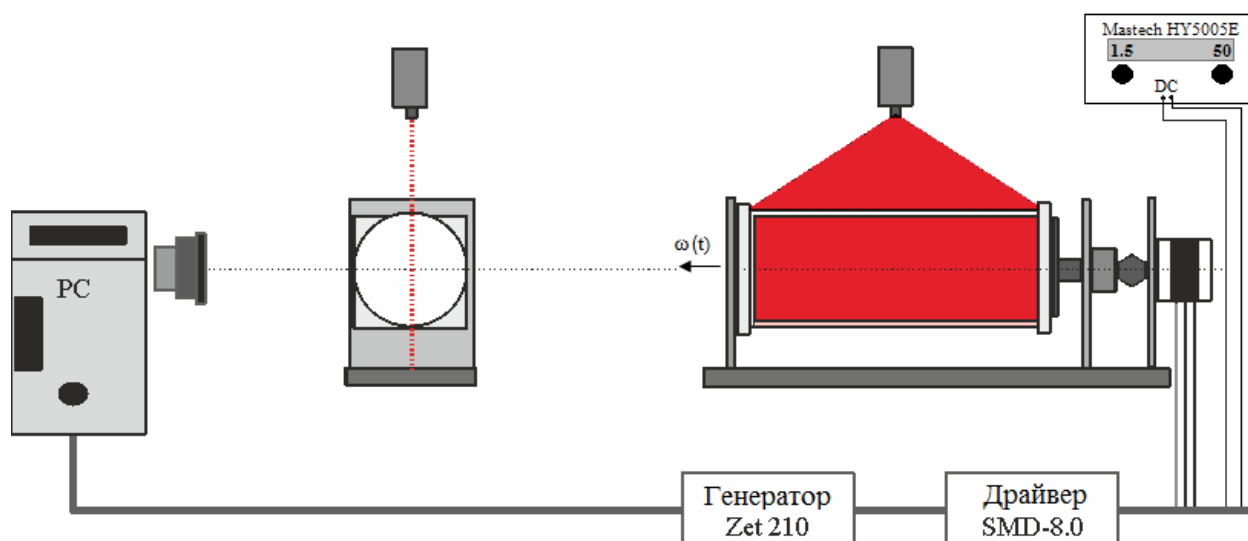
Таблица 1

|          |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $n$      | 2     | 4     | 6     | 8     | 10    | 2     | 4     | 6     | 8     | 10    | 2     | 4     | 6     | 8     | 10    |
| $m$      | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 2     | 2     | 2     | 2     | 2     | 3     | 3     | 3     | 3     | 3     |
| $\sigma$ | 0.772 | 1.281 | 1.563 | 1.717 | 1.804 | 0.445 | 0.831 | 1.130 | 1.349 | 1.504 | 0.310 | 0.600 | 0.854 | 1.066 | 1.237 |

### 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДИКА

На рис.4 показана схема экспериментальной установки. Кювета представляет собой полый плексигласовый параллелепипед, внутри которого помещен плексигласовый цилиндр кругового сечения. Данная конструкция герметизирована с обеих сторон прозрачными фланцами и закреплена в шарикоподшипниках опор установки. Таким образом, кювета состоит из двух отсеков. В «рубашку», образованную пространством между стенками параллелепипеда и цилиндра, заливается та же жидкость, что и в цилиндр. За счет этого оптические искажения на цилиндрической поверхности полости отсутствуют.

Длина полости составляет  $L = 102.0$  мм, а ее внутренний радиус равен  $R = D/2 = 26$  мм. В качестве жидкости используется водный раствор глицерина кинематической вязкости  $\nu = 7.0$  сСт.



**Рис. 4.** Схема экспериментальной установки

Вращение полости задается шаговым двигателем FL86STH118-6004A, управляемым драйвером SMD-8.0 и питающимся от источника постоянного тока Mastech HY5005E. Регулировка скорости вращения вала двигателя осуществляется с помощью генератора модуля Zet 210, управляемого компьютером. Для соединения вала двигателя с полостью используется муфта SJCA-

30С, обеспечивающая точную передачу вращения. Скорость вращения полости в инерциальной системе отсчета периодически изменяется со временем по закону:

$$\omega(t) = \Omega + \Omega_{lib} \Delta\varphi \sin \Omega_{lib} t \quad (3.1)$$

где  $\Omega$  – средняя скорость вращения полости,  $\Omega_{lib}$  – угловая частота либраций. В качестве характеристики интенсивности либрационного воздействия используется либрационный параметр  $\varepsilon = \Delta\varphi \sigma$ , где  $\Delta\varphi$  – угловая амплитуда либраций,  $\sigma = \Omega_{lib} / \Omega_{rot}$  – безразмерная частота либраций. Значения основных параметров экспериментов приведены в таблице 2.

Таблица 2

| <i>Параметр</i>                      | <i>Определение</i>               | <i>Значение</i> |
|--------------------------------------|----------------------------------|-----------------|
| $L$                                  | Длина полости                    | 102 мм          |
| $R$                                  | Радиус полости                   | 26 мм           |
| $\nu$                                | Кинематическая вязкость жидкости | 7.0 сСт         |
| $f = \Omega / 2\pi$                  | Частота вращения полости         | 10.0 Гц         |
| $f_{lib} = \Omega_{lib} / 2\pi$      | Частота либраций                 | 0 – 20.0 Гц     |
| $\sigma = \Omega_{lib} / \Omega$     | Безразмерная частота либраций    | 0 – 2           |
| $\varepsilon = \Delta\varphi \sigma$ | Амплитуда либраций               | 0 – 0.3         |

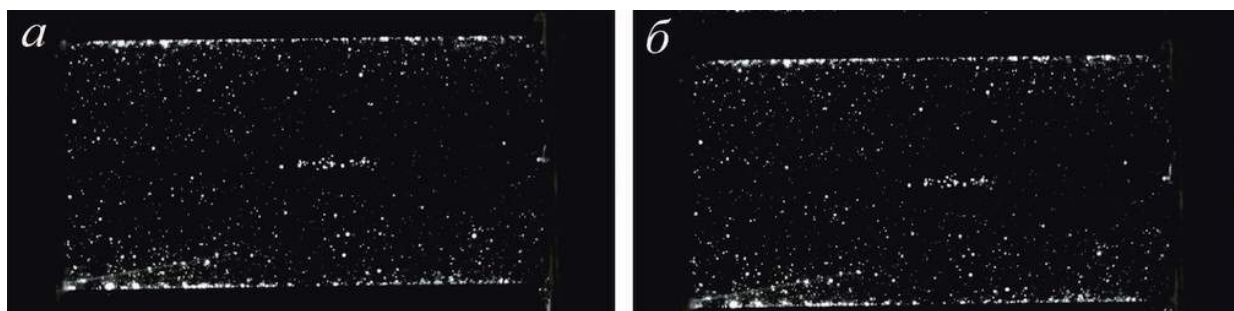
Методика проведения экспериментов следующая. Кювета приводится в быстрое равномерное вращение со скоростью  $\Omega$ . После установления твердотельного вращения жидкости и прошествии характерного времени спинапа при заданной частоте  $\Omega_{lib}$ , соответствующей резонансному возбуждению инерционной моды, плавно увеличивается амплитуда  $\varepsilon$ . После выхода системы на установившийся режим вращения исследуется поле скорости жид-

кости. Аналогичным образом проводятся эксперименты при других значениях  $\Omega_{lib}$ .

Поле скорости жидкости исследуется PIV-методом. Для этого в жидкость добавляются пластиковые частицы размером  $d \sim 100$  мкм, плотность которых близка к плотности жидкости. Полость в осевом сечении освещается световым ножом (рис. 4), создаваемым непрерывным лазером Z-Laser Z500Q. Видеорегистрация положения светорассеивающих частиц осуществляется с помощью неподвижной в лабораторной системе отсчета скоростной видеокамеры CamRecord CL600x2 с частотой кратной средней частоте вращения  $\Omega$ . Далее с помощью программы PIVlab исследуется мгновенное и осредненное по периоду либраций поле скорости. Отметим, что осредненное поле скорости рассчитывается не менее чем по десяти периодам либраций.

### **Методика работы в программе PIVlab**

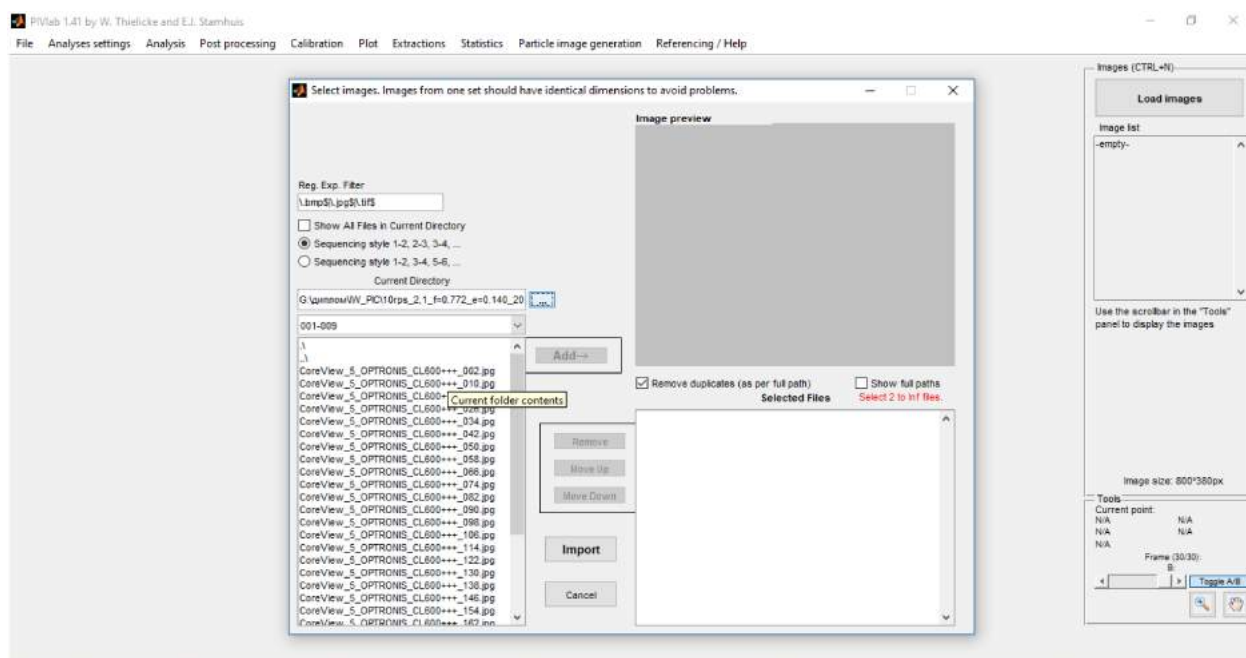
Поскольку в процессе либраций скорость вращения полости меняется с частотой  $\Omega_{lib}$  не всегда равной средней частоте вращения полости  $\Omega$ , при видеосъемке с частотой  $\Omega$  боковая граница кюветы не всегда перпендикулярна оптической оси видеокамеры. Плоская граница внешней «водяной рубашки» периодически наклоняется относительно оптической оси. Это приводит к тому, что изображение полости непрерывно смещается вверх и вниз относительно среднего положения (рис. 5). При этом поперечный размер изображения при максимальной амплитуде либраций  $\varepsilon$  сжимается на величину не превышающую 6-х пикселей, что составляет не более 1.5%. Для устранения «скачков» между двумя ближайшими кадрами, их поперечный размер изменяется таким образом, чтобы вертикальная координата изображений полости не менялась.



**Рис. 5.** Фотографии кюветы в лабораторной системе отсчета при  $f = 10.0$  об/с,  $\sigma = 0.772$ ,  $\varepsilon = 0.10$  и  $\Omega_{lib}t = 0$  (а) и  $\Omega_{lib}t = \pi/2$  (б)

Полученная последовательность изображений обрабатывается с помощью PIV-метода в программе PIVlab:

### I. Загрузка фотографий для обработки в PIVlab (рис. 6).



**Рис. 6.** Загрузка изображений в PIVlab

- II. Устанавливаются параметры обработки изображений: настройка яркости/контрастности; определяется алгоритм обработки изображений (быстрое преобразование Фурье с постепенным уменьшением области обработки:  $64 \times 64$ ,  $38 \times 38$ ,  $20 \times 20$ ,  $10 \times 10$ ) (рис. 7).
- III. Пространственная калибровка изображений.
- IV. Установка времени между двумя последовательными изображениями.
- V. Анализ последовательности изображений.

- VI. После анализа во вкладке **Post processing** выбирается область допустимых значений векторов.
- VII. Во вкладке **Plot** выбирается параметр представления поля скоростей (скорость, завихренность и др.). В этой вкладке также можно выбрать цветовую гамму для характеристик поля скоростей.
- VIII. После построений графиков во вкладке **Extractions** можно измерить скорость осредненного движения жидкости.

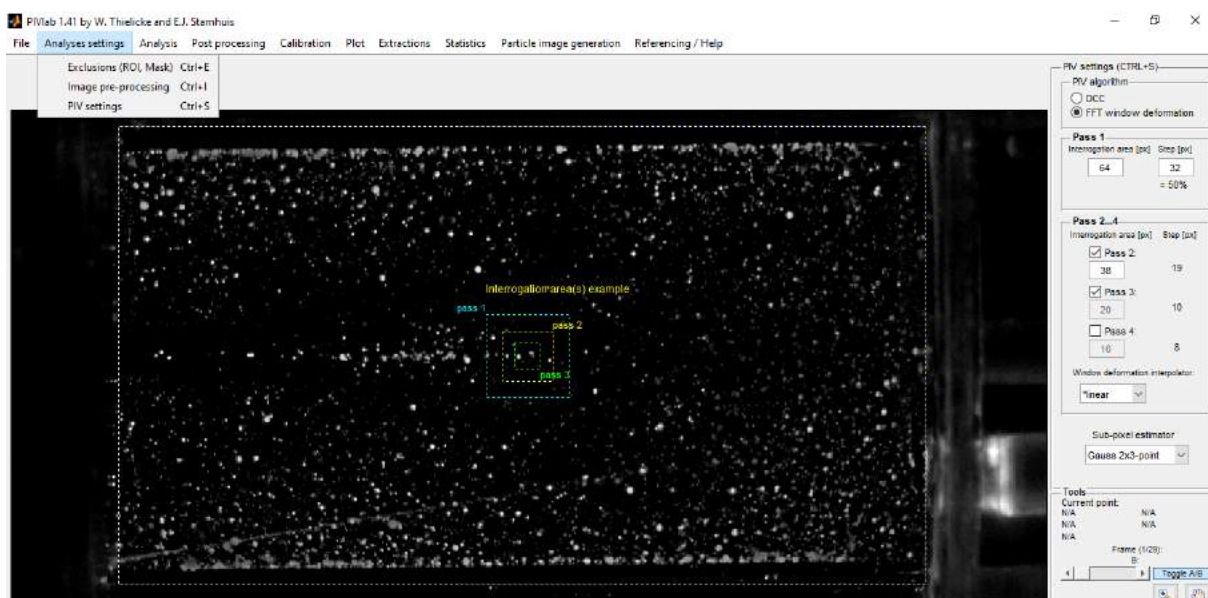
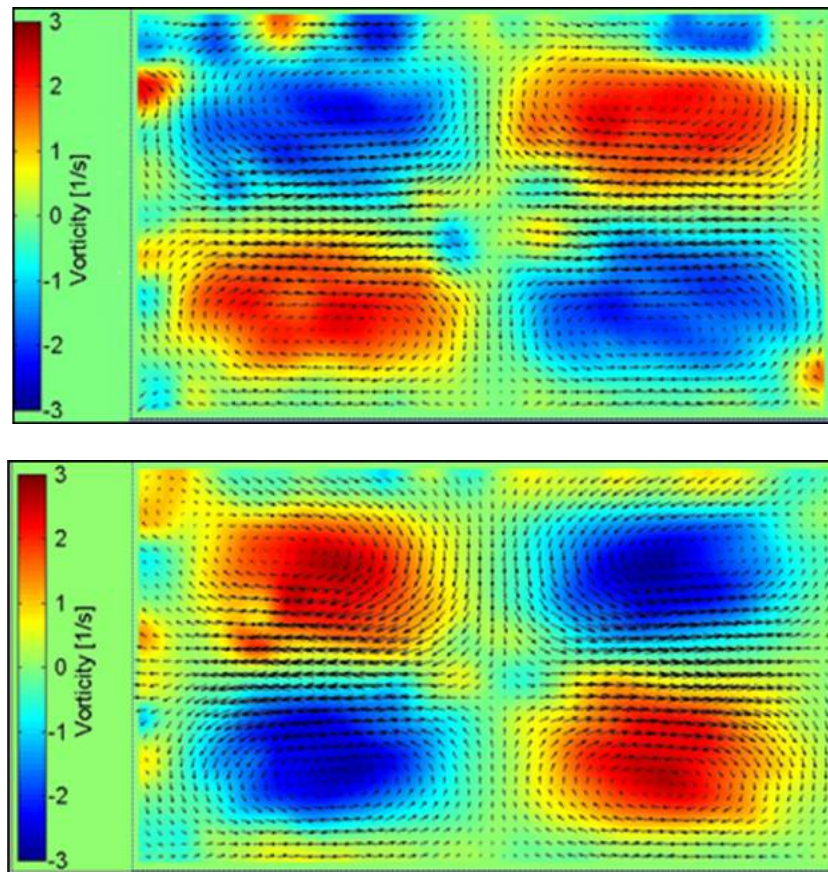


Рис. 7. Установка параметров обработки изображений

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

### Осциллирующее течение

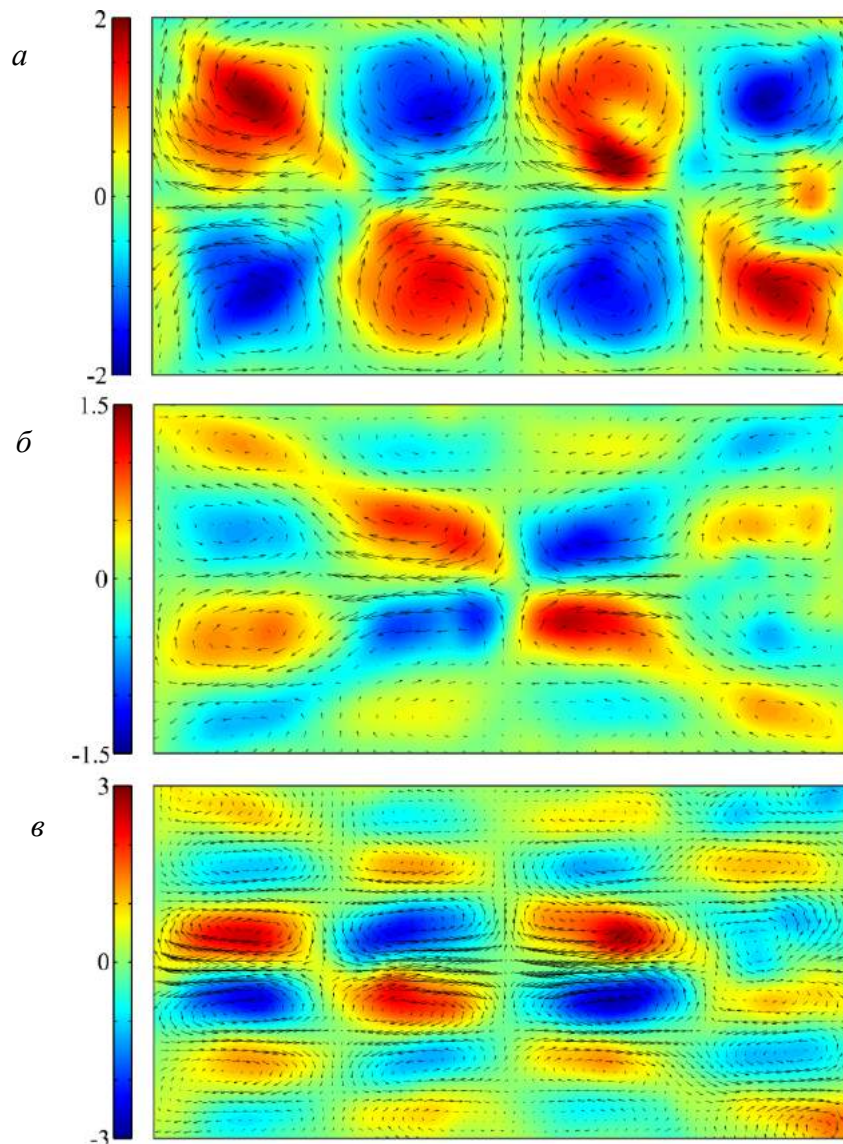
При совпадении частоты либраций с одной из собственных частот колебаний жидкости инерционные волны в результате пространственного резонанса возбуждают инерционные моды. В этом случае жидкость во всем объеме полости совершает осциллирующее движение. Так при частоте либраций  $\sigma = 0.772$  возбуждается мода с волновыми числами  $[2;1]$  (рис. 8). Мгновенная структура течения представляет два осциллирующих тороидальных вихря, направление вращения жидкости в которых меняется в течение периода либраций.



**Рис. 8.** Мгновенное поле скорости в осевом сечении полости при частоте либраций  $\sigma = 0.772$  (мода  $[2;1]$ ), амплитуде либраций  $\varepsilon = 0.14$  в противофазах:  $\Omega_{lib}t = 0$  (верх) и  $\Omega_{lib}t = \pi$  (низ). Цветом показана завихренность (красный – вращение по часовой стрелке, синий – против часовой стрелки)



При изменении частоты либраций номер возбуждаемой моды меняется. Так при  $\sigma = 1.281$  возбуждается мода  $[4;1]$  (рис. 9а). В отличие от предыдущего случая (мода  $[2;1]$ ) теперь в полости осциллируют четыре тороидальных вихря. Можно отметить, что возбуждение инерционных мод происходит только на долю периода либраций, когда значение  $\Omega_{lib}t$  близко к 0 и  $\pi$ . В остальных случаях в мгновенном поле скорости можно наблюдать траектории распространения инерционных волн [9].



**Рис. 9.** Мгновенное поле скорости в осевом сечении полости при  $\sigma = 1.281$   $[4;1]$  (*a*),  $\sigma = 0.831$   $[4;2]$  (*b*),  $\sigma = 0.600$   $[4;3]$  (*v*) при амплитуде  $\varepsilon = 0.12$  в фазе либраций  $\Omega_{lib}t = \pi$

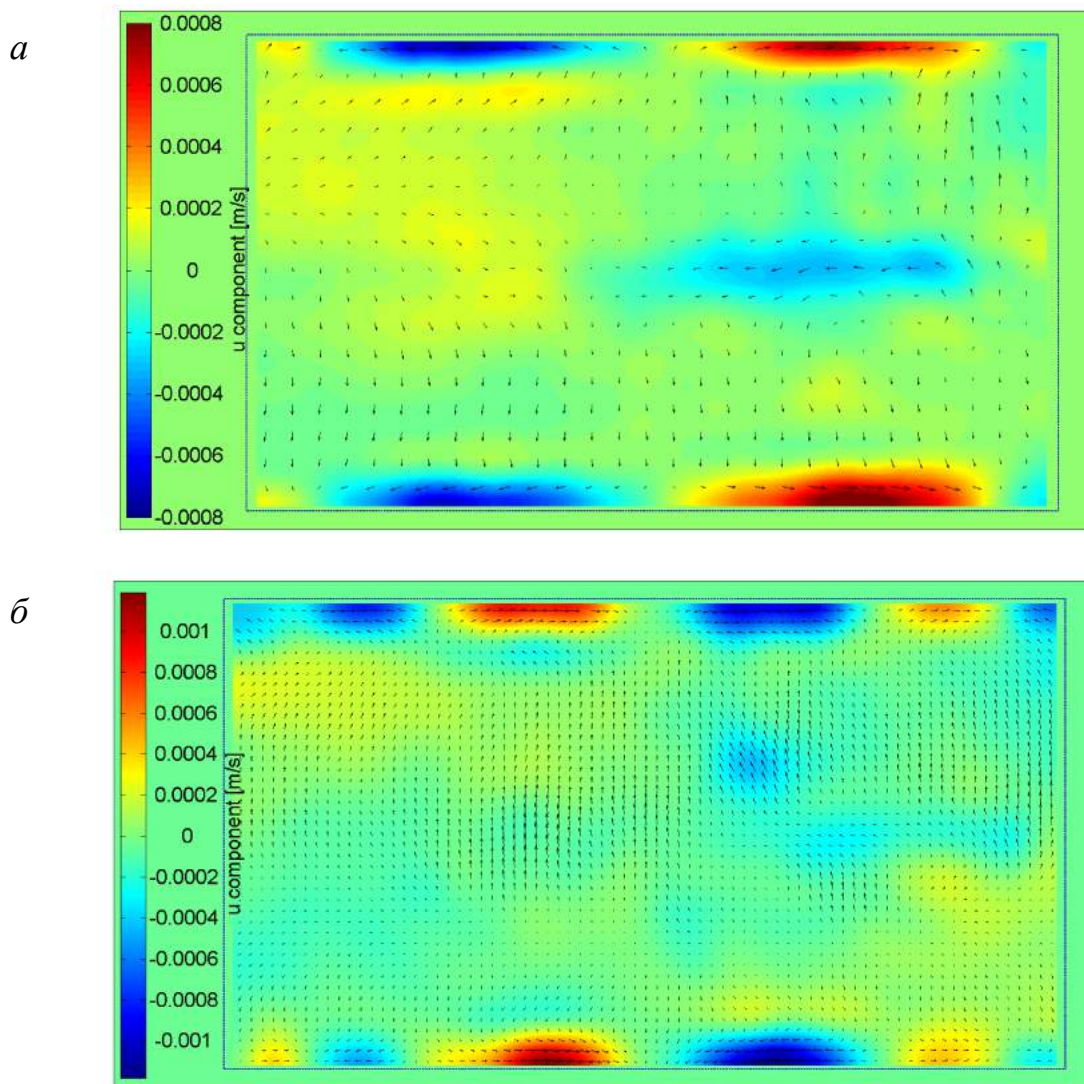


Структура осциллирующего течения зависит от радиального волнового числа  $m$ . При возбуждении моды  $[4;2]$  (рис 9б) наблюдается увеличение количества вихрей в два раза, при этом жидкость совершает наиболее интенсивные колебания в вихрях, расположенных вблизи оси вращения полости. Увеличение  $m$  еще на единицу (мода  $[4;3]$ , рис 9в) приводит к увеличению количества тороидальных вихрей до двенадцати.

### Осреднённое течение

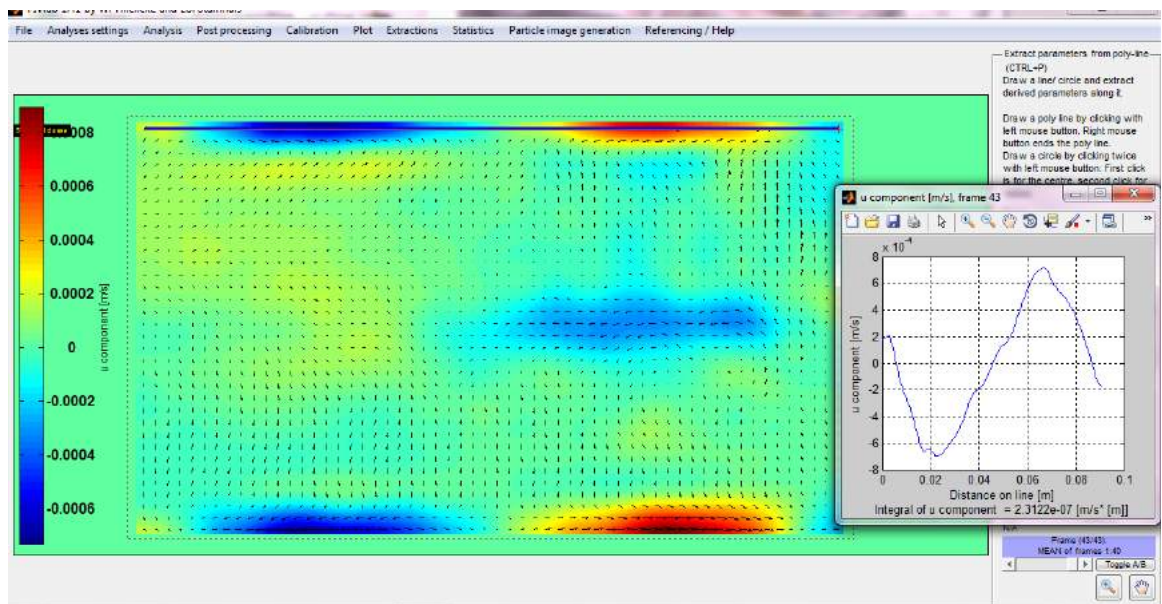
При осреднении мгновенных полей скорости по периоду либраций можно найти осредненное движение жидкости, возбуждаемое инерционными модами. На рис. 10а представлен осредненное поле скоростей при частоте либраций, соответствующей моде  $[2;1]$ . Видно, что колебания жидкости в объеме полости (рис. 8) приводят к возникновению осредненного течения на боковой стенке полости в пограничном слое Стокса. Структура течения имеет вид двух тороидальных вихрей, жидкость в которых вдоль боковой стенки движется из центра полости к торцам. Отметим, что структура осредненного течения хорошо согласуется со структурой осциллирующего: количество осредненных вихрей соответствует числу осциллирующих.

Как показывают эксперименты, количество осредненных вихрей определяется осевым волновым числом  $n$  и не зависит от радиального числа  $m$ . Так при частоте  $\sigma = 1.281$  возбуждается мода  $[4;1]$ , при этом вблизи боковой стенки полости возникает четыре вихря (рис. 10б). При изменении  $m$  наблюдается только изменение интенсивности осредненного движения жидкости.



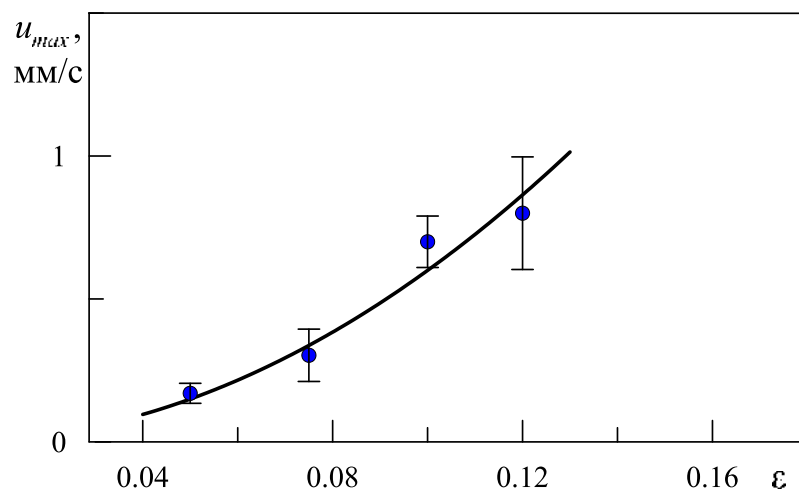
**Рис. 10.** Осредненное поле скорости в осевом сечении полости при  $\sigma = 0.772$  (мода [2;1]) и  $\sigma = 1.281$  (мода [4;1]). Цветом показана осевая компонента скорости

В качестве характеристики интенсивности осредненного движения принимается максимальная скорость жидкости вблизи боковой стенки полости. Для этого в программе PIVlab во вкладке **Extractions** выбирается **Parameters from poly-line**, далее проводится линия по областям максимума скорости. После нажатия на кнопку **Plot date** строится график распределения скорости жидкости, из которого находятся экстремальные значения скорости (рис. 11).



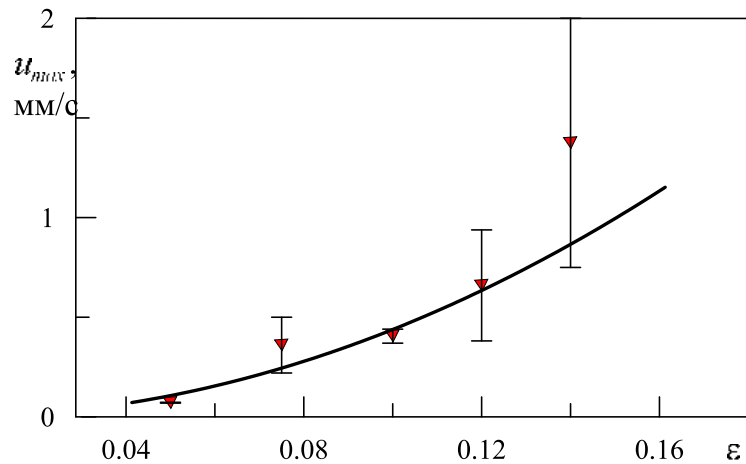
**Рис. 11.** Определение максимальной скорости осредненного течения

На рис. 12 представлен график зависимости модуля максимальной скорости  $u_{\max}$  от амплитуды либрации. Из данного графика видно, что при фиксированной частоте либраций с увеличением  $\varepsilon$  скорость осредненного движения жидкости увеличивается. Можно отметить, что зависимость  $u_{\max}(\varepsilon)$  нелинейная.



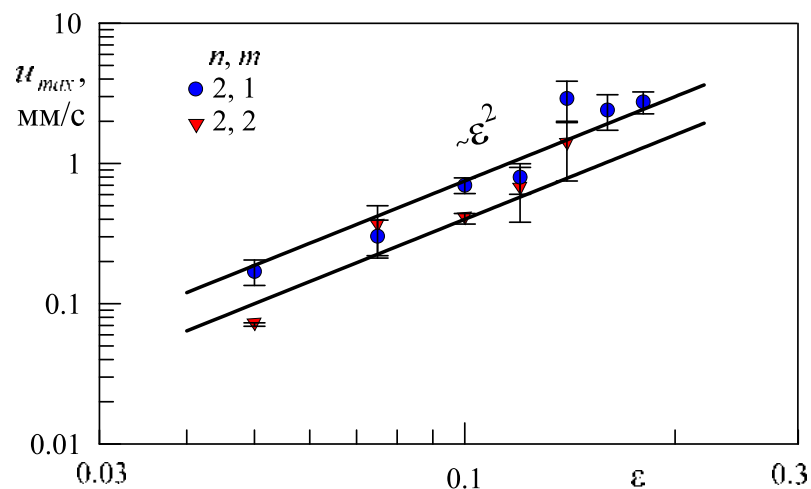
**Рис. 12.** Зависимость максимальной скорости  $u_{\max}$  от амплитуды либраций  $\varepsilon$  при  $\sigma = 0.772$  (мода [2;1])

При изменении частоты либраций  $\sigma$  интенсивность осредненного движения также меняется, при этом нелинейный характер зависимости  $u_{\max}(\varepsilon)$  сохраняется (рис. 13).



**Рис. 13.** Зависимость максимальной скорости  $u_{\max}$  от амплитуды либрации  $\varepsilon$  при частоте  $\sigma = 0.445$  (мода [2;2])

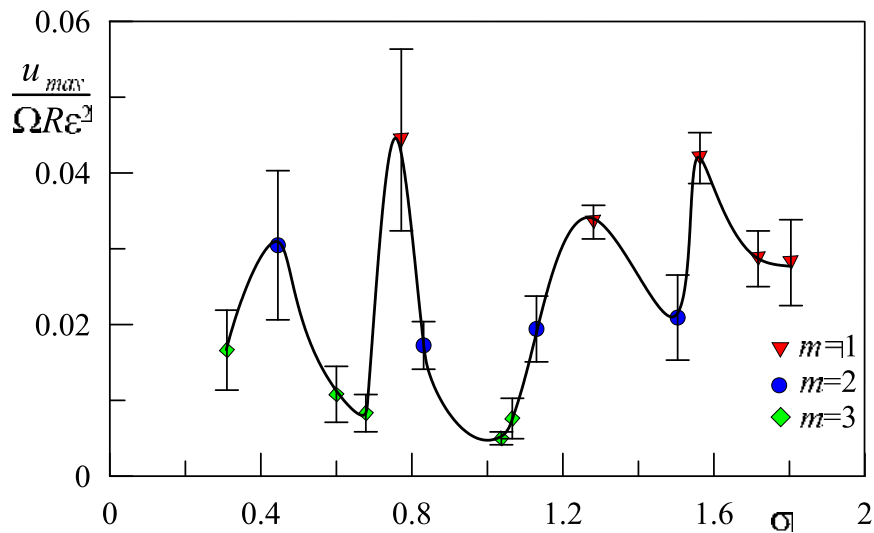
Для определения степени зависимости  $u_{\max}(\varepsilon)$ , графики строятся в логарифмическом масштабе (рис. 14), откуда можно видеть, что скорость течения пропорциональна квадрату амплитуды либраций  $\varepsilon^2$ . Полученный результат согласуется с ранее полученными данными по гармоническому воздействию на вращающиеся гидродинамические системы [9, 10].



**Рис. 14.** Максимальная скорость жидкости в осредненных потоках, при фиксированном значении осевого волнового числа  $n=2$  и различных значениях

радиального числа  $m=1$  и 2

Выберем в качестве единицы измерения скорости жидкости линейную скорость полости  $\Omega R$ , где  $R$  – радиус кюветы. Поскольку  $u_{\max} \sim \varepsilon^2$ , отнормируем скорость жидкости на квадрат амплитуды либраций. На рис. 15 представлен комплекс  $u_{\max} / \Omega R \varepsilon^2$  от различных частот либраций  $\sigma$ , значения которых соответствуют собственным частотам инерционных мод. Видно, что наиболее интенсивное движение наблюдается для мод с радиальным волновым числом  $m = 1$ . С увеличением радиального волнового числа интенсивность осредненного течения ослабевает.



**Рис. 15.** Зависимость параметра  $u_{\max} / \Omega R \varepsilon^2$  от частоты либраций  $\sigma$

## **5. РАЗРАБОТКА ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ «ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТОКОВ В НЕРАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ С ЖИДКОСТЬЮ»**

В современной высшей школе лабораторные работы – одна из форм организации учебного процесса. Лабораторные работы являются необходимым компонентом образовательных программ по всем направлениям. Известны педагогические стратегии, использование которых может привести к повышению эффективности лабораторных работ. В рамках направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование, профиль «Физика и информатика» в ПГГПУ проводится предмет «Гидродинамика». При университете существует Лаборатория вибрационной гидромеханики, в которой исследуются различные задачи научными сотрудниками с привлечением студентов. Поэтому, чтобы заинтересовать учащихся, необходимо внедрять научные исследования, например, в качестве лабораторных работ, в процесс обучения. Это будет способствовать развитию научно-исследовательской компетенции будущих учителей физики. Далее представлен проект лабораторной работы для студентов 4 курса физического факультета ПГГПУ. Разработка посвящена наблюдению потоков, возбуждаемых инерционными волнами и модами во вращающемся цилиндре, с применением PIV-метода. В рамках проведения данной лабораторной работы у студентов развиваются умения и навыки в области экспериментальной гидродинамики, в том числе навыки работы с современным научным оборудованием.

### **МЕТОДЫ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ТЕЧЕНИЙ**

Движение жидкостей и газов при непосредственном наблюдении остается невидимым для человеческого глаза. В связи с этим одним из самых важных и распространенных инструментов экспериментальной механики жидкости, позволяющих получить реальное представление о структуре течения, не прибегая к расчетам, является визуализация.

Обзор основных экспериментальных методов визуализации и их применение к конкретным задачам приведено в книгах [11–13]. Большое количество фотографий течений, полученных с помощью разнообразных методов, собрано в альбоме Ван Дайка [14]. Согласно Мерцкевичу [11] все методы визуализации можно условно разделить на три группы:

- добавление в жидкость или газ некоторого инородного индикатора;
- оптические методы визуализации;
- методы, связанные с выделением в жидкости тепла и энергии.

В качестве индикатора могут служить мелкие частицы, наблюдая за движением которых можно судить о структуре течения в жидкости. При этом нужно понимать, что не всякий индикатор способен дать адекватную информацию о структуре течения, а в худшем случае, может ее изменить. Безразмерным комплексом, определяющим разницу между движением жидкости и индикатора, является число Стокса:

$$Sk \equiv \frac{\rho d^2 \nu}{\eta D},$$

где  $\eta$  – динамическая вязкость жидкости,  $\rho$  – плотность частицы,  $\nu$  – характерная скорость жидкости,  $d$  – характерный размер частицы,  $D$  – характерный размер полости. Если  $Sk \ll 1$ , то частицы являются трассерами, и по их движению можно судить о скорости и структуре течения. Для минимизации разницы между движением жидкости и частицами, желательно, чтобы материал, из которого они изготовлены, обладал нейтральной плавучестью.

Одним современных из методов визуализации и исследования потоков является **PIV-метод** – цифровая визуализация потоков, позволяющая измерять векторные поля скорости в жидкости или газе.

Принцип метода состоит в следующем: в кювету добавляются визуализирующие частицы (трассеры), параметры которых выбраны таким образом, чтобы исключить появление дополнительных эффектов при исследовании. С помощью лазера выделяется область регистрации частиц и проводится фо-

то-, видеосъемка, либо регистрация на другое электронное устройство. Загрузка полученных кадров позволяет программе построить необходимые характеристики для исследования, например, измерение скоростей в вихре.

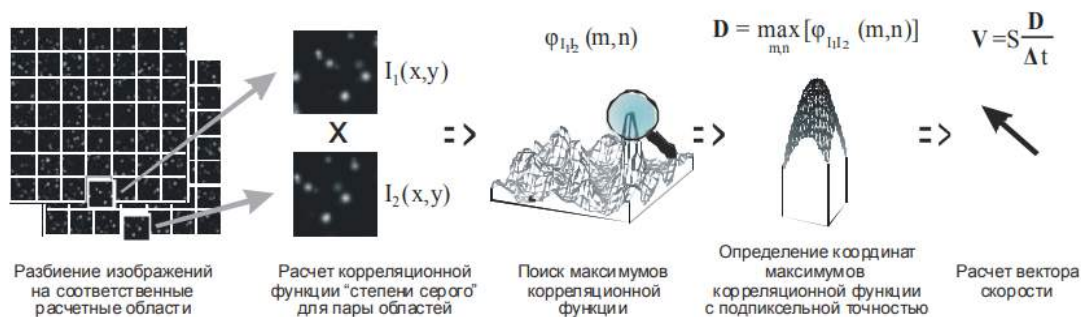
Основной метод работы в PIV является обработка полученных изображений с использованием корреляционных подходов. В программе существует два вида алгоритмов:

1. *Автокорреляционный подход*: в данном алгоритме начальное и конечное положение частицы находятся на одном изображении.
2. *Кросскорреляционный подход*: начальное и конечное движение траектория фиксируются на различных кадрах.

Предпочтительнее использовать кросскорреляционный алгоритм, так как при обработке данных, полученные результаты имеют высокую точность.

Этапы работы кросскорреляционного подхода: предположим, имеются несколько кадров, в которых зафиксировано движение частиц в начальный и конечный момент. Программа разбивает каждое изображение на области и задается шаг сдвига при переходе на следующий кадр. Далее рассчитывается корреляционная функция – изменение оттенков цвета для пары областей. При расчете функции используется алгоритм быстрого преобразования Фурье (периодическая трансляция расчетной области на бесконечность, таким образом, что на границах возникает разрыв данных) с постепенным уменьшением области обработки. Затем идет поиск максимумов функции и определение их координат. Максимумом корреляционной функции является наиболее вероятный сдвиг частицы в выбранной области. Наконец, строится вектор скорости (рис. 16)





**Рис. 16.** Кросскорреляционный алгоритм вычисления вектора скорости по изображениям частиц в потоке [15]

Достоинствами PIV-метода являются: Бесконтактность; возможность измерения мгновенных скоростей; широкий диапазон измеряемых скоростей.

К недостатку PIV-метода можно отнести использование визуализирующих частиц. Не правильный подбор характеристик трассеров (размер, плотность), приводит к тому, что частицы не точно следуют за потоком жидкости или газа.

PIV-метод используется: в фундаментальных научных исследованиях (исследование вихревых структур при движении жидкости); в авиастроении (обтекание самолетов); энергетика и нефтегазовая промышленность и многие другие отрасли.

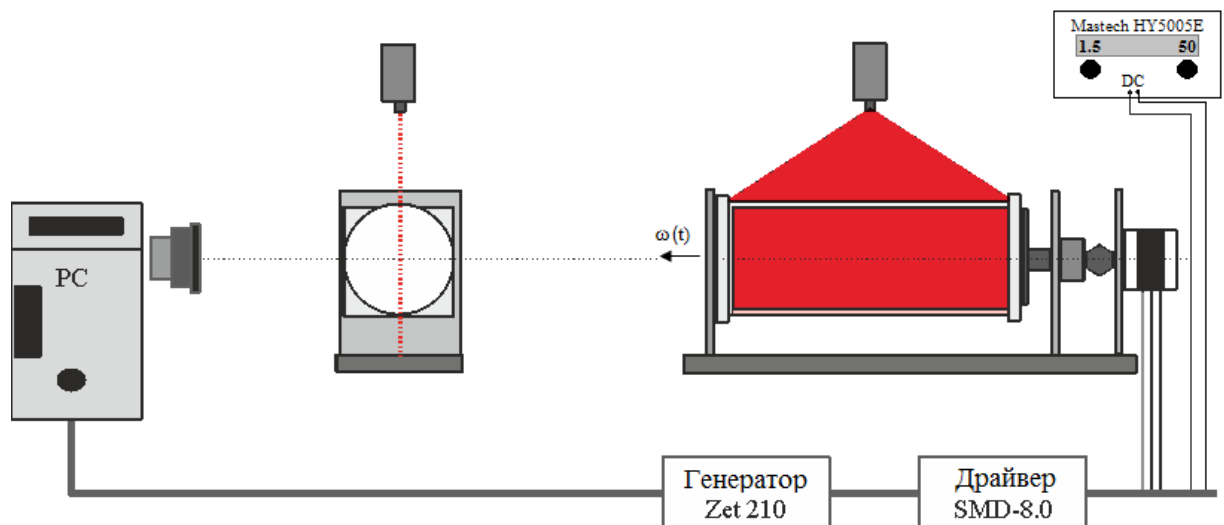
## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

### «ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТОКОВ В НЕРАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ С ЖИДКОСТЬЮ»

**Цель работы:** исследование потоков в неравномерно вращающемся цилиндре с жидкостью оптическим методом визуализации.

**Оборудование для приготовления раствора:** емкость для приготовления раствора, дистиллированная вода, глицерин, капиллярный вискозиметр для измерения вязкости, секундомер, частицы-трассеры.

**Оборудование для проведения эксперимента:** кювета с водяной рубашкой, установка для изучения быстро вращающихся систем, источник постоянного напряжения, лазер, скоростная видеокамера. Схема установки представлена на рис.17.



**Рис. 17.** Схема экспериментальной установки

### Порядок выполнения работы:

1. Рассчитайте значения собственных частот инерционных колебаний жидкости в цилиндре (инерционных мод) по формуле

$$\sigma^2 = \frac{4n^2\pi^2}{n^2\pi^2 + \xi_{nmk}^2 L^2 / R^2},$$

где  $\xi_{nmk}^2$  является  $m$ -ым положительным решением трансцендентного уравне-

$$\text{ния } \xi \frac{d}{d\xi} J_{|k|}(\xi) + k \left( 1 + \frac{\xi^2}{n^2\pi^2 L^2 / R^2} \right)^{1/2} J_{|k|}(\xi) = 0$$

2. Приготовьте необходимое количество водоглицеринового раствора вязкостью 6 сСт.
3. Заполните кювету рабочим раствором и закрепите на установке.

4. Приведите кювету в быстрое равномерное вращение со скоростью  $\Omega = 10$  об/с.
5. Настройте освещение кюветы лазером в осевом сечении; настройте скоростную видеокамеру таким образом, чтобы частота съемки была кратна частоте вращения полости  $\Omega$ .
6. Включите либрации:  $\omega(t) = \Omega + \Omega_{lib} \Delta\phi \sin \Omega_{lib} t$ . При фиксированной частоте либраций  $\sigma = \Omega_{lib} / \Omega$ , соответствующей инерционной частоте инерционной моды, установите амплитуду  $\varepsilon = \Omega_{lib} \Delta\phi / \Omega$  и проведите видеосъемку. Повторите эксперимент для различных значений  $\varepsilon$  и  $\Omega_{lib}$ .
7. Сохраните полученные видеофрагменты на жесткий диск компьютера.
8. Загрузите последовательность фотографий для определенной моды в программу PIVlab для изучения мгновенного и осредненного поля скорости.

*Порядок действия при работе с PIVlab:*

- Установите параметры обработки изображений: настройка яркости/контрастности; выберите алгоритм обработки изображений (быстрое преобразование Фурье с постепенным уменьшением области обработки:  $64 \times 64$ ,  $38 \times 38$ ,  $20 \times 20$ ,  $10 \times 10$ ).
- Проведите пространственную калибровку изображений.
- Установите время между двумя последовательными изображениями.
- Проведите PIV-анализ последовательности изображений.
- После анализа во вкладке **Post processing** выберите область допустимых значений векторов.
- Во вкладке **Plot** выбирается параметр представления поля скоростей (скорость, завихренность и др.). В этой вкладке также можно выбрать цветовую гамму для характеристик поля скоростей.

- Постройте серию мгновенных полей скорости. Проведите осреднение мгновенных полей скоростей по периоду либраций и сделайте выводы. Сравните между собой мгновенные и осредненные поля скоростей.
- Измерьте максимальную скорость осредненного движения жидкости.
- Постройте зависимость максимальной скорости от амплитуды либраций  $\epsilon$ . Проанализируйте полученную зависимость.

### **КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Почему необходимо использовать методы визуализации?
2. Приведите примеры методов визуализации.
3. Объясните принцип работы в PIV-методом.
4. Какие подходы при обработке изображения PIV-методом существуют?
5. В чем заключается суть кросскорреляционного алгоритма обработки изображения.
6. Назовите достоинства и недостатки PIV-метода.
7. Область применения PIV-метода.
8. Опишите основные элементы экспериментальной установки.
9. Назовите порядок действий при обработке изображений в PIVlab.

## 1. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Экспериментально исследована структура течения в либрирующей цилиндрической полости в случае, когда частота либраций совпадает с одной из собственных частот колебаний жидкости (инерционные моды).
2. Показано, что резонансное возбуждение инерционной моды приводит к возникновению осредненного течения в пограничных слоях Стокса.
3. Исследована структура и интенсивность осредненного течения в зависимости от номера инерционной моды.
4. Разработана лабораторная работа для студентов физического факультета ПГГПУ «Исследование потоков в неравномерно вращающемся цилиндре с жидкостью».

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Greenspan, H.P.** The Theory of Rotating Fluids. – Cambridge: University Press, 1968.
2. **Messio, L., Morize, C., Rabaud, M., Moisy, F.** Experimental observation using particle image velocimetry of inertial waves in a rotating fluid. *Exp. Fluids* 44, 519–528 (2008).
3. **Boisson, J., Lamriben, C., Maas, L.R.M., Cortet, P., Moisy F.** Inertial waves and modes excited by the libration of a rotating cube. *Phys. Fluids* 24, 076602 (2012)
4. **Borcia, I.D., Abouzar, G.V., Harlander U.** Inertial wave mode excitation in a rotating annulus with partially librating boundaries. *Fluid Dyn. Res.* 46, 041423 (2014)
5. **Margot, J.L., Peale, S.J., Jurgens, R.F., Slade, M.A., Holin, I. V.** Large longitude libration of Mercury reveals a molten core. *Science* 316, 710–714 (2007)
6. **Sauret, A., Cébron, D., Le Bars, M., Le Dizès, S.** Fluid flows in a librating cylinder. *Phys. Fluids* 24, 026603 (2012)
7. **Klein, M., Seelig, T., Kurgansky, M.V., Ghasemi, A.V., Borcia, I.D., Will, A., Schaller, E., Egbers, C., Harlander, U.** Inertial wave excitation and focusing in a liquid bounded by a frustum and a cylinder. *J. Fluid Mech.* 751, 255–297 (2014).
8. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. 3-е изд., испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 736 с.
9. **Subbotin, S. & Dyakova, V.** Inertial Waves and Steady Flows in a Liquid Filled Librating Cylinder. *Microgravity Sci. Technol.* (2018).  
<https://doi.org/10.1007/s12217-018-9621-x>

10. **Le Bars, M., Cébron, D., Le Gal, P.** Flows driven by libration, precession, and tides. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 47, 163–193 (2015).
11. **Merzkirch W.** Flow Visualization. Academic Press Inc., 1987. – 260 p.
12. **Yang W.J.** Handbook of Flow Visualization. Hemisphere Publishing Corporation, 1989. – 272 p.
13. **Smits A.J., Lim T.T.** Flow Visualization. Techniques and Examples. Imperial College Press, 2012. – 427 p.
14. **Ван-Дайк М.** Альбом течений жидкости и газа. – М.: Мир, 1986. – 184 с.
15. Стандартный кросскорреляционный алгоритм [электронный ресурс] - режим доступа: [http://www.laser-portal.ru/content\\_186](http://www.laser-portal.ru/content_186)