Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра высшей математики

Выпускная квалификационная работа

ПОНЯТИЯ НЕСТАНДАРТНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ВО ВНЕУРОЧНОЙ РАБОТЕ С УЧАЩИМИСЯ

Работу выполнил:
студент 151 группы
направления подготовки
44.03.05 Педагогическое
образование, профили
«Математика и информатика»
Бушуев Глеб Сергеевич

____
подпись

«Допущена к защите в ГЭК»
Зав. кафедрой высшей математики
Е.Л. Черемных

14.06.2016 ____________
дата подпись

Руководитель:
канд. пед. наук, доцент
кафедры высшей математики
Латышева Любовь Павловна

____
подпись

Пермь
2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Альтернативный подход к построению математического анализа, открытый в 1960 году, получил название нестандартного математического анализа. Его теория основана на использовании давно известных в практике математики, но запрещенных в период *XX* века концепций, связанных с пониманием бесконечно больших и бесконечно малых постоянных величин. Посредством строгого построения вышеотмеченной теории возник новый путь изучения математического анализа, который отличается от традиционного пути и совершенно не зависит от него. Так, в рамках теории нестандартного анализа можно получить все понятия и теоремы, существующие в стандартном анализе, и наоборот. Следовательно, все понятия, теоремы и их доказательства в математическом анализе могут рассматриваться, изучаться и выводиться уже с двух взаимно независимых позиций. Такая возможность рассмотрения с двух позиций изучаемых объектов математического анализа в определенных ситуациях является весьма полезной и даже незаменимой для развития новых математических теорий. Подчеркивая значимость вышеозначенной идеи, Курт Гедель писал в 1973 году: «Есть хорошие основания полагать, что нестандартный анализ в той или иной версии станет анализом будущего» [8, с. 6].

Дополнительно к вышеперечисленным особенностям нестандартного построения теории математического анализа относится следующее перспективное явление. Аналоги понятий, теорем и их доказательств классического математического анализа в рамках теории нестандартного анализа заметно выигрывают в наглядности, краткости и интуитивной ясности своего содержания. Некоторые теоремы становятся почти тривиальными. «В ряде ситуаций сама постановка задач выглядит намного более естественно именно на нестандартном языке» [1, с. 5]. Данное обстоятельство позволяет существенно экономить время мышления при решении трудных задач, рассмотрении и изучении труднодоступных для восприятия и наглядной интерпретации математических теорий, связанных с предельным переходом. Такое значение теории нестандартного математического анализа может найти место на внеурочных или внеаудиторных занятиях. Содержание данных занятий позволит на интуитивном уровне познакомить учащихся с начальными понятиями математического анализа с целью более глубокого понимания сути базовых понятий математического анализа, таких как предел, производная и определенный интеграл. Кроме того, нестандартный анализ позволяет с новых позиций рассматривать сочинения классиков математического анализа, что может быть отражено на содержательном уровне внеклассных занятий с целью привития интереса к математическому анализу, расширения кругозора знаний учащихся по вопросам истории математики. Последнее, ввиду изучения старшеклассниками линии предельного перехода не в соответствии с исторической моделью развития математического анализа, является актуальным.

В настоящее время нестандартный анализ завоевывает все большее признание. В течение последних десятилетий в ряде высших учебных заведений США преподавался элементарный математический анализ, основанный на нестандартном подходе. Итоги такого преподавания были приведены в методической статье, опубликованной в 1976 году в «Американском математическом ежедневнике». Данная статья заканчивается следующими выводами: «Опасения, … что те студенты, которые будут изучать математический анализ при помощи инфинитезимальных (бесконечно малых) элементов, в меньшей степени овладеют основными навыками, должны быть, без сомнения, сняты. Более того, представляется весьма вероятным, что использование инфинитезимального подхода сделает курс математического анализа гораздо более живым и увлекательным как для преподавателей, так и для студентов» [15, с. 115]. Отсюда следует, что изучение теории нестандартного анализа положительно влияет на проявление интереса учащихся к изучаемому предмету, углубление в изучаемую теорию и ее усвоение.

В зарубежной литературе по нестандартному математическому анализу четко прослеживается тенденция развития теории нестандартного подхода к построению математического анализа и ее практическому применению к решению ряда задач математического анализа. Параллельно с этим происходят попытки внедрения идей и фрагментов элементарной теории нестандартного анализа в образовательный процесс. Одним из примеров такого внедрения является книга Г. Дж. Кейслера «Элементарный анализ» [22], которая представляет собой учебник по математическому анализу, написанный с позиций теории нестандартного математического анализа. Помимо рассмотренного примера внедрения в образовательную зарубежную литературу нестандартных методов анализа имеются сведения о положительных результатах непосредственного преподавания элементарной теории нестандартного анализа, примером этого является вышеприведенная статья в «Американском математическом ежедневнике». Однако на данный момент не имеется данных о публикации аналогичных отечественных разработок по внедрению идей и элементов теории нестандартного анализа в образовательную систему. Вместе с этим, нет и русскоязычных переводов соответствующей зарубежной литературы, например, учебника [22].

Таким образом, прослеживается нехватка отечественной литературы по данной тематике, содержащей теоретические и методические основы для организации и проведения дополнительных занятий по нестандартному математическому анализу. Из приведенного выше ясно, что изучение теории нестандартного анализа старшеклассниками или студентами высших учебных заведений в нашей стране невозможно без дополнительных исследований в данной области.

Тем временем, как отмечалось выше, ознакомление с теорией нестандартного анализа положительно влияет на углубление и усвоение теории математического анализа, что зафиксировано в зарубежных публикациях. Поэтому исследование элементарной теории нестандартного анализа на возможность разработки методики ее изучения в рамках дополнительных занятий по математике в старшей школе или в высших учебных заведениях является **актуальным**.

В данной работе разработаем примерное теоретическое содержание (в кратком виде) для проведения дополнительных занятий по нестандартному анализу. В содержание включим историю формирования идей, положенных в основу нестандартного анализа; основные понятия и доказательства некоторых теорем для необходимого построения нестандартной теории. Приведем нестандартную теорию предельного перехода, дифференциального и интегрального исчислений. На примерах покажем практическое применение методов нестандартного анализа при решении стандартных задач классического математического анализа. В рамках нестандартного анализа пересмотрим рассуждения классиков математического анализа, кажущиеся не строгими, но приводящие к успеху для предания им современных критериев строгости. Выделим пути реализации изучения идей и теории нестандартного анализа в условиях дополнительного образования. Кроме того, рассмотрим содержательную часть занятий с методических позиций, дадим методические рекомендации для изучения основ нестандартного анализа на дополнительных занятиях. Выделим временные сроки проведения данных занятий с учетом изучаемых в основном учебном процессе тем по математическому анализу старшеклассниками и необходимое количество проведения данных занятий. Попытаемся сгруппировать изучаемые понятия и создать хронологический порядок их изучения. Дополнительно приведем методическую разработку, являющуюся конкретным примером возможности внедрения идей, реализованных в теории нестандартного анализа, на занятиях дополнительного образования, дадим методические рекомендации к проведению соответствующего мероприятия.

Объект исследования: изучение понятий нестандартного математического анализа.

Предмет исследования: методика изучения основ нестандартного математического анализа в условиях дополнительного образования.

Цель работы: разработать методику изучения основных понятий нестандартного математического анализа в условиях дополнительного образования.

Задачи:

1. Подобрать и проанализировать учебную и научную литературу по теме исследования.

2. Рассмотреть историю формирования идей нестандартного анализа, в том числе высказывания классиков математического анализа.

3. Привести определения основных понятий теории нестандартного математического анализа, формулировки и доказательства основных теорем.

4. Применить методы нестандартного анализа при вычислении пределов, производных и интегралов некоторых функций.

5. Рассмотреть рассуждения классиков математического анализа, кажущиеся не строгими, но приводящие к успеху, и в рамках теории нестандартного анализа сделать их удовлетворяющими современным критериям строгости.

6. Выделить пути изучения базовых понятий нестандартного анализа на дополнительных занятиях по математике. Дать методические рекомендации к изучению основных понятий и составлению содержательной части дополнительных занятий, основанных на нестандартной теории математического анализа.

7. Разработать форму проведения внеклассного мероприятия, основанного на идеях, которые реализует нестандартный математический анализ. Разработать примеры, входящие в содержание математического мероприятия, основанного на идеях, которые реализует нестандартный математический анализ.

Во введении обоснована актуальность, представлен объект, предмет исследования, изложены цели и задачи данной работы.

Первая глава содержит разработку примерного теоретического содержания для проведения дополнительных занятий по нестандартному математическому анализу.

Вторая глава содержит особенности проведения дополнительных занятий по математическому анализу, основанных на нестандартной теории математического анализа, и анализ содержания таких занятий с методических позиций.

В заключении обобщены результаты работы, сделаны соответствующие выводы.

Список литературы содержит 22 библиографических источника.

Выпускная работа состоит из 76 страниц текста, включает четыре рисунка и шесть приложений.

В Приложении 1 рассмотрены основные теоретические положения одной из статей Г.В. Лейбница.

В Приложении 2 разобраны особенности расширения действительных чисел до множества гипердействительных чисел.

В Приложении 3 представлено теоретическое содержание подхода М. Девиса к определению производной функции.

В Приложении 4 вычислены производные некоторых элементарных функций методами нестандартного анализа.

В Приложении 5 приведены исторические сведения о понятии «интеграл».

В Приложении 6 вычислены некоторые интегралы по нестандартному определению.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВНЕУРОЧНЫХ ЗАНЯТИЙ ПО НЕСТАНДАРТНОМУ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Данная глава посвящена рассмотрению основ теоретического содержания нестандартного математического анализа. В русскоязычных источниках теоретический материал нестандартного анализа приведен в достаточно кратком виде и представлен на сложном для учащихся старших классов языке. Поэтому, в данной главе ставится задача привести теоретические положения в более простом виде, но не менее строгом, с точки зрения критериев строгости математического языка. Теоретические основы дополним практическими примерами по применению методов нестандартного анализа, положениями классиков математического анализа, касающимися формирования основополагающих идей теории анализа, а также их не строгими выкладками, которые будут пересмотрены с точки зрения нестандартного анализа для придания им современных критериев строгости.

В первом параграфе рассмотрим поворотные моменты в истории анализа, положения и высказывания классиков того времени, касающиеся основополагающих идей, на которых базируется теория нестандартного анализа. Во втором параграфе перейдем к рассмотрению основных понятий рассматриваемой теории, приведем их стандартные и нестандартные определения, дадим им наглядную интерпретацию. Третий параграф посвящен рассмотрению фундаментальных понятий, связанных с нестандартным дифференциальным исчислением функций одной переменной. Исследуем подходы к определению основных понятий нестандартного дифференциального исчисления из различных источников, один из которых возьмем в качестве основного и приведем в данном параграфе соответствующие теоретические выкладки и практические примеры, в которых методами нестандартного анализа вычислим производные некоторых функций. В четвертом параграфе рассмотрим теорию, связанную с нестандартным интегральным исчислением функций одной переменной.

1.1 Исторические сведения о возникновении идей нестандартного анализа

Возраст нестандартного анализа колеблется от пяти десятков до трех сотен лет. Первая из приведенных дат получится, если считать зарождение нестандартного анализа осенью 1960 года, когда его основатель, Абрахам Робинсон, сделал доклад о возможности применения методов математической логики к обоснованию математического анализа. Вторая дата получится, если считать началом нестандартного анализа появление символов бесконечно малых dx, dy в трактате Г.В. Лейбница «Новый метод».

Понимание Г.В. Лейбницем бесконечно малых, как и другими классиками математического анализа того периода, отлично от понимания бесконечно малых в современном математическом анализе. Данное различие вызвано, прежде всего, введением понятия предела. Однако еще до появления теории пределов интегральное и дифференциальное исчисление были уже хорошо развитыми областями математики. Был один лишь недостаток, который заключался в неясности бесконечно малых. Теория пределов появилась как некоторая надстройка, которая расставила все по местам. Однако нестандартный математический анализ дал объяснение бесконечно малым в том понимании, в котором их понимал Г.В. Лейбниц, поэтому имеет смысл говорить о других методах оперирования с бесконечно малыми, которыми пользовались до понятия предела. Для представления общей картины возникновения идей нестандартного анализа необходимо рассмотреть основные положения классиков того времени.

1.1.1 Описание бесконечно малых Г.В. Лейбницем и И. Ньютоном

Первой опубликованной работой по дифференциальному исчислению является статья Г.В. Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления». Данная работа была опубликована в лейпцигском журнале «Acta Eruditorum» в 1684 году.

Из рассмотрения основных выкладок, приведенных в работе Г.В. Лейбница (см. Приложение 1), можно заметить, что бесконечно малое число Г.В. Лейбниц рассматривает не как функцию, стремящуюся к нулю, а как постоянное число, которое может быть меньше любого заданного количества. Следовательно, оперирование бесконечно малыми сводится к обычным алгебраическим операциям, однако при оперировании с ними в такой форме необходимо учитывать их особые свойства.

Так, например, дифференцируя $y = \frac{1}{x}$, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x}}{dx} = \frac{\frac{x - x - dx}{x(x+dx)}}{dx} = \frac{-dx}{x^2 + xdx} \cdot \frac{1}{dx} = -\frac{1}{x^2 + xdx},$$

где xdx – бесконечно мало, поэтому им можно пренебречь, и искомая производная равна $-\frac{1}{x^2}$.

Для более лучшего представления того, как понимались бесконечно малые Г.В. Лейбницем, приведем одно из его высказываний:

«… Нужно воспринимать бесконечное подобно тому, как это делается в оптике, когда солнечные лучи считаются приходящими из бесконечно удаленной точки и поэтому параллельными… И когда имеются различные порядки бесконечного или бесконечно малых, то понимаются они в том же смысле, в каком земной шар считается точкой по сравнению с расстоянием до неподвижных звезд, а шарик в наших руках – точкой по сравнению с радиусом земного шара, так что расстояние до неподвижных звезд является бесконечно бесконечным или бесконечностью бесконечности по отношению к диаметру шарика. Вместо бесконечно большого или бесконечно малого количества можно взять количество настолько большое или малое, насколько это нужно, чтобы ошибка не превышала заданной. Отличие от архимедовского стиля рассуждений лишь в выражениях, которые у нас более непосредственные и лучше приспособлены для искусства изобретать » [15, с. 100-101].

Данная идея понимания бесконечного легла в основу теории нестандартного анализа, в частности, бесконечно больших и малых чисел, которые в нестандартном анализе получили название гипердействительных чисел.

Помимо работ Г.В. Лейбница, бесконечно малые рассматривались в работах И. Ньютона. Для И. Ньютона бесконечно малые были связаны с представлениями об исчезающих количествах. В своем приложении к «Трактату по алгебре», опубликованном довольно поздно в 1693 году, он дает следующую терминологию: флюксия (производная), флюэнта (первообразная), момент величины (дифференциал). Таким образом, бесконечно малые И. Ньютон обозначил как момент величины, однако его понимание последних было отличным от понимания таковых Г.В. Лейбницем.

И. Ньютон рассматривал их «не как состоящие из крайне малых частей, но как описываемые непрерывным движением», «…как возрастающие или убывающие в непрерывном движении, то есть как притекающие или утекающие» [7, с. 11].

Идеи Ньютона сейчас прочно ассоциируются с теорией пределов, однако, в те времена надежный аппарат, позволяющий работать с исчезающими величинами в том понимании, в котором их рассматривал И. Ньютон, еще не был сформирован. И. Ньютон своими идеями лишь создал предпосылки для его формирования. Поэтому в своих работах И. Ньютон вынужден был данные величины рассматривать с разных точек зрения.

Приведем высказывание А. Робинсона, которое характеризует обоснования понятий, введенных И. Ньютоном: «… Касаясь обоснования введенных им понятий, И. Ньютон обращался то к бесконечно малым, то к пределам, то непосредственно к физической интуиции; его непосредственные последователи предпочитали последнее …» [15, с. 99].

Таким образом, И. Ньютон, вводя исчезающие величины и разрабатывая свои методы оперирования с ними, исходя из своих идей, не отрицал существования других методов, позволяющих работать с этими величинами, правда, в другом понимании таковых.

1.1.2 Описание бесконечно малых Л. Эйлером

Понятие бесконечно малой величины лежит в основе дифференциального исчисления Л. Эйлера. В данном случае он следует первому учебнику анализа бесконечно малых Г.Ф. Лопиталя, написанному в 1696 году под большим влиянием последователя Л. Лейбница – И. Бернулли.

Разъясняя понятия бесконечно малых и больших величин, он пишет: «…бесконечно малое есть точно нуль» [20, с. 91]. Л. Эйлер достаточно подробно разъяснил методические основы своих представлений, связанных с «исчислением нулей». Прежде всего, он вводит два способа сравнения нулей: «…каждому известно, что нуль, помноженный на какое угодно число, дает нуль, то есть что $n \cdot 0 = 0$, и потому $n: 1 = 0: 0$. Отсюда ясно, что два нуля могут иметь друг к другу любое геометрическое отношение, хотя с арифметической точки зрения их отношение есть отношение равенства… для того чтобы эти различные отношения выразить нарочно пользуются различными символами, особенно тогда, когда требуется определить геометрическое отношение двух разных нулей…» [20, с. 91].

Таким образом, Эйлер заключает, что исчисление бесконечно малых, есть не что иное, как поиск отношений между бесконечно малыми или нулями.

1.1.3 Представления Ж. Даламбера и Л. Карно о бесконечно малых

В конце *XVIII* века произошел поворотный пункт в формировании основных понятий анализа, который был связан с деятельностью Ж. Даламбера. Он был последователем И. Ньютона и его идей относительно бесконечно малых. Ж. Даламбер так же являлся одним из ведущих авторов «Энциклопедии или толкового словаря наук, искусств и ремесел», в одной из статей которого заявил: «Ньютон никогда не считал дифференциальное исчисление исчислением бесконечно малых, а видел в нем метод первых и последних отношений» [7, с. 16].

Ж. Даламбер был первым, кто заявил: «…бесконечно малые на самом деле не существуют ни в природе, ни в допущениях геометров» [7, с. 16]. В качестве исходного понятия для построения математического анализа он предлагал понятие предела. Он писал: «Говорят, что одна величина является пределом другой, если вторая может приблизится к первой ближе, чем на любую заданную величину… Теория пределов является основанием подлинной Метафизики дифференциального исчисления… В дифференциальном исчислении речь идет не о бесконечно малых величинах, как это обычно утверждают; речь идет лишь о пределах конечных величин… Термином «бесконечно малая» пользуются лишь как сокращением…» [20, с. 24].

Таким образом, позиция Ж. Даламбера в отношении бесконечно малых величин в немалой степени способствовала формированию представления о бесконечно малой как о величине, стремящейся к нулю. Данные идеи выглядят как не вполне точные изложения современной точки зрения на предел. Однако это не способствовало устранению понятия бесконечно малой в понимании, отличном от приведенного выше.

Л. Карно в публикации «Размышления о метафизике бесконечно малых» придерживался противоположной позиции относительно теории пределов. В данной работе он излагает свои мысли в следующих высказываниях: «Метод пределов или первых и последних отношений отнюдь не освобождает от молчаливого, по крайней мере, различения этих означенных и не означенных количеств, потому что предел количества есть не что иное, как граница, к которой это количество по предположению, непрерывно приближается, пока не станет отличаться от него сколь угодно мало. Следовательно, этот предел считается установленным и, значит, является количеством означенным, между тем как другое количество, которое может сколь угодно приближаться к этому пределу, остается всегда произвольным или неозначенным и не может входить в результат вычисления» [9, с. 275].

1.1.4 Представления о бесконечно малых Б. Больцано, О. Коши и К. Вейерштрасса

XIX век был веком обоснования математического анализа с помощью теории пределов. Б. Больцано выдвинул новый канон строгости обоснования спорных моментов анализа, существовавших до этого времени. О. Коши дал определение бесконечно малому количеству как переменной с нулевым пределом. К. Вейерштрасс ввел «$\varepsilon - \delta$» технику для строгого обоснования предела. Все это стало неотъемлемой частью пути к современному подходу понимания предельного перехода.

Однако и здесь понятие величины не сводится к функции. В изложении О. Коши бесконечно малые и пределы фигурируют как равноправные компоненты обоснования анализа. Стоит отметить следующее высказывание О. Коши: «бесконечно малое приращение переменной порождает всегда бесконечно малое приращение самой функции» [6, с. 30].

Таким образом, новые представления относительно бесконечно малых были связаны с позициями великих предшественников.

Основатель нестандартного анализа А. Робинсон предлагает пересмотреть общую картину возникновения и развития математического анализа от И. Ньютона и Г.В. Лейбница до О. Коши и К. Вейерштрасса. По его мнению, стандартный взгляд на историю развития математического анализа должен быть дополнен или даже изменен. В доказательство он приводил большое количество выдержек Г.В. Лейбница и других упомянутых выше авторов [15, с. 100].

В 1966 году А.Р. Бернстейн и А. Робинсон посредством методов нестандартного анализа получили решение ранее поставленной проблемы, относящейся к обычным стандартным математическим объектам. С этого времени методы нестандартного анализа получили обширное применение и развитие.

1.2 Базовые понятия для построения нестандартного математического анализа

Из п. 1.1 данной главы ясно, что все идеи и рассуждения, которые легли в основу теории нестандартного анализа, основываются на введении в анализ нестандартных элементов, то есть бесконечно малых. Поэтому для рассмотрения таковых необходимо расширить множество действительных чисел до большего множества, в котором будут присутствовать, помимо стандартных действительных чисел, числа не стандартные, в частности бесконечно малые.

В нестандартном анализе, в соответствии с идеями Г.В. Лейбница, один из наиболее принципиальных моментов состоит в том, что бесконечно малые рассматриваются не как переменные величины, а как величины постоянные. В общем случае, число ε называют бесконечно малым, если при сложении его с самим собой все полученные числа вида ε, $\varepsilon+\varepsilon$, $\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon$, $\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon$ и так далее окажутся меньше 1 [15, с. 10]. Другими словами, если ε бесконечно мало, то сколько раз ни откладывай отрезок длины ε вдоль отрезка длины 1, до конца не дойти (рис.1).

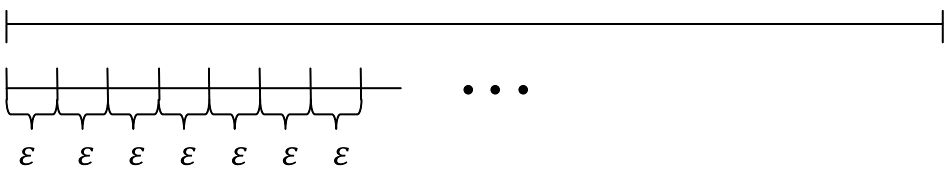


Рис.1. Наглядное представление бесконечно малого числа

При этом число $\frac{1}{\varepsilon}$ бесконечно велико. Множество, в которое входят помимо действительных чисел, числа бесконечно большие и бесконечно малые, отличные от нуля, называют множеством гипердействительных чисел и обозначают $^*\mathbb{R}$. Элементы этого множества называют гипердействительными числами. При этом гипердействительные числа, не являющиеся бесконечно большими, называются конечными. Для каждой функции f с действительными аргументами имеется ее естественное распространение, ее «гипердействительный аналог» $^*f$ – функция с гипердействительными аргументами и значениями [6, с. 46]. Приведем следующее определение: стандартными числами называются все действительные числа, содержащиеся во множестве гипердействительных чисел. x – нестандартное число, если $x \in \{^*\mathbb{R} - \mathbb{R}\}$ [15, с. 17].

Подробное изложение расширения множества действительных чисел до множества гипердействительных чисел содержится в Приложении 2, здесь же ограничимся рассмотрением следующих понятий, необходимых для дальнейшего ознакомления с теорией нестандартного математического анализа. Стандартной частью $st(x)$ конечного гипердействительного числа x называют такое число v, что $x = v + \varepsilon$ для бесконечно малого ε. Поэтому каждое конечное гипердействительное число может быть представлено единственным образом в виде $v + \varepsilon$, где v – стандартное число, ε – бесконечно малое [15, с. 20]. Отображение (взятия) стандартной части обладает естественными свойствами. Если $r \in \mathbb{R}$, то $st(^*r) = r$; если x, $y \in {}^*\mathbb{R}$ оба конечны, то $st(x+y) = st(x) + st(y)$, $st(x-y) = st(x) - st(y)$; и если $st(y) \neq 0$, то $st(\frac{x}{y}) = \frac{st(x)}{st(y)}$ [1, с. 19].

Рассмотрим понятие «порядка» бесконечно малых. Иными словами, будем различать бесконечно малые разных порядков подобно тому, как это делается в изложении стандартного математического анализа. Бесконечно малое ε является бесконечно малым более высокого порядка, чем бесконечно малое δ, если отношение $\frac{\varepsilon}{\delta}$ бесконечно мало. Бесконечно большое A

имеет более высокий порядок, чем бесконечно большое B, если $\frac{A}{B}$ бесконечно велико. Таким образом, для любого бесконечно малого ε можно указать бесконечно малое более высокого порядка, например ε^2; ε^3 и так далее. Аналогично для бесконечно больших чисел [15, с. 23].

Дадим геометрическую интерпретацию бесконечно малым разных порядков. Рассмотрим окрестность нуля для оценки места бесконечно малых, находящихся в одной монаде, но разных порядков. На рис. 2 сначала рассматриваем числовую прямую без приближения, затем с приближением в $\frac{1}{\varepsilon}$ раз, далее с приближением в $\frac{1}{\varepsilon^2}$ раз [15, с. 23].

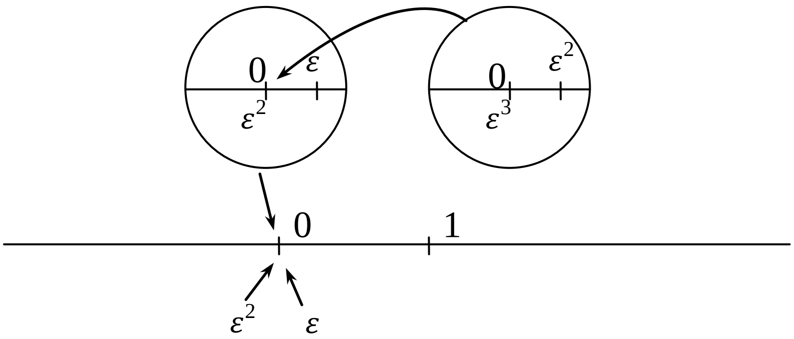


Рис. 2. Гиперприближения окрестности нуля

Приведем следующее определение: Число a называют пределом последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, \ldots$, если для любого бесконечно большого гипернатурального n разность $x_n - a$ бесконечно мала [15, с. 47]. Это определение эквивалентно классическому определению предела последовательности. Однако оно позволяет по-новому находить пределы. Например, для нахождения предела $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}$ возьмем бесконечно большое i. Далее, рассмотрим

$$st\left(\frac{(i+1)^2}{2i^2}\right) = st\left(\frac{i^2+2i+1}{2i^2}\right) = st\left(\frac{i^2}{2i^2} + \frac{2i}{2i^2} + \frac{1}{2i^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

По сути, заменим переменную n, которая стремится к бесконечности, гипердействительным бесконечно большим числом i. Тогда общий член последовательности превратится в гипердействительное число. Учитывая то, что a является стандартной частью конечного гипердействительного числа $a+\varepsilon$ (т.е. $st(a+\varepsilon)=a$), приведем данное число к виду $a+\varepsilon$, где ε бесконечно малое, и получим, что стандартное число a есть искомый предел.

Ограничиваясь приведенными понятиями, перейдем к рассмотрению нестандартного определения производной функции.

1.3 Дифференциальное исчисление в нестандартном математическом анализе

При анализе литературных источников нами обнаружены различные подходы к нестандартному определению производной функции, упоминания о которых отсутствуют в имеющейся современной литературе по нестандартному анализу, но имеются ссылки на наличие данных подходов. В данном параграфе рассмотрим один из подходов к определению производной, а именно подход А. Робинсона. Второй подход – М. Девиса подробно рассмотрен в Приложении 3. Их различие состоит в том, что в первом дифференциал определяется как $df=\Delta f$, во втором $df \sim \Delta f$ [4, с. 99]. Здесь также укажем, что оба подхода эквивалентны, однако каждый по своему влияет на нестандартное определение производной функции, и, следовательно, на методы нестандартного дифференцирования.

В работах А. Робинсона теория нестандартного дифференциального исчисления подразумевает $df=\Delta f$, таким образом, дифференциал функции определяется так, что совпадает с тем, что мы называем приращением функции [4, с. 99]. В данном параграфе, ссылаясь на такое определение дифференциала, приведем определение производной функции и на примере покажем применение этого определения к вычислению производной функции.

Прежде чем рассматривать определение производной функции, рассмотрим определение предела, которое А. Робинсон приводит в одной из своих работ [13].

Пусть a – стандартное действительное число и пусть $f(x)$ – стандартная функция, определенная в интервале $b < x < a$, где b стандартно. Рассмотрим поведение $f(x)$, когда x стремится к a слева.

Стандартное число l является пределом $f(x)$ при x, стремящемся к a слева (т.е. $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = l$), тогда и только тогда, когда $f(a-\eta) \approx l$ для всех бесконечно малых η [13, с. 332]. Запись вида $x \approx y$ означает, что x бесконечно близко к y [4, с. 78].

Заметим, из данного нестандартного определения предела непосредственно вытекает определение непрерывности функции в точке, однако это определение приводить здесь не будем. Более значимо то, что определение производной, которое А. Робинсон в своей работе [13] сформулировал в виде теоремы, является непосредственным следствием приведенного выше определения предела. Рассмотрим это определение.

Пусть $f(x)$ – стандартная функция, определенная в стандартном интервале I, и пусть x_0 – стандартная внутренняя точка этого интервала.

Стандартное число a является производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ тогда и только тогда, когда для всех бесконечно малых $\eta \neq 0$ имеет место $\dfrac{f(x_0+\eta) - f(x_0)}{\eta} \approx a$ [13, с. 340].

Данное определение производной можно переформулировать в эквивалентное ему. А именно, – в известных обозначениях математического анализа, т.е. следуя обозначениям Г.В. Лейбница.

Пусть I – открытый интервал в $\mathbb{R}$, и f: $I \to \mathbb{R}$. Пусть dx – отличная от нуля бесконечно малая. Будем называть величину $dy = f(a+dx) - f(a)$ дифференциалом функции f в точке $a \in I$. Если стандартная часть отношения $\dfrac{dy}{dx}$

существует и одинакова для всех ненулевых dx, то функция f имеет производную в точке a, и $f'(a)=st(\frac{dy}{dx})$ [4, с. 40].

По сути, рассматривая функцию $f(a)$, дадим аргументу a бесконечно малое приращение dx. Тогда значение функции изменится на $dy=\Delta f = f(a+dx)-f(a)$. Получаем $f'(x)=st(\frac{f(a+dx)-f(a)}{dx})$.

Покажем, как данные определения применяются в доказательствах теорем теории дифференциального исчисления и в задачах по вычислению производной некоторой функции. Для этого приведем нестандартное доказательство теоремы Ролля. Для ясности поясним, что в доказательстве рассматриваемой теоремы используется определение производной, приведенное в данном параграфе первым.

Теорема Ролля. Пусть дана стандартная функция $f(x)$, определенная и дифференцируемая в стандартном замкнутом интервале $a \le x \le b$. Предположим, что $f(a)=f(b)=0$. Тогда существует внутренняя точка c этого интервала, такая, что $f'(c)=0$.

Доказательство. Если $f(x)=0$ тождественно на всем интервале, то для любой стандартной внутренней точки c и для любого бесконечно малого $\eta \ne 0$ будет $\frac{f(c+\eta)-f(c)}{\eta}=0$ и потому $f'(c)=0$, согласно определению производной. Допустим теперь, что $f(x)\ne 0$ в некоторой точке интервала – без ограничения общности мы можем предположить, что $f(x)>0$. Тогда $f(x)$ достигает максимума в некоторой внутренней точке c интервала. Пусть η бесконечно мало; тогда $f(c+\eta)\le f(c)$ и $f(c-\eta)\le f(c)$. Пусть $f'(c)=a$; отсюда на основании определения производной $0\ge\frac{f(c+\eta)-f(c)}{\eta}\approx a$, и $0\le\frac{f(c-\eta)-f(c)}{\eta}\approx a$.

Но коль скоро стандартное число a бесконечно близко как к положительным, так и к отрицательным числам, оно обязательно равно нулю. Теорема доказана [13, с. 339-340].

Отметим, из доказанного обычным способом может быть выведена теорема о среднем значении, однако выводить ее здесь не будем, поскольку даже одного приведенного выше примера достаточно, чтобы убедиться, что нестандартное дифференциальное исчисление может конкурировать в простоте с классическим подходом.

Теперь покажем, как применяется приведенное в данном параграфе второе определение производной. Для этого, по определению, вычислим производную функции $y = x^3$.

Придадим *x* бесконечно малое приращение *dx*. Это вызовет изменение значения функции на $dy = (x+dx)^3 - x^3 = 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3$. Тогда

$$y' = st(\frac{3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3}{dx}) = st(\frac{dx(3x^2 + 3xdx + (dx)^2}{dx}) = st(3x^2 + 3xdx + (dx)^2) = 3x^2.$$

Из приведенного ясно, каковы основные отличия вычисления производной методами нестандартного анализа от классического дифференцирования. Дополнительными примерами по нестандартному вычислению производной функции могут послужить вычисления производных некоторых элементарных функций, приведенных в Приложении 4.

1.4 Интегральное исчисление в нестандартном математическом анализе

Рассмотрим основные понятия, связанные с нестандартным интегральным исчислением функций одной переменной. Поскольку суть неопределенного интеграла заключается в вычислении первообразной для некоторой функции, то для его рассмотрения в рамках нестандартного анализа вполне достаточно знания основных понятий теории нестандартного дифференцирования. Что касается методов вычисления неопределенных интегралов в рамках нестандартного анализа, то они не сильно отличаются от стандартных методов. Основное их отличие заключается в понимании величин, которыми оперируют при вычислении первообразной некоторой функции. Поэтому рассматривать неопределенный интеграл с позиций нестандартного анализа мы не будем. Однако, в рамках этой теории, имеет большую значимость рассмотрение понятия определенного интеграла, поскольку его определение и, соответственно, геометрическая интерпретация, построенные на нестандартном языке, имеют определенные отличия от таковых, построенных на стандартном языке. И как следствие, определенные отличия будут наблюдаться в методах вычисления данного интеграла. Выявлением и рассмотрением этих отличий мы и займемся в этом параграфе.

Коль скоро нестандартный анализ реализует на современной основе идею о существовании бесконечно малых величин, которая, по сути, зародилась еще в древности, то имеет смысл рассмотреть некоторые исторические сведения о возникновении понятия интеграла, которые приведены в Приложении 5.

Перед рассмотрением нестандартного определения понятия определенного интеграла придадим смысл следующей эвристической идее в рамках теории нестандартного анализа о том, что интеграл есть сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых. Для этого сначала определим сумму Римана.

Пусть $f:\mathbb{I} \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{I}$ – некоторый промежуток в $\mathbb{R}$. Причем f – положительна и непрерывна на $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$. Пусть $[a,b] \subset \mathbb{I}$, а Δx – положительное действительное число. Определим сумму Римана формулой:

$$\sum_a^b f(x)\Delta x = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + ... + f(x_{n-1})\Delta x + f(x_n)(d - n\cdot\Delta x), \quad (1)$$

где n – наибольшее целое число, для которого $a + n\cdot\Delta x \le b$, и $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, …, $x_n = a + n\cdot\Delta x$ [1, с. 41]. Заметим, допускается возможность выполнения строгих неравенств $n\cdot\Delta x < b - a < (n+1)\Delta x$.

Поскольку функция f положительна и непрерывна, мы формируем сумму Римана как сумму площадей прямоугольников, построенных над каждым из подотрезков, причем высота каждого прямоугольника равна значению функции f в левом конце его основания [1, с. 41].

Таким образом, для фиксированных a, b сумма Римана является функцией от Δx. Согласно принципам продолжения и переноса (ознакомится с данными принципами можно в источнике 9), эта функция определена также для положительных бесконечно малых dx [1, с. 41].

В этом случае мы получаем гиперконечную сумму $\sum_{a}^{b} f(x)dx$, где число n в (1) бесконечно велико. Заметим, что данная сумма Римана является конечным гипердействительным числом, следовательно, она имеет стандартную часть.

Теперь мы можем привести следующее определение:

Определение. Пусть $[a,b] \subset \mathbb{I}$ и пусть dx – положительное бесконечно малое. Определенный интеграл функции f от a до b по dx есть стандартная часть суммы Римана: $\int_{a}^{b} f(x)dx = st\left(\sum_{a}^{b} f(x)dx\right)$ [1, с. 41].

Отсюда можем сделать следующий вывод: $\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \sum_{a}^{b} f(x)dx$. Вывести последнее заключение можно независимо от определения, и, помимо этого, показать эквивалентность вышеприведенного определения стандартному определению.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \int_{a}^{b} f(x)dx$, где s_n – сумма Римана, то воспользовавшись нестандартным определением предела последовательности будем иметь эквивалентное данному положение (которое мы вывели из нестандартного вышеприведенного определения интеграла) $\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \sum_{a}^{b} f(x)dx$, где $\sum_{a}^{b} f(x)dx$ – гиперконечная сумма Римана.

Теперь займемся нестандартным доказательством одного из свойств определенного интеграла. Для этого, пусть $J(r)$ – гипердействительный аналог верхней интегральной суммы Дарбу, $j(r)$ – гипердействительный аналог нижней интегральной суммы Дарбу. Обозначим через $\int_a^{\bar{b}} f(x)dx$ и $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$, соответственно, верхний и нижний интегралы Дарбу для $f(x)$ на интервале $\mathbb{I}$. Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема. $J(r) \approx \int_a^{\bar{b}} f(x)dx$ и $j(r) \approx \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$ для каждого допустимого r из $\mathbb{R}^*$ [13, с. 343].

Замечание. Доказательство данной теоремы, как и определения функций $J(r)$, $j(r)$ приводить здесь не будем, поскольку с этим можно ознакомиться в [13, с. 342-343]. Для нас более значима суть положения данной теоремы, необходимая для доказательства одного из свойств определенного интеграла.

Из вышеприведенной теоремы, как следствие, следует следующее положение: интеграл (по Риману) $\int_a^b f(x)dx$ от стандартной и ограниченной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ существует тогда и только тогда, когда $J(r) \approx j(r)$ для некоторого (а следовательно, для каждого) допустимого r [13, с. 343].

Предположим, что стандартные и ограниченные функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Риману на отрезке $[a,b]$. Пусть $J_f(r)$, $j_f(r)$, $J_g(r)$, $j_g(r)$, $J_{f+g}(r)$, $j_{f+g}(r)$ – функции, аналогичные рассмотренным выше $J(r)$, $j(r)$, но уже конкретно для $f(x)$, $g(x)$ и $f(x)+g(x)$, соответственно, на любом отрезке, содержащемся в $[a,b]$,

$$\min f(x) + \min g(x) \le \min(f(x)+g(x)) \le \max(f(x)+g(x)) \le \max f(x) + \max g(x).$$

Отсюда для любых стандартных r $j_f(r)+j_g(r) \le j_{f+g}(r) \le J_{f+g}(r) \le J_f(r)+J_g(r)$. Но для каждого допустимого r, по предположению, $j_f(r) \approx J_f(r)$ и $j_g(r) \approx J_g(r)$, а потому $j_f(r)+j_g(r) \approx j_{f+g}(r) \approx J_{f+g}(r) \approx J_f(r)+J_g(r)$. Это показывает, что $f(x)+g(x)$ интегрируема по Риману, и $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ [13, с. 343-344].

Так выглядит нестандартное доказательство одного из свойств определенного интеграла, остальные свойства могут быть доказаны подобным образом.

Теперь зададимся целью вычислить определенный интеграл некоторой функции с заданными пределами интегрирования по нестандартному определению. Для этого нам потребуется рассмотреть основной принцип интегрального исчисления, которым мы и завершим данный параграф. Непосредственное вычисление интегралов приведено в Приложении 6.

Основной принцип интегрального исчисления: «При вычислении сумм бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых одного знака можно пренебрегать бесконечно малыми высшего порядка по отношению к данным бесконечно малым…» [3, с. 40].

Докажем его. Пусть $st\left(\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\right)=t$, где $\alpha_k \approx 0$. По условию, задано $\beta_k = \alpha_k - o(\alpha_k)$. Поскольку $\beta_k \sim \alpha_k$, то $t = st\left(\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\right) = st\left(\sum_{k=1}^{N}\beta_k\right)$. Что и требовалось доказать.

Выводы первой главы

В данной главе рассмотрены основные понятия и положения дифференциального исчисления в терминах нестандартного математического анализа. Собраны и приведены некоторые положения, высказывания классиков математического анализа, в которых содержатся основополагающие идеи, раскрывающие смысл понятия бесконечно малой величины. Выявлены разные подходы в построении теории нестандартного дифференциального исчисления. Первый подход принадлежит А. Робинсону, теория которого подразумевает $df = \Delta f$. Данная теория была подробно рассмотрена, приведены практические примеры по вычислению производной по методам данной теории. Второй подход принадлежит М. Девису, в теории которого подразумевалось $dy \sim \Delta f$, где символ $\sim$ обозначает эквивалентность. Данный подход был подробно изложен в Приложении 5. Кроме того, были вычислены производные некоторых элементарных функций методами нестандартного анализа, приведенные в Приложении 4, и интегралы некоторых функций, приведенные в Приложении 6. На рассмотрении нестандартной теории интегрального исчисления мы заканчиваем данную главу и переходим к методическим рекомендациям к изучению основных понятий нестандартного анализа в условиях дополнительного образования.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРИИ НЕСТАНДАРТНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА НА ВНЕУРОЧНЫХ ЗАНЯТИЯХ

Данная глава посвящена особенностям проведения внеурочных занятий по математическому анализу, основанных на нестандартной теории математического анализа, и исследованию содержания данных занятий с методических позиций. В первом параграфе рассматриваются пути реализации рассматриваемых занятий в старшей школе и высших учебных заведениях. Анализируются подходы А. Робинсона и М. Девиса к определениям базовых понятий теории нестандартного анализа для внесения их в содержание занятий по нестандартной теории математического анализа. Выделяются методические приемы для изучения понятий нестандартной теории, подчеркивается значимость привлечения исторической литературы по математическому анализу в содержание рассматриваемых занятий, обозначаются перспективные стороны проведения занятий по изучению базовых понятий нестандартной теории. Второй параграф основан на методических рекомендациях к составлению содержания рассматриваемых занятий и к изучению основных понятий нестандартной теории. Кроме того, в данном параграфе будет создан хронологический порядок изучения основных понятий и выделены временные границы для проведения внеурочных занятий для старшей школы с учетом изучаемых в основном учебном процессе тем по математическому анализу. И в завершающем данную главу – третьем параграфе – представим методическую разработку внеклассного мероприятия по математике, являющуюся конкретным примером возможности внедрения идей нестандартного анализа во внеклассные занятия. В данном параграфе приведем специфические особенности методической разработки, обозначим ее цели, контингент участников, рассмотрим особенности проведения мероприятия.

2.1 Особенности изучения основных понятий теории нестандартного математического анализа

Изучение основных понятий нестандартного анализа в данной работе предусматривается лишь в условиях дополнительного образования. Данное условие обосновывается тем, что аналоги рассматриваемых понятий нестандартной теории в достаточно полном объеме и строгом виде изучаются в классическом математическом анализе, ввиду данной реальности нет необходимости их изучения в рамках нестандартной теории. Кроме того, изучение нестандартных понятий в старшей школе возможно лишь в наивном виде, поскольку дать строгие определения стандартных и нестандартных объектов возможно лишь с привлечением теории математической логики, которая не изучается в старшей школе. Таким же образом, как в старшей школе, так и на начальных курсах математических факультетов высших учебных заведений, нет возможности строго доказать существование бесконечно малых и бесконечно больших чисел, на которых базируется вся теория нестандартного анализа. В условиях же дополнительного образования данная строгость будет излишней, поскольку целью таких занятий является углубленное восприятие и усвоение базовых понятий математического анализа, данная цель вполне достигается с помощью привлечения исторической литературы, в которой присутствуют рассуждения классиков математического анализа. Существование же стандартных и нестандартных чисел преподносится в виде аксиомы, стандартные и нестандартные числа усваиваются на интуитивном уровне. И при данных обстоятельствах происходит дальнейшее изучение методов нестандартного анализа. Отметим, такой вид подачи теории имеет свою строгость и формализм, поэтому не следует считать подачу теории в таком виде абсолютно наивной и необоснованной. Ввиду вышеприведенного ясно, что изучение понятий математического анализа в рамках нестандартного анализа возможно лишь в условиях дополнительного образования.

Изучение понятий нестандартного математического анализа в условиях дополнительного образования в рамках данной работы преследует следующие цели: углубление сути базовых понятий математического анализа, таких как предел, производная и определенный интеграл; знакомство с идеями предельного перехода в нестандартном математическом анализе; знакомство с аналогами базовых понятий классического математического анализа в рамках нестандартной теории; углубление знаний по истории математического анализа; знакомство с рассуждениями классиков математического анализа; изучение методов нестандартного анализа при вычислении пределов, производной. Наличие данных целей служит основанием для проведения внеурочных занятий по нестандартной теории математического анализа.

Рассмотрим пути реализации проведения данных занятий, как в школе, так и в высших учебных заведениях.

В старшей школе возможны два пути реализации проведения таких занятий. Первый путь – это создание отдельного курса дополнительного образования, ограниченного числом занятий, на котором последовательно будут изучаться аналоги базовых понятий математического анализа в рамках нестандартной теории. Второй путь реализуется благодаря интеграции содержания курса, рассмотренного в первом пути, в содержание уже имеющейся на базе конкретной школы системы кружковых занятий, на которых изучается материал, выходящий за рамки школьной программы.

Реализация ознакомления с теорией нестандартного анализа в высших учебных заведениях возможна в двух формах. Первая форма – это проведение факультативного курса, на котором возможно в достаточно строгом виде изучение основных понятий нестандартного анализа и его методов при вычислении пределов и производной функции. Вторая форма, это так называемые познавательные лекции, на которых возможно в кратчайшее время познакомить студентов с теорией нестандартного анализа и попытаться заинтересовать в самостоятельном изучении данной теории.

Содержание рассматриваемых занятий для школьников и для студентов различно. Если содержание занятий для школьников должно носить менее формализованный характер и содержать как исторические рассуждения классиков математического анализа, так и исторические примеры применения методов нестандартного математического анализа, то для студентов подача теории может носить более строгий характер и, возможно, не рассматривать исторические примеры. Также студенты знакомятся с более широким объемом понятий аналогов математического анализа в рамках нестандартной теории. Примерами могут быть такие понятия, как предельная точка множества, равномерная непрерывность функции и т.п.

К определениям базовых понятий теории нестандартного анализа существуют два подхода. Как указано ранее, подходы А. Робинсона и М. Девиса (эквивалентные друг другу) разнятся лишь в определении дифференциала. Но различие определений дифференциала функции влечет различие в определении производной функции. В первом подходе производная определяется следующим образом: $f'(x) = st(\frac{dy}{dx})$, во втором подходе производная определяется как $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Отсюда возникает вопрос, какой подход использовать при объяснении понятий дифференциала и производной функции на внеурочных занятиях, основанных на нестандартной теории математического анализа. Изучив построение нестандартной теории первым и вторым подходом можно сделать следующие выводы. Подход М. Девиса более формализован, кроме того, в нем приводятся дополнительные понятия, например понятие эквивалентных функций [4, с. 97]. Из данных обстоятельств вытекает следующее заключение: подход М. Девиса не пригоден для использования его в содержании рассматриваемых занятий в старшей школе. Однако на занятиях в высших учебных заведениях возможно упоминание о данном подходе и сравнении данных подходов ввиду более высокой подготовленности студентов.

Рассмотрим некоторые возможности для более эффективного изучения нестандартной теории.

При изучении базовых понятий нестандартного математического анализа имеется возможность эффективно применять наглядные иллюстрации ввиду наличия определений бесконечно больших и малых постоянных величин. Бесконечно малые и большие величины в нестандартной теории рассматриваются как постоянные величины [15, с. 9]. Таким образом, появляется возможность создавать иллюстрации.

Отметим высокую значимость привлечения литературы по истории математического анализа в содержание дополнительных занятий. Нестандартный анализ реализует идеи о существовании бесконечно больших и бесконечно малых чисел. Причем данными нестандартными числами пользовались во времена становления математического анализа. Таким образом, изучая и разбирая рассуждения классиков математического анализа, учащиеся проникают в суть идей привлечения таких чисел для перехода к пределу некоторой функции. Кроме того, на интуитивном уровне усваивается суть нестандартных чисел. Идеи употребления нестандартных чисел при вычислениях исторически восходят к классикам математического анализа, таким, как Г.В. Лейбниц, Л. Эйлер и др. Поэтому изучая работы таких крупных математиков, учащиеся имеют возможность параллельно знакомиться и с их биографией, что положительно влияет на развитие кругозора знаний учащихся в плане истории математического анализа.

Закончим данный параграф еще одной особенностью рассматриваемых занятий. При изучении основных понятий в рамках нестандартной теории имеется возможность рассмотрения и изучения таких понятий, которые школьники еще не проходили в рамках основного учебного процесса. Например – понятия дифференциала функции. Однако следует заметить, что данные понятия в классической и нестандартной теории математического анализа определены по-разному, поэтому следует всякий раз подчеркивать данный факт. Кроме того, учащиеся имеют возможность познакомиться с употреблением новой символики. Вышеперечисленное усваивается учащимися на перспективу к изучению математического анализа в высших учебных заведениях.

2.2 Методические рекомендации к содержанию внеурочных занятий по нестандартному анализу

Содержание рассматриваемых внеурочных занятий охватывает лишь те разделы математического анализа, которые были изучены учащимися. Основные понятия, которые будут изучаться на рассматриваемых занятиях, следующие: предел последовательности, предел функции, производная.

Кроме данных основных понятий, в зависимости от изучения материала, имеется возможность рассмотрения такого понятия, как определенный интеграл. Заметим, что методы вычисления неопределенных интегралов в рамках нестандартного анализа не сильно отличаются от стандартных методов, основное их отличие заключается в понимании величин, которыми оперируют при вычислении первообразной некоторой функции. Однако в рамках нестандартной теории имеет большую значимость рассмотрение понятия определенного интеграла, поскольку его определение и, соответственно, геометрическая интерпретация, построенные на нестандартном языке, имеют определенные отличия от таковых, построенных на стандартном языке. И как следствие, определенные отличия будут наблюдаться в методах вычисления данного интеграла по его нестандартному определению. Учащимся может быть предложено попытаться рассмотреть и выявить данные отличия. Однако стоит заметить следующее: понятие неопределенного интеграла изучается учащимися в конце первого полугодия 11 класса, поэтому нецелесообразно рассматривать данное понятие на школьных внеурочных занятиях по математическому анализу, основанных на нестандартной теории, если данное понятие еще не было изучено в школе.

Вообще говоря, вышеприведенное утверждение относится и к другим основным понятиям, изучаемым на рассматриваемых занятиях. Поэтому имеет смысл рассмотреть возможные временные рамки для проведения данных занятий. Для этого отметим время изучения интересующих нас понятий в школьном курсе алгебры и начал анализа. Следуя примерному тематическому планированию учебника [12], получаем, что интересующие нас понятия, а именно: понятие предела последовательности, предела функции и производной функции изучаются в начале второго полугодия 10 класса. Понятие неопределенного интеграла изучается в конце первого полугодия 11 класса. Исходя из данных обстоятельств, делаем следующий вывод: оптимальным периодом проведения рассматриваемых занятий может быть временной промежуток, начинающийся с середины второго полугодия 10 класса и заканчивающийся в конце учебного года. Проведение данных занятий также возможно в начале 11 класса. Заметим, в отмеченных временных рамках учащиеся еще не успели изучить понятие определенного интеграла, следовательно, нецелесообразно рассматривать на дополнительных занятиях данное понятие в рамках нестандартного анализа. Поэтому оно не входит в содержание рассматриваемых дополнительных занятий.

В отличие от школьников, студенты первых курсов изучили все основные понятия математического анализа, поэтому в содержание занятий для данной категории учащихся входят все рассмотренные ранее основные понятия математического анализа. Кроме того, содержание занятий для студентов может быть расширено другими понятиями, пройденными ими на первом курсе по дисциплине «Математический анализ». Как уже отмечалось ранее, на занятиях, проводимых для студентов, будет излишним постоянное обращение к исторической литературе по математическому анализу, поскольку изучаемая теория должна иметь более строгий вид. Ввиду этого, содержание занятий может быть распределено на 5 пар (10 учебных часов). На первой паре студентов вводят в теорию нестандартного анализа, представляют основные исторические моменты становления математического анализа, расширяют множество действительных чисел до большего множества – гипердействительных чисел. На второй, третьей, четвертой и пятой парах, соответственно, изучаются следующие основные понятия нестандартного анализа: предел последовательности, предел функции, производная, определенный интеграл. Одновременно с этим изучаются вычислительные методы нестандартного анализа.

Составим группы занятий для курса дополнительного образования, основанного на нестандартной теории математического анализа для старшей школы. Данные группы могут быть составлены следующим образом:

- 1 группа – 2 вводных занятия;
- 2 группа – 3 занятия, посвященные изучению предела последовательности;
- 3 группа – 3 занятия, посвященные изучению предела функции;
- 4 группа – 3 занятия, посвященные изучению производной функции и 1 заключительное занятие.

Дадим каждой из этих групп методические рекомендации по содержанию данных занятий и их проведению без приведения полного содержания для каждого занятия. Сделаем следующее замечание, поскольку данные дополнительные занятия для старшей школы и занятия для студентов высших учебных заведений отличаются лишь содержанием, а полное содержание для каждого занятия здесь приводить не будем, поэтому давать аналогичные методические рекомендации по дополнительным занятиям для студентов считаем излишним.

Изучение курса дополнительного образования для старшеклассников, основанного на теории нестандартного анализа, следует начинать с занятий первой группы, т.е. с вводных занятий. На первом занятии необходимо изучить историю зарождения математического анализа и продолжения его развития. Выделить имена известных ученых – математиков, способствовавших развитию математического анализа. На данном занятии следует также отметить, что понятие производной функции появилось намного раньше понятия предела функции. Следует рассмотреть пример вычисления производной функции в рассуждениях классиков математического анализа и сравнить данное вычисление с вычислением, которое учащиеся изучали в школе. Необычное вычисление производной функции способствует мотивации учащихся на дальнейшее изучение нестандартной теории. Кроме того, следует обратить внимание на нестандартный элемент, на бесконечно малые, которыми пользовались классики математического анализа. Для их усвоения полезно рассмотреть высказывания Г.В. Лейбница и И. Ньютона о бесконечно малых и бесконечно больших. Также имеется возможность для маленьких сообщений, подготовленных учащимися по биографии известных ученых-математиков. На втором занятии можно вводить учащихся в теорию нестандартного анализа; рассказать о «реабилитации» бесконечно малых в 1960 году и их формализации; привести строгие определения бесконечно малых и рассмотреть расширение множества действительных чисел. Целью занятий второй группы является изучение исторической картины развития математического анализа и формирование восприятия понятий стандартных и нестандартных чисел.

Далее проводятся занятия второй группы. Целью занятий второй группы является усвоение нестандартного определения предела последовательности и формирование устойчивых навыков вычисления пределов последовательностей нестандартными методами анализа. На первом занятии происходит изучение понятия стандартной части нестандартного числа, повторяется стандартное определение предела последовательности, изучается нестандартное определение предела последовательности. В заключение происходит сравнение данных определений и рассмотрение возможности вычисления предела последовательности по данному нестандартному определению. На втором занятии изучаются нестандартные методы математического анализа, связанные с вычислением предела последовательности, закрепляются вычислительные навыки. На третьем занятии, возможно, следует провести мероприятие, направленное на усвоение понятий бесконечно больших и малых чисел, стандартной части числа, предела последовательности, на закрепление вычислительных навыков методами нестандартного анализа для вычисления пределов последовательностей.

Так подходит очередь к проведению занятий третьей группы. Целью занятий третьей группы является усвоение нестандартного определения предела функции в точке и формирование устойчивых навыков вычисления пределов функций в точке нестандартными методами анализа. На первом занятии происходит изучение понятия предела функции в точке в рамках нестандартного анализа, данное определение сравнивается со стандартным определением. Заметим, в содержание данных занятий необходимо ввести понятие предела функции в точке справа и слева. Поскольку, если не указано, что функция имеет общий предел, то необходимо искать левосторонний и правосторонний пределы. Применяют определение предела функции к непосредственному вычислению предела функции в точке. На последующих двух занятиях происходит закрепление вычислительных методов нестандартного анализа для вычисления предела функции. На одном из занятий возможно проведение очередного мероприятия. Заметим, задания для содержания занятий данной группы могут быть взяты из любого школьного учебника, например из [11].

Заключительной группой занятий рассматриваемого курса является четвертая группа занятий. Целью занятий четвертой группы является усвоение нестандартного определения производной функции и формирование навыков вычисления производной функции по нестандартному определению. Первое занятие данной группы уместно начать с повторения стандартного определения производной функции. В последующем – заменить стандартные понятия нестандартными и сформулировать нестандартное определение производной. Далее, следуя подходу А. Робинсона, определить приращение функции как дифференциал функции. Изучить понятие дифференциала функции, рассмотреть его определения классиками математики, например, из учебника, написанного Г.Ф. Лопиталем [10]. Особенностью изучения нестандартного понятия производной функции является возможность разбирать большое количество рассуждений классиков математики и, сделав соответствующие замечания, приводить их к виду, удовлетворяющему современным критериям строгости. Данная особенность является очень полезной как для развития логического мышления учащихся, пополнения знаний учащихся по истории математического анализа, так и для усвоения базовых понятий нестандартного математического анализа. На последующих двух занятиях данной группы происходит закрепление в рамках нестандартного анализа навыков по вычислению производных элементарных функций, вычислению дифференциалов, а также разбор рассуждений классиков математического анализа. На заключительном занятии предлагается провести мероприятие с обобщенным содержанием, направленное на усвоение и закрепление всех изученных базовых понятий нестандартного математического анализа.

Данный параграф представляется необходимым закончить следующими выводами. При изучении любого базового понятия нестандартного анализа эффективно привлекать рассуждения классиков математического анализа, относящиеся к данному понятию, или его историческое определение. Кроме того, эффективно сравнивать стандартные и нестандартные определения изучаемых понятий, сравнивать соответствующие этим понятиям вычислительные методы.

2.3 Методическая разработка к проведению занятия по нестандартному анализу в игровой форме

Методическая разработка внеурочного мероприятия по математическому анализу позволяет на интуитивном уровне познакомить участников с элементами нестандартного математического анализа посредством решения задач, которые не требуют глубокого знания теории нестандартного анализа.

Данное мероприятие рассчитано на учащихся старшей школы, которые изучили понятия «предел» и «производная», и на студентов высших учебных заведений, изучающих математический анализ. Студенты и школьники при проведении мероприятия будут в равном положении, поскольку никто из них не знакомился ранее с идеями предельного перехода в нестандартном математическом анализе. Следовательно, данное мероприятие можно проводить, не меняя при этом его содержания, как со старшеклассниками 10-11 классов, так и со студентами начальных курсов математических факультетов высших учебных заведений.

Обсуждаемое внеурочное мероприятие преследует несколько целей: на базе идеи о конечных и бесконечных числах познакомить учащихся с новыми понятиями и символикой математического анализа, в том числе создав условия для интуитивного понимания понятий предела и производной; углубить знания по истории математики путем понимания рассуждений классиков математического анализа.

Основной трудностью в разработке данного мероприятия является создание таких заданий, которые были бы посильны старшеклассникам, не требовали «погружения» в теорию нестандартного анализа, поскольку последние с ней не знакомы, но, тем не менее, содержали идеи (например, о существовании бесконечно больших и бесконечно малых постоянных величин), которые использует нестандартный математический анализ. Разрешение данной трудности возможно с помощью привлечения исторической литературы при создании заданий исследовательского характера.

Рассмотрим еще одну особенность данного внеклассного мероприятия. Реализовать его проведение в старшей школе можно не только в системе дополнительного образования, но и как обычное внеурочное мероприятие, которое дополняет основной учебный процесс. Например, данное мероприятие можно провести после изучения десятиклассниками темы «Производная функции».

Задания к рассматриваемому мероприятию разрабатываются с привлечением исторической литературы. Приведем примеры таких заданий:

(1) В трактате Л. Эйлера «Дифференциальное исчисление», в частности, отмечается: «… бесконечно малое количество есть частное, возникающее в результате деления конечного количества на бесконечно большое» [20, с. 94]. Здесь Л. Эйлер вводит обозначения 0 – бесконечно малое количество, ∞ – бесконечно большое количество. Исходя из этого, получаем: $0=\frac{a}{\infty}$. Основываясь на рассуждениях Л. Эйлера и его обозначениях, вычислите $\frac{6}{0}$.

(2) В своей монографии «Введение в анализ бесконечных» Л. Эйлер приводит следующие рассуждения: «… Так как i есть число бесконечно большое, то $\frac{i-1}{i}=1$; действительно, ясно, что чем большее число подставим вместо i, тем ближе значение дроби $\frac{i-1}{i}$ будет подходить к единице; если i станет больше всякого заданного числа, то дробь $\frac{i-1}{i}$ станет равна единице …» [19, с. 102]. С помощью подобных рассуждений и обозначений вычислите значение дроби $\frac{i-3}{4i}$.

Представляется полезным подчеркнуть постоянное, эффективное и эффектное применение инфинитезимальных концепций и, прежде всего, актуальных бесконечно больших и бесконечно малых чисел Леонардом Эйлером [7, с. 15].

Из приведенных примеров ясно, что трудность заданий заключается не столько в вычислениях, сколько в понимании заложенных в конкретное задание идей. В дальнейшем задание из второго примера может быть напрямую связано с понятием предела. Кроме того, в некоторых заданиях может быть использована еще неизвестная учащимся символика, с которой они могут познакомиться в процессе выполнения задания при помощи правильных пояснений к нему.

Поясним некоторые моменты, относящиеся к форме проведения данного мероприятия. Прежде всего, данное мероприятие видится как командное состязание. Так, его участники разбиваются на команды по 2-5 человек; каждой из них предлагаются задания, выполнив которые, команда получает определенное количество баллов. Побеждает команда, набравшая за время проведения мероприятия наибольшее количество баллов. Кроме того, для данного мероприятия необходимо, чтобы задания командам предлагались в строгой последовательности. Так, содержание первых заданий будет формировать на интуитивном уровне представление о тех понятиях, относящихся к нестандартному анализу (например, таких, как бесконечно большая величина), которые будут использоваться в последующих заданиях. Каждый раз командам предлагается не одно общее задание, а несколько аналогичных друг другу, чтобы обеспечить каждому участнику команды получение своего индивидуального задания для более глубокого проникновения в существо дела. Заметим, составлять такие аналогичные друг другу задания не представляет трудности. Так, например, в рассмотренном задании (1) из данного параграфа можно предусмотреть вычисление разными учащимися различных дробей: $\frac{1000}{0}, \frac{3}{\infty}, \frac{0,77}{0}$. При этом процесс заключается в двух этапах: первый состоит в выполнении своего задания каждым участником, второй этап – в обсуждении заданий группой и помощи тем ее членам, которым не удается добиться успеха, поскольку в итоге команда получает «призовые» баллы за каждое индивидуальное задание. Последующий набор индивидуальных заданий команда получает только при условии успешного выполнения всех заданий предыдущего набора. После двух – трех таких туров (когда базовые понятия сформированы), состязание приобретает более выраженный индивидуальный характер. Задания каждого следующего тура оцениваются большим количеством баллов. При этом сдавать свои индивидуальные задания можно, даже если кто-то из команды еще не справился со своим заданием из этого набора. Значит, каждый участник может уже не отвлекаться на помощь членам своей команды, а «зарабатывать» баллы и для себя, и для команды в целом. Таким образом, в итоге можно выделить команду победителей и лучшего участника – того, кто среди всех участников состязания получил наибольшее количество баллов в индивидуальном зачете.

Рассмотрим особенность выставления баллов участникам мероприятия. Поскольку мероприятие организовано так, что в нем ведется как командное состязание, так и индивидуальное, то принципиально важно, чтобы каждый участник в любое время мог видеть свои баллы, баллы своей команды и баллы других участников.

Для разрешения данной ситуации видится два пути. Первый путь – это вывод результативной таблицы проектором. В этом случае на организатора мероприятия накладывается дополнительная функция своевременного обновления баллов каждого участника. Ввиду того, что необходимо проверять правильность решения заданий каждого участника, и учитывая индивидуальность заданий каждого участника, такой путь неудобен для организатора мероприятия, поскольку на него ложится большая нагрузка. Причем, в таком варианте возможны опечатки при проставлении баллов участникам, несвоевременное обновление баллов участникам, либо самый неблагоприятный случай, когда организатор ввиду большой нагрузки, просто не будет успевать выполнять все свои функции. Данные минусы такого пути разрешимы лишь при участии в мероприятии помощников организатора, что исключает возможность проведения мероприятия одним организатором.

Второй путь – это зарисовка специальной результативной таблицы на доске мелом (рис. 3).

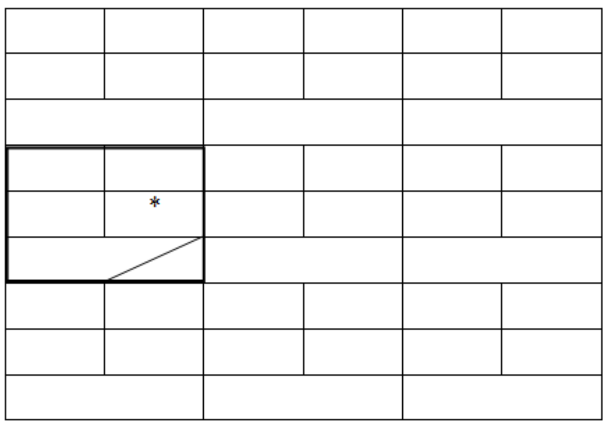


Рис.3. Результативная таблица 1

На рис. 3 каждый блок, состоящий из четырех маленьких ячеек и одной большой, символизирует одну из команд. Причем, как можно заметить, таблица соответствует схеме расположения парт в классе. Тогда, первый столбец таблицы – это первый ряд, второй столбец – второй ряд, третий столбец – третий. На рис. 3 ячейка со звездочкой внутри соответствует месту за партой в классе, а именно: первый ряд, 4 парта, 2 вариант. Выделенный блок со звездочкой внутри символизирует команду, в которой находится участник, символизирующий звездочку. Если команд меньше 9, то некоторые блоки будут считаться недействительными, а именно те, которые символизируют пустые парты.

Если в команде 5 участников, то сдвигаются ближайшие 4 парты и один участник подсаживается с краю, его ячейкой считается самая большая ячейка. В этом случае в большой ячейке отсекается уголок, как показано в блоке с участником, которого символизирует звездочка на рис. 3. Причем баллы пятого участника ставятся в большую часть большой ячейки, общие баллы команды проставляются в отсеченный уголок. Баллы остальных участников команды проставляются в соответствующие ячейки, которые символизируют места, за которыми сидят участники.

Если в команде меньше 5 участников, то таблица приобретает обычный вид, как показано на рис. 4.

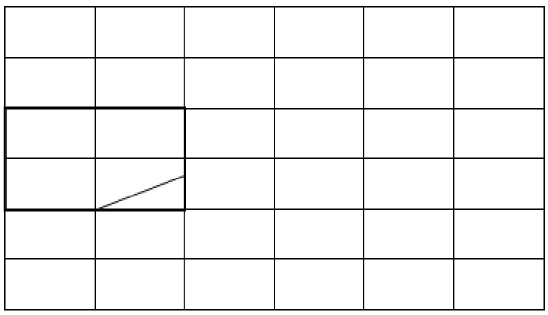


Рис. 4. Результативная таблица 2

Этот случай аналогичен первому. Первые два столбца символизируют первый ряд парт в классе, третий и четвертый столбец – символизируют второй ряд, пятый и шестой столбец – символизируют третий ряд. Ячейка показывает место за определенной партой определенного ряда. Аналогично отсекается уголок, как показано на рисунке, куда проставляются общие баллы. Баллы всех участников проставляются в соответствующих ячейках.

Если участников меньше четырех, то не заполняются те ячейки, которые символизируют пустые места за партами. Если команды сформированы по два участника, то рассматриваются блоки, состоящие не из четырех ячеек, а из двух. Заметим, что в таком случае пропадает необходимость сдвигать парты.

Такой подход способен индивидуализировать состязание для каждого участника и одновременно позволяет состязанию принимать командный характер.

Отличительной особенностью данного пути по сравнению с первым является то, что баллы проставляют в таблицу самостоятельно участники игры и в последующем обновляют их при помощи мокрой тряпки и мела в ходе игры. Это обстоятельство снимает с организатора функцию проставления баллов. Это дает возможность проводить данное мероприятие без привлечения посторонней помощи. Заметим, что ответы на задания должны составляться так, чтобы их можно было быстро проверить. Также, посредством наглядности и символичности таблицы, уменьшается вероятность проставить баллы в чужую ячейку. Кроме того, появляется элемент подвижности. Здесь уместно следующее замечание Е.А. Дышинского: «Учитывая, что внеклассные занятия по математике проводятся после уроков, естественно на них допускать элементы подвижности … но так, чтобы они не мешали сосредоточенной умственной работе» [5, с. 11].

Таким образом, второй путь выставления баллов участником видится более привлекательным для рассматриваемого состязания. Так рассмотренная выше форма проведения мероприятия удовлетворяет означенным целям мероприятия и методическим требованиям дидактической игры как форме внеклассного занятия.

Выводы второй главы

В данной главе, во-первых, исследованы пути реализации внеурочных занятий в старшей школе и высших учебных заведениях. Были сделаны следующие выводы: в старшей школе возможны два пути реализации проведения таких занятий, причем первый путь, это создание краткосрочного отдельного курса дополнительного образования, второй – интеграция содержания данных занятий в содержание уже имеющейся на базе конкретной школы системы кружковых занятий. В высших учебных заведениях ознакомление с теорией нестандартного анализа возможно в двух формах, первая форма – это проведение факультативного курса, вторая – чтение познавательных лекций. Во-вторых, проанализированы подходы А. Робинсона и М. Девиса к определениям базовых понятий теории нестандартного анализа для их внесения в содержание рассматриваемых занятий. На основе данного анализа были сделаны следующие выводы: подход М. Девиса непригоден для использования его в содержании рассматриваемых занятий в старшей школе, однако, на занятиях в высших учебных заведениях возможно упоминание о данном подходе и сравнение его с основным подходом А. Робинсона. Кроме того, исследованы временные рамки проведения рассматриваемых занятий в старшей школе. Были сделаны следующие выводы: оптимальным периодом проведения данных занятий может быть временной промежуток, начинающийся с середины второго полугодия 10 класса и заканчивающийся в конце учебного года; с учетом особенностей временного промежутка проведения дополнительных занятий, нецелесообразно вносить в их содержание понятие неопределенного интеграла, рассматриваемого в рамках нестандартной теории. Помимо этого, подверглось исследованию само содержание рассматриваемых занятий с методических позиций. В результате были сформированы группы занятий по принципу присвоения основного изучаемого понятия каждой группе. Получили следующие результаты: 1 группа – 2 вводных занятия; 2 группа – 3 занятия, посвященные изучению предела последовательности;

3 группа – 3 занятия, посвященные изучению предела функции; 4 группа – 3 занятия, посвященные изучению производной функции и 1 заключительное занятие. Далее на основе изучаемого содержания по каждой группе занятий были даны методические рекомендации, подчеркнута роль использования исторической литературы. Помимо этого, выделено следующее методическое замечание: изучение базовых понятий нестандартного математического анализа возможно лишь в условиях дополнительного образования, причем в содержании данных занятий существование нестандартных чисел преподносится в виде аксиомы, понятия стандартных и нестандартных чисел усваиваются на интуитивном уровне. Кроме того, одним из результатов данной главы следует считать методическую разработку внеклассного мероприятия, основанного на нестандартной теории математического анализа. Данная разработка является примером возможного внедрения идей, реализуемых в теории нестандартного анализа, во внеурочные занятия по математическому анализу. Для данного мероприятия была разработана специальная форма проведения, удовлетворяющая означенным целям мероприятия и методическим требованиям дидактической игры как форме внеклассного занятия. Кроме того, были даны методические рекомендации по составлению заданий, включаемых в содержание данного мероприятия. Выделены особенности данного мероприятия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной работы было разработано примерное теоретическое содержание для проведения внеурочных занятий по нестандартному анализу, исследована методика изучения базовых понятий нестандартного математического анализа в условиях дополнительного образования, реализован пример внедрения идей, осуществляющихся в теории нестандартного анализа, на внеурочных занятиях. Материалы данной работы были разбиты на две главы, в первой рассматривались основы теоретического содержания нестандартного математического анализа, во второй – особенности проведения дополнительных занятий по математическому анализу, основанных на нестандартной теории математического анализа, и исследование содержания данных занятий с методических позиций. Также представлена методическая разработка внеклассного мероприятия в игровой форме по теории нестандартного анализа.

Проведенное исследование подтвердило возможность разработки методики изучения базовых понятий нестандартного математического анализа в условиях дополнительного образования, актуальность использования вышеотмеченной методики и ее перспективность.

Таким образом, была достигнута цель данной выпускной работы, которая состояла в разработке методики изучения основных понятий нестандартного математического анализа в условиях дополнительного образования, и были выполнены все поставленные задачи:

1. Подобрано и проанализировано 19 научных и учебных источников, касающихся темы исследования. Среди них: публикация М. Девиса «Прикладной нестандартный анализ»; в данной книге приведена теория нестандартного анализа в строгом математическом виде и ее приложения; книга В.А. Успенского «Что такое нестандартный анализ?», которая постулирует необходимые факты, рассматривая суть нестандартного анализа; труд Л. Эй-

лера «Введение в анализ бесконечно малых», где автором методично рассмотрены идеи предельного перехода, которые в последующем были реализованы в теории нестандартного математического анализа, и др.

2. Рассмотрены поворотные моменты в истории анализа, положения и высказывания следующих классиков того времени: Г.В. Лейбница, И. Ньютона, Л. Эйлера, Ж. Даламбера, Л. Карно, Б. Больцано, О. Коши и К. Вейерштрасса.

3. Приведены основные понятия нестандартного математического анализа, такие как «бесконечно малое число», «бесконечно большое число», «конечное гипердействительное число», «стандартная часть конечного гипердействительного числа», «порядок бесконечно малого числа», «гипернатуральное число», «предел последовательности», «производная», «дифференциал» и др.

4. Приведены примеры вычисления предела числовой последовательности, производных и интегралов некоторых элементарных функций методами нестандартного анализа. В п. 1.2 вычислен следующий предел числовой последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}$. В Приложении 4 вычислены производные таких функций, как $y = x^n$, $y = \ln x$, $y = a^x$, и другие. В Приложении 6 вычислены интегралы функций $y = \sin x$, $y = \frac{x^5}{7} - \frac{x^6}{6}$, $y = x^k$ с соответствующими пределами интегрирования.

5. Рассмотрены рассуждения классика математического анализа Л. Эйлера при вычислении производных элементарных функций. Средствами нестандартного анализа данные рассуждения в Приложении 4 были приведены в вид, удовлетворяющий современным критериям строгости.

6. Выделены пути изучения базовых понятий нестандартного анализа на внеурочных занятиях по математическому анализу. Даны методические рекомендации к изучению основных понятий и составлению содержательной

части дополнительных занятий, основанных на нестандартной теории математического анализа.

7. Разработана форма проведения внеклассного мероприятия, основанного на идеях, которые реализует нестандартный математический анализ. Мероприятие предлагается проводить в специальной, состязательной форме. Данная форма проведения удовлетворяет познавательным целям мероприятия и методическим требованиям дидактической игры как форме внеклассного занятия. Разработаны примеры заданий, входящих в содержание математического мероприятия, основанного на идеях, которые реализует нестандартный математический анализ.

Перспективу продолжения исследования могут составить разработка и создание учебного пособия по нестандартному анализу, поурочные разработки для проведения занятий по данной теме в условиях дополнительного образования, разработка познавательных лекций, внеклассных мероприятий с игровыми формами их проведения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Альбеверио С.* Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике / С. Альбеверио, Й.Э. Фенстад, Р. Хеэг-Крон, Т. Линдстрем; пер. с англ. А.К. Звонкин. – М.: Мир, 1990. – 616 с.

2. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

3. *Гордон Е.И.* Инфинитезимальный анализ: избранные темы / Е.И. Гордон, А.Г. Кусраев, С.С. Кутателадзе. – М.: Наука, 2011. – 398 с.

4. *Дэвис М*. Прикладной нестандартный анализ / М. Дэвис; под ред. В.А. Успенского; пер. с англ. С.Ф. Сопруновой. – М.: Мир, 1980. – 236 с.

5. *Дышинский Е.А.* Игротека математического кружка / Е.А. Дышинский – М.: Просвещение, 1972. – 199 с.

6. *Кирусс А.* Основные понятия о нестандартном анализе /А. Кирусс. – М.: 2009. – 71 с.

7. *Кусраев А.Г.* Нестандартные методы анализа / А.Г. Кусраев; С.С. Кутателадзе. – Новосибирск: Наука, 1990. – 344 с.

8. *Кутателадзе С.С.* Нестандартному анализу 50 лет / С.С. Кутателадзе // Газета Сибирского отделения Российской академии наук «Наука в Сибири». – Новосибирск: Наука в Сибири, 2012 – № 11 – 8 с.

9. *Лазарь Карно* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых / А.П. Юшкевич – М.: ОНТИ, 1936. – 325 с.

10. *Лопиталь Г.Ф.* Анализ бесконечно малых / А.П. Юшкевич – М.: ГТТИ, 1935. – 430 с.

11. *Мордкович А.Г.* Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы. В 2 ч. Ч2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А.Г. Мордкович и др.; под ред. А.Г. Мордковича. – 14-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 271 с.

12. *Мордкович А.Г.* Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы. В 2 ч. Ч2. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А.Г. Мордкович – 14-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 400 с.

13. *Робинсон А.* Введение в теорию моделей и математику алгебры / А. Робинсон; под ред. А.Д. Тайманова; пер. с англ. А.Б. Волынского. – М.: Наука, 1967. – 376 с.

14. *Успенский В.А.* Нестандартный, или неархимедов, анализ / В.А. Успенский. – М.: Знание, 1983. – 64 с.

15. *Успенский В.А.* Что такое нестандартный анализ? / В.А. Успенский. – М.: Наука, 1987. – 128 с.

16. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для втузов: в 3 т. / Г.М. Фихтенгольц. – 9-е изд., стер. – Т. 1. – СПб.: «Лань», 2009. – 608 с.

17. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для втузов: в 3 т. / Г.М. Фихтенгольц. – 9-е изд., стер. – Т. 2. – СПб.: «Лань», 2009. – 608 с.

18. *Хрестоматия* по истории математики / сост. И.Г. Башмакова, Ю.А. Белый, С.С. Демидов и др.; под ред. А.П. Юшкевича. – Кн. 2. Математический анализ. Теория вероятностей. – М.: Просвещение, 1977. – 224 с.

19. *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечных / Л. Эйлер; пер с лат. Е.Л. Пацановского. – Т.1. – М.: Физматлит, 1961. – 314 с.

20. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление / Л. Эйлер; пер с лат. М.Я. Выгодского. – М.: Гостехиздат, 1949. – 580 с.

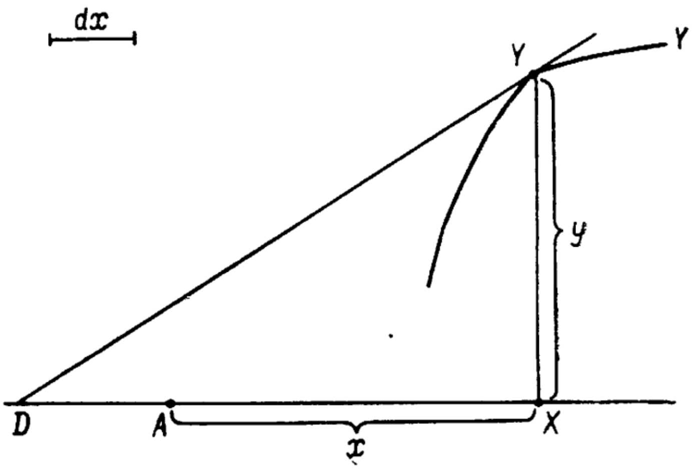
21. *Эйлер Л.* Интегральное исчисление / Л. Эйлер; пер с лат. М.Я. Выгодского. – М.: Гостехиздат, 1949. – 580 с.

22. Keisler H.J. Elementary Calculus / H.J. Keisler – Prindle: Weber & Schmidt, 1976.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

РАССМОТРЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ ИЗ СТАТЬИ Г.В. ЛЕЙБНИЦА «НОВЫЙ МЕТОД МАКСИМУМОВ…»

Г.В. Лейбниц дает следующее определение дифференциала. Рассматривая кривую YY и отрезок касательной, проведенной в фиксированной точке кривой Y, отвечающей выбранной координате X на оси AX, и обозначая D точку пересечения касательной с указанной осью, он пишет: «Назовем произвольно взятую прямую dx, а другой отрезок, относящийся к dx так же как… y …относится к XD назовем… dy или же разностью (differentia) …y…». К этому прилагается рисунок, существенные детали которого (с учетом письменных разъяснений Лейбница) воспроизводятся ниже.



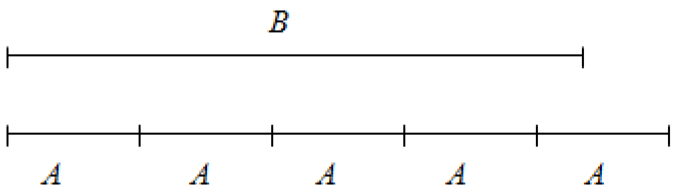
Итак, по Лейбницу для функции $x \to y(x)$ в точке x при произвольном dx мы имеем $dy := \frac{YX}{XD} dx$. Описание и обоснование изложенного им алгоритма дифференциального исчисления требует уточнения понятия касательной, в связи с чем он разъясняет: «…найти касательную – значит провести прямую, соединяющую две точки кривой, расстояние между которыми бесконечно мало, или же провести продолженную сторону бесконечноугольного многоугольника, который для нас равнозначен кривой» [7, с. 10-11]. Иначе говоря, Г.В. Лейбниц сводит свое исчисление к оперированию и обращению бесконечно малыми.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ОСОБЕННОСТИ РАСШИРЕНИЯ МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ДО МНОЖЕСТВА ГИПЕРДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Для возможности рассмотрения бесконечно малых необходимо расширение множества действительных чисел до некоторого большего множества, в которое будут входить помимо действительных чисел, числа бесконечно малые, отличные от нуля. И такое расширение возможно. Элементы данного нового множества называются гипердействительными числами.

Из определения бесконечно малого числа можно сделать вывод, что существование бесконечно малых противоречит аксиоме Архимеда. Геометрическая интерпретация аксиомы Архимеда выглядит следующим образом: для любых двух отрезков A и B можно отложить меньший из них столько раз, чтобы в сумме получить отрезок, превосходящий по длине больший отрезок. Если считать отрезок A меньшим, то иллюстрация данной аксиомы выглядит так, как показано на следующем рисунке:



[14, с. 10].

Сформулируем аксиому Архимеда для чисел: для любых чисел a и b, для которых $0 < a < b$, одно из неравенств $a + a > b$, $a + a + a > b$, … обязательно выполнено. Следовательно, во множестве действительных чисел, где эта аксиома выполняется, бесконечно малых нет: чтобы убедится в этом, достаточно взять $a = \varepsilon, b = 1$. Поэтому во множестве гипердействительных чисел аксиома Архимеда не выполняется, и существуют бесконечно малые числа, такие, что, сколько их не складывай с собой, сумма будет все время оставаться меньше единицы.

Таким образом, на множестве действительных чисел установлен архимедов порядок, что же касается множества гипердействительных чисел, то порядок на нем неархимедов.

Так же, как обычный (или стандартный) математический анализ занимается изучением множества действительных чисел, нестандартный математический анализ изучает множество гипердействительных чисел. Но при этом полученные результаты используются для исследования свойств действительных чисел. Таким образом, имеет смысл рассматривать свойства гипердействительных чисел.

Расширение множества действительных чисел до большего множества гипердействительных чисел необходимо сохраняет все полезные свойства действительных чисел. В частности, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$, где ${}^*\mathbb{R}$ – множество гипердействительных чисел.

Среди гипердействительных чисел должны быть выделены числа 0 и 1; должны быть заданы операции сложения $(x + y)$, умножения $(x \cdot y)$, взятия противоположного $(-x)$, а также операция взятия обратного $\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$. Таким образом, должны выполняться свойства:

(1) $a + b = b + a$;
(2) $a + (b + c) = (a + b) + c$;
(3) $a + 0 = a$;
(4) $a + (-a) = 0$;
(5) $a \cdot b = b \cdot a$;
(6) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
(7) $a \cdot 1 = a$;
(8) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
(9) $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ при $a \neq 0$.

Множество с операциями, обладающими этими свойствами, называется полем. Поэтому множество гипердействительных чисел должно быть полем.

Для любых двух различных гипердействительных чисел a и b определено, какое из них больше. Таким образом, должны выполняться следующие свойства:

(10) *если* $a > b, b > c,$ *то* $a > c$;

(11) *если* $a > b$, *то* $a + c > b + c$ *для любого* c;

(12) *если* $a > b, c > 0,$ *то* $a \cdot c > b \cdot c$;

если $a > b, c < 0,$ *то* $a \cdot c < b \cdot c$.

Поле, в котором введен порядок с такими свойствами, называется упорядоченным полем. Поэтому множество гипердействительных чисел является упорядоченным полем.

Среди гипердействительных чисел находятся все действительные. При этом операции и порядок на $\mathbb{R}$ и $^*\mathbb{R}$ согласованы – именно, если сумма двух действительных чисел x и y равна z, то сумма x и y, рассматриваемых как гипердействительные числа, так же должна быть равна z. Аналогично для других операций и порядков. Требования согласованности можно выразить так: упорядоченное поле $^*\mathbb{R}$ должно быть расширением упорядоченного поля $\mathbb{R}$ [15, с. 15].

Изучение нестандартного анализа, с точки зрения математики, сосредоточено в области метода идеальных элементов. Нестандартный анализ предполагает введение идеальных элементов, расположенных бесконечно близко к изучаемым объектам, а также бесконечно удаленных идеальных объектов. Таким образом, роль идеальных объектов выполняют бесконечно малые и большие числа.

Однако введение ненулевых бесконечно малых равносильно нарушению аксиомы Архимеда. Таким образом, упорядоченные поля, в которых справедлива аксиома Архимеда и нет бесконечно малых, называют архимедово упорядоченными. Те поля, в которых аксиома Архимеда неверна и есть бесконечно малые, называют неархимедово упорядоченными. Исходя из этого, система гипердействительных чисел должна быть неархимедово упорядоченным полем, являющимся расширением упорядоченного поля действительных чисел [15, с. 16].

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ПОДХОД М. ДЕВИСА К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРОИЗВОДНОЙ

В работе М. Девиса [4] теория нестандартного дифференциального исчисления подразумевает $df \sim \Delta f$, где обозначение ~ означает эквивалентность. Опираясь на такое определение дифференциала, рассмотрим подход к определению производной функции и покажем применение данного определения к вычислению производной некоторой функции.

Перед тем, как приводить определения производной, имеет смысл рассмотреть некоторые вводные понятия и доказательства некоторых теорем, с помощью которых М. Девис определяет понятие производной. Рассмотрение начнем с уже встречавшегося выше понятия эквивалентных функций.

Обозначим через $\mathbb{I}$ множество бесконечно малых элементов поля $^*\mathbb{R}$.

Определение. Пусть f, g отображают $\mathbb{I}$ в $\mathbb{I}$. Обозначим $f \sim g$ и назовем f и g эквивалентными, если для всех ненулевых $h \approx 0$ выполнимо $\dfrac{f(h)-g(h)}{h} \approx 0$ [4, с. 97].

Записав $\dfrac{f(h)-g(h)}{h} \approx 0$ в эквивалентном виде $f(h) = g(h) + \alpha \cdot h$, $\alpha \approx 0$, замечаем, что $\alpha \cdot h$ является бесконечно малым «более высокого порядка», чем h, исходя из того, что $\dfrac{(\alpha \cdot h)}{h} \approx 0$. Следовательно, $f \sim g$ означает, что $f(h) - g(h)$ бесконечно малое более высокого порядка, чем h.

Дадим определение локально линейной функции.

Определение. f называют локально линейной, если f отображает $\mathbb{I}$ в $\mathbb{I}$ и для всех $\alpha, \beta \approx 0$ справедливо равенство $f(\alpha\beta) = \alpha f(\beta)$ [4, с. 97].

На основе данного определения сформулируем и докажем следующие теоремы.

Теорема. Пусть f локально линейна. Тогда существует конечное $k \in {}^*\mathbb{R}$, такое, что $f(a) = k(a)$ для всех $\alpha \approx 0$.

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \approx 0$, $\alpha, \beta \neq 0$. Тогда $\frac{f(\beta)}{\beta} = \frac{\alpha f(\beta)}{\alpha\beta} = \frac{f(\alpha\beta)}{\alpha\beta} = \frac{\beta f(\alpha)}{\alpha\beta} = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$. Пусть k – постоянное значение $\frac{f(\alpha)}{\alpha}$ при $\alpha \approx 0$, $\alpha \neq 0$. Тогда $f(\alpha) = k\alpha$ для всех $\alpha \approx 0$. (При $\alpha = 0$ это равенство выполняется автоматически, так как $f(0) = 0$). Чтобы показать, что k конечно, предположим противное. Тогда $\frac{1}{k} \approx 0$ и $f(\frac{1}{k}) = k \cdot \frac{1}{k} = 1 \not\approx 0$, что противоречит тому, что f отображает $\mathbb{I}$ в $\mathbb{I}$. Теорема доказана [4, с. 98].

Теперь можем перейти к рассмотрению теоремы, на основе которой дадим определение дифференциала.

Теорема. Пусть $f_1(\alpha) = k_1\alpha$, $f_2(\alpha) = k_2\alpha$ – локально линейные функции. Тогда $f_1 \sim f_2$ тогда и только тогда, когда $k_1 \approx k_2$.

Доказательство. Имеем $\frac{f_1(\alpha) - f_2(\alpha)}{\alpha} = \frac{k_1\alpha - k_2\alpha}{\alpha} = k_1 - k_2$, так что левая часть есть бесконечно малое в том и только том случае, если правая часть – бесконечно малое. Теорема доказана [4, с. 98].

Теперь можем дать определение дифференциала.

Определение. Если $f(\alpha) = k\alpha$, где $k \in \mathbb{R}$, то f называется дифференциалом.

Из доказанных выше теорем можно вывести следствие и сформулировать его в виде теоремы. Так же добавим, что данная теорема применяется в задачах, требующих вычисления производной.

Теорема. Каждая локально линейная функция эквивалентна единственному дифференциалу [4, с. 98].

Далее будем использовать символы *dx*, *dt*, *dy* для переменных, принимающих бесконечно малые значения, которые в свое время были введены Г.В. Лейбницем.

Перейдем к рассмотрению следующего определения.

Определение. Пусть f – действительная функция, определенная в точке x_0. Функция $\Delta_{x_0} f$ определяется так: $\Delta_{x_0} f(dx) = f(x_0 + dx) - f(x_0)$.

Замечание. f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\Delta_{x_0} f$ отображает $\mathbb{I}$ *в* $\mathbb{I}$ [4, с. 98].

Приведем определение дифференцируемой функции в точке.

Определение. f дифференцируема в точке x_0, если $\Delta_{x_0} f$ эквивалентна некоторому дифференциалу.

Заметим, из доказанной выше теоремы, следует, что если f дифференцируема в точке x_0, то $\Delta_{x_0} f$ эквивалентна единственному дифференциалу $d_{x_0} f$ или просто df, называемому дифференциалом функции f (в точке x_0). Относительно последнего, для всех $dx \in \mathbb{I}$ получаем $d_{x_0} f(dx) = kdx$ для некоторого действительного k. На основе приведенного определим производную функции. Данное число k называется производной f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$ [4, с. 99].

Таким образом, получаем $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}$, т.е. производная равна отношению двух бесконечно малых.

Заметим, утверждение о том, что f дифференцируема в точке x_0 и имеет производную $f'(x_0)$, совпадает с тем, что $\Delta_{x_0} f(dx) \sim f'(x_0)dx$, т.е. $\dfrac{f(x_0 + dx) - f(x_0) - f'(x_0)dx}{dx} = \dfrac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} - f'(x_0) \approx 0$, для всех $dx \approx 0$, т.е., что $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$. Таким образом, получили стандартное определение производной.

Поясним, положение $\Delta_{x_0} f(dx) \sim f'(x_0)dx$ в других, «обычных» символах имеет вид $\Delta f \sim df$. Покажем применение приведенного выше определения производной, сравним и выделим отличия подходов к определению производной М. Девиса и А. Робинсона. Для этого вычислим производную функции $y = x^3$. Производная данной функции уже была вычислена в первой главе настоящей работы, основываясь на подходе А. Робинсона. Теперь сделаем тоже самое, но основываясь на методах подхода М. Девиса.

Придадим *x* бесконечно малое приращение *dx*. Это вызовет изменение значения функции на $\Delta y = (x + dx)^3 - x^3 = 3x^2 dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3$. Поскольку dx^3, dx^2 – бесконечно малые высшего порядка по сравнению с *dx* ($\frac{dx^2}{dx} = dx \approx 0$), то $\Delta y \sim 3x^2 dx$. Следовательно, $dy = 3x^2 dx$, $\frac{dy}{dx} = 3x^2$.

Из вышеизложенного ясно, каковы основные отличия в подходе к решению задач по вычислению производной некоторой функции методами М. Девиса.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

ПРОИЗВОДНЫЕ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрев основную теорию нестандартного анализа и различные подходы к определению производной, произведем вычисления производных некоторых элементарных функций по определениям, основанным на подходах А. Робинсона и М. Девиса. Иначе говоря, вычислим производные, применяя методы сначала первого подхода, затем второго. Так, на примерах вычисления производных разными подходами, мы покажем эквивалентность данных подходов, а также попробуем выявить, какой из них наиболее удобен при вычислении производных в отдельных случаях.

Вычисления производных будем производить на основе рассуждений классика математического анализа Л. Эйлера. Важно подчеркнуть, Л. Эйлер постоянно и эффективно применял инфинитезимальные методы в своих работах, вводя в оборот бесконечно большие и бесконечно малые числа. Однако данные рассуждения в настоящее время не являются строгими. Таким образом, вычисляя производные, основываясь на рассуждениях Л. Эйлера, мы в рамках теории нестандартного анализа приведем их в виде, удовлетворяющем современным критериям строгости.

Вычисление производной начнем с функции $y = x^n$. Сначала рассмотрим рассуждение Л. Эйлера, для этого приведем выдержку из [20]. «Так как дифференциал переменного количества *x* равен *dx*, то, переходя к ближайшему значению *x*, будем иметь $x^{\mathrm{I}} = x + dx$. Поэтому если *y* есть какая-либо функция *x*, то если в ней вместо *x* положить $x + dx$, она перейдет в y^{I} и разность $y^{\mathrm{I}} - y$ даст дифференциал *y*. Следовательно, если мы положим $y = x^n$, то будет $y^{\mathrm{I}} = (x + dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}dx^2 +$ и т.д., и, следовательно, $dy = y^{\mathrm{I}} - y = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}dx^2 +$ и т.д. В этом выражении второй член и все следующие исчезают по сравнению с первым, следовательно, дифференциал от x^n будет $nx^{n-1}dx$, т.е. $dx^n = nx^{n-1}dx$» [20, с. 115]. И производная в таком случае равна $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$.

Приведенное рассуждение не является строгим, поскольку Л. Эйлер не приводит строгого определения дифференциала в своей работе. Однако, в рамках теории нестандартного анализа, мы можем придать необходимую строгость данному рассуждению.

Рассматривая рассуждение на основе подхода А. Робинсона, определяем дифференциал как соответствующее приращение. Придадим аргументу x приращение dx, перейдя от точки x к точке $x+dx$. Выясним, насколько при этом изменилось значение функции. В точке x оно равнялось x^n. В точке $x+dx$ оно равняется $(x+dx)^n$. Таким образом, оно изменяется на $dy = (x+dx)^n - x^n$. Разложим $(x+dx)^n$ в ряд, получим: $dy = (x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}dx^2 + \ldots) - x^n = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}dx^2 + \ldots$ Заметим, если n является натуральным, то $(x+dx)^n$ разложится в полином по формуле бинома Ньютона. По определению производной получаем: $y' = st(\frac{dy}{dx}) = st\left(\frac{nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}dx^2 + \ldots}{dx}\right) =$

$st\left(\frac{dx\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}dx + \ldots\right)}{dx}\right) = st\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}dx + \ldots\right) = nx^{n-1}$. Таким образом, мы сделали данное рассуждение Л. Эйлера удовлетворяющим современным критериям строгости в рамках теории нестандартного анализа и подтвердили истинность его результатов. Теперь пересмотрим данное рассуждение с позиции подхода М. Девиса.

Дадим аргументу x бесконечно малое приращение dx. Тогда, $\Delta y = (x+dx)^n - x^n$. Разложим $(x+dx)^n$ в ряд, получим:

$\Delta y = (x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}dx^2 + \dots) - x^n = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}dx^2 + \dots$ Так как $(dx)^2$, $(dx)^3$, $(dx)^4$, $(dx)^5$, … – бесконечно малые высшего порядка по сравнению с dx, то $\Delta y \sim nx^{n-1}dx$. Следовательно, $dy = nx^{n-1}dx$, $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}dx$.

Из вышеизложенного явно прослеживаются различия в методах рассматриваемых подходов. Однако поскольку подходы эквивалентны, они приводят к одним и тем же результатам.

Подобно дифференцированию алгебраических функций не представляет труда дифференцирование трансцендентных функций. В качестве примера рассмотрим рассуждения Л. Эйлера о дифференцировании функции $y = \ln x$ [20, с. 132]. Сами рассуждения Л. Эйлера более приводить не будем, поскольку их можно посмотреть в [20], причем ссылки на страницы, где следует искать данные рассуждения по вычислению дифференциала, будут указываться рядом с рассматриваемой функцией. Здесь же покажем непосредственное применение теории нестандартного дифференциального исчисления к данным рассуждениям.

Возвращаясь к рассматриваемому примеру, добавим, его рассмотрение начнем с подхода А. Робинсона. Придадим аргументу x бесконечно малое приращение dx. Вычислим дифференциал данной функции: $dy = \ln(x+dx) - \ln x = \ln(1+\frac{dx}{x})$. Разложим $\ln(1+\frac{dx}{x})$ в ряд, получим:

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} + \dots .$$

По определению производной получаем:

$$y' = st(\frac{dy}{dx}) = st\left(\frac{\frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3}\dots}{dx}\right) = st\left(\frac{dx(\frac{1}{x} - \frac{dx}{2x^2} + \frac{dx^2}{3x^3}\dots)}{dx}\right) = st\left(\frac{1}{x} - \frac{dx}{2x^2} + \frac{dx^2}{3x^3}\dots\right) = \frac{1}{x}.$$

Рассмотрим данное рассуждение с позиций М. Девиса: дадим аргументу x бесконечно малое приращение dx. Тогда, $\Delta y = \ln(x+dx) - \ln x = \ln(1+\frac{dx}{x})$.

Разложим $\ln(1+\frac{dx}{x})$ в ряд, получим: $\Delta y=\frac{dx}{x}-\frac{dx^2}{2x^2}+\frac{dx^3}{3x^3}+...$ Поскольку $(dx)^2$, $(dx)^3$, $(dx)^4$, $(dx)^5$, … – бесконечно малые высшего порядка по сравнению с dx, то $\Delta y\sim\frac{dx}{x}$. Следовательно, $dy=\frac{dx}{x}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{dx}{x}\right)}{dx}=\frac{1}{x}$. Заметим, в рамках теории современного математического анализа при разложении функции в ряд мы прибегаем к понятию производной и производим разложение по формуле Тейлора. Здесь мы замечаем обратное, т.е. при вычислении производной мы производим разложение определенной функции в ряд. Данное обстоятельство объясняется тем, что Л. Эйлер из биноминального разложения И. Ньютона вывел всю теорию бесконечных рядов. Таким образом, Л. Эйлер, раскладывая функцию в ряд, не прибегал к понятию «производная», и наоборот, когда вычислял производную, прибегал к разложению определенной функции в ряд. И поскольку такое построение теории не лишено смысла, то так же не лишено смысла вычисление производной данными методами.

Перейдем к вычислению производной функции $y=a^x$ [20, с. 137]. Придадим аргументу x бесконечно малое приращение dx. Вычислим дифференциал данной функции: $dy=a^{(x+dx)}-a^x=a^x(a^{dx}-1)$. Разложим a^{dx} в ряд, получим: $dy=a^x\left[(1+dx\cdot\ln a+\frac{dx^2(\ln a)^2}{2}+...)-1\right]=a^x(dx\cdot\ln a+\frac{dx^2(\ln a)^2}{2}+...)$. По определению производной получаем: $y'=st(\frac{dy}{dx})=st\left(\frac{a^x(dx\cdot\ln a+\frac{dx^2(\ln a)^2}{2}+...)}{dx}\right)=$

$$st\left(\frac{a^x\cdot dx\cdot(\ln a+\frac{dx(\ln a)^2}{2}+...)}{dx}\right)=st\left(a^x(\ln a+\frac{dx(\ln a)^2}{2}+...)\right)=a^x\cdot\ln a.$$

Вычислим производную данной функции другим способом. Дадим аргументу x бесконечно малое приращение dx. Тогда, $\Delta y=a^{(x+dx)}-a^x=a^x(a^{dx}-1)$.

Разложим a^{dx} в ряд, получим: $\Delta y = a^x\left[(1 + dx\cdot\ln a + \frac{dx^2(\ln a)^2}{2} + ...) - 1\right] =$

$a^x(dx\cdot\ln a + \frac{dx^2(\ln a)^2}{2} + ...)$. Так как $\Delta y \sim a^x\cdot dx\cdot\ln a$, а следовательно, $dy = a^x\cdot dx\cdot\ln a$, $\frac{dy}{dx} = \frac{a^x\cdot dx\cdot\ln a}{dx} = a^x\cdot\ln a$.

Заметим, производная функции $y = a^x$ может быть найдена иначе. Прологарифмируем левую и правую части, будем иметь $\ln y = \ln a^x$; $\ln y = x\ln a$. Найдем дифференциалы левой и правой частей, имеем $\frac{dy}{y} = d(x\ln a)$; $\frac{dy}{y} = \ln a\cdot dx$. Тогда $dy = y\cdot\ln a\cdot dx$, но поскольку $y = a^x$, то $dy = a^x\cdot\ln a\cdot dx$. По определению производной получаем $\frac{dy}{dx} = \frac{a^x\cdot\ln a\cdot dx}{dx} = a^x\cdot\ln a$.

Покажем, каким образом может быть вычислена производная функции $y = \sin x$ [20, с. 145]. Имея приращение функции $dy = \sin(x + dx) - \sin x = \sin x\cdot\cos dx + \cos x\cdot\sin dx - \sin x$, разложим $\sin dx$ и $\cos dx$, дуги которых – бесконечно малые, в степенные ряды, получим:

$$dy = \sin x\cdot(1 - \frac{(dx)^2}{1\cdot 2} + \frac{(dx)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - ...) + \cos x\cdot(dx - \frac{(dx)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(dx)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5} - ...) - \sin x.$$

По определению производной находим:

$$y' = st\left(\frac{\sin x\cdot\left(1 - \frac{(dx)^2}{1\cdot 2} + \frac{(dx)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - ...\right) + \cos x\cdot\left(dx - \frac{(dx)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(dx)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5} - ...\right) - \sin x}{dx}\right) =$$

$$st\left(\cos x - \frac{dx\sin x}{1\cdot 2} + \frac{(dx)^3\cdot\sin x}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - ... - \frac{(dx)^2\cdot\cos x}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(dx)^4\cdot\cos x}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5} - ...\right) = \cos x.$$

Приведенное рассуждение может быть обосновано также с позиций М. Девиса. Дадим аргументу x бесконечно малое приращение dx. Тогда $\Delta y = \sin(x + dx) - \sin x = \sin x\cdot\cos dx + \cos x\cdot\sin dx - \sin x$. Разложим синус и косинус, дуги которых есть величины бесконечно малые, в степенные ряды, получим:

$$\Delta y=\sin x\cdot(1-\frac{(dx)^2}{1\cdot 2}+\frac{(dx)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-...)+\cos x\cdot(dx-\frac{(dx)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{(dx)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}-...)-\sin x=$$

$=dx\cos x+\sin x(-\frac{(dx)^2}{1\cdot 2}+\frac{(dx)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-...)+\cos x(-\frac{(dx)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{(dx)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}-...)$. Поскольку $\Delta y\sim dx\cos x$, то $dy=dx\cos x$, $\frac{dy}{dx}=\cos x$.

Подобным образом вычислим производную функции $y=\cos x$ [20, с. 146]. Имея приращение функции $dy=\cos(x+dx)-\cos x=\cos x\cos dx-\sin x\sin dx$, разложим синус и косинус дуги которых, есть величины бесконечно малые, в ряды, получим:

$$dy=\left[\cos x(1-\frac{(dx)^2}{1\cdot 2}+\frac{(dx)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-...)-\sin x(dx-\frac{(dx)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{(dx)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}-...)\right]-\cos x=$$

$-dx\sin x+\cos x(-\frac{(dx)^2}{1\cdot 2}+\frac{(dx)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-...)-\sin x(-\frac{(dx)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{(dx)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}-...)$. По определению производной находим:

$$y'=st\left(\frac{-dx\sin x+\cos x(-\frac{(dx)^2}{1\cdot 2}+\frac{(dx)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-...)-\sin x(-\frac{(dx)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{(dx)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}-...)}{dx}\right)=$$

$$st(-\sin x+\cos x(-\frac{dx}{1\cdot 2}+\frac{(dx)^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-...)-\sin x(-\frac{(dx)^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{(dx)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}-...))=-\sin x.$$

Рассмотрение с позиций подхода Девиса дает:

$\Delta y=-dx\sin x+\cos x(-\frac{(dx)^2}{1\cdot 2}+\frac{(dx)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-...)-\sin x(-\frac{(dx)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{(dx)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}-...)$. Поскольку $\Delta y\sim -dx\sin x$, то $dy=-dx\sin x$, $\frac{dy}{dx}=-\sin x$.

Рассмотрим пример дифференцирования обратной тригонометрической функции $y=\arcsin x$ [20, с. 140].

В данном случае получим, что x – синус дуги y, т.е. $x=\sin y$. Дадим аргументу x бесконечно малое приращение dx. Тогда получим $x+dx=\sin(y+dy)$; $x+dx=\sin y\cdot\cos dy+\cos y\cdot\sin dy$. Из вышеизложенного, в частности из дифференцирования синуса, ясно, что $\cos dy\sim 1$, $\sin dy\sim dy$. Тогда получаем: $x+dx=\sin y+dy\cdot\cos y$. Поскольку $\sin y=x$, то $\cos y=\sqrt{1-x^2}$. Имеем:

$x+dx=x+dy\cdot\sqrt{1-x^2}$; $dy=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Тогда по определению производной получаем: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Аналогичные рассуждения можно привести для $y=\arccos x$.

Вычислим производную функции $y=tgx$ [20, с. 146]. Имея приращение функции $dy=tg(x+dx)-tgx=\dfrac{tgx+tgdx}{1-tgx\cdot tgdx}-tgx=\dfrac{tgdx(1+tgx\cdot tgx)}{1-tgx\cdot tgdx}$, разложим $y=tgdx$ в ряд, получим: $dy=\dfrac{(dx+\frac{dx^3}{3}+\frac{2dx^5}{15}+...)(1+tg^2x)}{1-tgx\cdot(dx+\frac{dx^3}{3}+\frac{2dx^5}{15}+...)}$. По определению производной находим: $y'=st\left[\left(\dfrac{(dx+\frac{dx^3}{3}+\frac{2dx^5}{15}+...)(1+tg^2x)}{1-tgx\cdot(dx+\frac{dx^3}{3}+\frac{2dx^5}{15}+...)}\right):dx\right]=$

$$st\left(\frac{(1+\frac{dx^2}{3}+\frac{2dx^4}{15}+...)(1+tg^2x)}{1-tgx\cdot(dx+\frac{dx^3}{3}+\frac{2dx^5}{15}+...)}\right)=\frac{st[(1+\frac{dx^2}{3}+\frac{2dx^4}{15}+...)(1+tg^2x)]}{st[1-tgx\cdot(dx+\frac{dx^3}{3}+\frac{2dx^5}{15}+...)]}=\frac{1+tg^2x}{1}=$$

$\sec^2x=\dfrac{1}{\cos^2x}$.

Рассмотрим вычисление производной другим способом. Имея приращение функции $\Delta y=tg(x+dx)-tgx=\dfrac{tgx+tgdx}{1-tgx\cdot tgdx}-tgx=\dfrac{tgdx(1+tgx\cdot tgx)}{1-tgx\cdot tgdx}$, при разложении $y=tgdx$ в ряд, замечаем, что $tgdx\sim dx$ и $st(1-dx\cdot tgx)=1$. Получаем $\Delta y\sim dx(1+tgx\cdot tgx)$, $dy=dx(1-tg^2x)$. По определению производной получаем: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dx(1-tg^2x)}{dx}=1-tg^2x=\sec^2x=\dfrac{1}{\cos^2x}$. Подобным образом можно найти производную $y=ctgx$.

Приведенных вычислений производных некоторых элементарных функций, а также рассмотренных рассуждений Л. Эйлера по вычислению производных элементарных функций достаточно, чтобы сделать следующие выводы. Язык нестандартного математического анализа крайне удобен для убедительной трактовки рассуждений классиков математического анализа, кажущихся нестрогими, а также для приведения их к виду, удовлетворяющему современным критериям строгости в нестандартном анализе Приведенные примеры позволяют убедиться в эквивалентности подходов определения производной, рассмотренных ранее; и сделать некоторые замечания относительно данных подходов. А именно подход А. Робинсона, в котором дифференциал определяется как то, что в стандартном математическом анализе называется приращением функции, оказался удобным при рассмотрении и корректировке рассуждений классиков математического анализа, поскольку у последних дифференциал аналогично приравнивался к приращению функции. Однако здесь же кроется и отрицательная его сторона, поскольку ученые, в том числе и Л. Эйлер, рассуждения которого были рассмотрены в данном параграфе, в своих работах отбрасывали уже в дифференциале бесконечно малые более высокого порядка по сравнению с бесконечно малым приращением аргумента. В подходе А. Робинсона подобная операция делается только при взятии стандартной части. В подходе М. Девиса последняя ситуация близка к классическим рассуждениям, поскольку дифференциал эквивалентен приращению, таким образом при преобразовании приращения в дифференциал бесконечно малые более высокого порядка по сравнению с бесконечно малым приращением аргумента опускаются подобно тому, как это делали классики математики. Вследствие этого вычисления, выполненные на основе данного подхода, заметно короче.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О ПОНЯТИИ «ИНТЕГРАЛ»

Понятие об интеграле и его символ, введенный Лейбницем еще осенью 1675 г., появились в печати два года спустя после мемуара о новом методе в статье «De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum» (1686) [18, с. 119]. Однако, слова «интеграл» и «интегрирование» здесь еще не употребляются: вначале Г.В. Лейбниц говорил о сумме и суммировании, откуда и произошел знак интеграла, как первая буква в слове summa. Слово «интеграл» (от integer – целый) ввел И. Бернулли, и его приняли как Я. Бернулли, так и Г.В. Лейбниц [18, с. 119]. Таким образом, в исчислении бесконечно малых Г.В. Лейбница под понятием интеграла понималась сумма бесконечного числа бесконечно малых дифференциалов, т.е. как определенного интеграла, причем, прежде всего, интеграла с переменным верхним пределом [18, с. 115].

Более детальное обоснование представления интеграла, каким его понимал Г.В. Лейбниц, приводит Л. Эйлер. Он дает следующее определение интеграла с переменным верхним пределом: «Интегрирование обычно определяется так. Говорят, что это есть суммирование всех значений дифференциального выражения Xdx, если переменному x придавать последовательно все отличающиеся друг от друга на разность dx значения, начиная от некоторого данного значения вплоть до x; разность же эту нужно считать бесконечно малой. Таким образом, этот способ представления интегрирования подобен тому, согласно которому в геометрии линии мыслятся как совокупности бесчисленных точек. Подобно тому, как это последнее представление, если его правильно выразить, может быть допущено, так можно допустить и приведенное объяснение интегрирования, когда на помощь ему призваны, как это нами здесь сделано, истинные начала, чтобы можно было отразить всякие нападки. Из изложенного же метода во всяком случае ясно, что интегрирование можно получить из суммирования с любой точностью; точно же его нельзя совершить иначе, как положив, что разности являются бесконечно малыми, т.е. нулями» [21, с. 163].

Ввиду данных представлений понятия «интеграл», нестандартный анализ реализует рассмотренную выше идею на современной основе, а именно на базе своей теории дает удовлетворяющее всем критериям строгости в нестандартном анализе определение интеграла как суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ

Здесь приведем несколько примеров вычисления определенного интеграла некоторой функции по заданным пределам интегрирования непосредственно по его определению в рамках теории нестандартного интегрального исчисления.

Задание для вычисления возьмем из сборника задач по курсу математического анализа [2, с. 109]. В данном задании требуется непосредственно по стандартному определению вычислить интеграл $\int_a^b x^k dx$, где k – целое положительное число. Однако в рамках данной работы позволим себе изменить данное условие и вычислить этот интеграл по его нестандартному определению.

Для этого сначала вычислим интеграл $\int_0^a x^k dx \quad (a \neq 0)$. Разобьем промежуток $[0, a]$ на бесконечно большое количество N равных частей. Таким образом, каждый частичный промежуток получается бесконечно малым.

Тогда гиперконечная интегральная сумма имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{i}{N} \cdot a \right)^k \cdot \frac{a}{N} = a^{k+1} \cdot \frac{1^k + 2^k + \ldots + N^k}{N^{k+1}}.$$

По определению получаем:

$$\int_0^a x^k dx = st\left(\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{i}{N} \cdot a \right)^k \cdot \frac{a}{N} \right) = st\left(a^{k+1} \cdot \frac{1^k + 2^k + \ldots + N^k}{N^{k+1}} \right).$$ Преобразуем выражение, используя теорему Штольца.

Замечание. Поскольку теорема Штольца [16, с.67] доказана в курсе стандартного математического анализа, то она может быть доказанной на нестандартном языке. Поэтому мы в данном случае имеем право ее применить, однако стоит заметить, на языке нестандартного анализа изменится смысл трактовки теоремы, поскольку в стандартном анализе ключевым элементом данной теоремы является предел варианты, в нестандартном анализе этим элементом уже будет гипердействительное число. Имеем:

$$\int_0^a x^k dx = st\left(a^k \cdot \frac{N^k}{N^{k+1}-(N-1)^{k+1}}\right) = st\left(a^{k+1} \cdot \frac{N^k}{N^{k+1}-(N^{k+1}-(k+1)\cdot N^k+...)}\right) =$$

$$st\left(a^{k+1} \cdot \frac{\frac{N^k}{N^k}}{\frac{(k+1)\cdot N^k}{N^k} - \frac{k(k+1)N^{k-1}}{N^k} + ...}\right) = st\left(\frac{a^{k+1}}{k+1+\frac{k(k+1)}{2N}}\right) = \frac{a^{k+1}}{k+1}.$$

Аналогично вычислим $\int_0^b x^k dx = \frac{b^{k+1}}{k+1}$. Вычислим изначальный интеграл: $\int_a^b x^k dx = \int_0^b x^k dx - \int_0^a x^k dx = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$. Таким образом, мы смогли вычислить определенный интеграл непосредственно по его нестандартному определению.

2. Следующее задание для вычисления возьмем также из сборника задач по курсу математического анализа [2, с. 109]. Возьмем более конкретный интеграл, чтобы вычислив его, мы получили конкретное число. Помимо этого, возьмем такой интеграл, в вычислении которого нам поможет доказанное в предыдущем параграфе свойство.

Вычислим непосредственно по нестандартному определению следующий интеграл: $\int_0^1 \left(\frac{x^5}{7} - \frac{x^6}{6}\right) dx$.

Ввиду доказанного в предыдущем параграфе свойства определенного интеграла имеем: $\int_0^1 \left(\frac{x^5}{7} - \frac{x^6}{6}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^5}{7}\right) dx - \int_0^1 \left(\frac{x^6}{6}\right) dx$.

Сначала вычислим $\int_0^1 \left(\frac{x^5}{7}\right) dx$. Разобьем промежуток $[0,1]$ на бесконечно большое количество N равных частей. Тогда гиперконечная интегральная сумма имеет вид: $\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\left(\frac{i}{N}\right)^5}{7}\right) \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1^5+2^5+...+N^5}{N^6}$. Преобразуем выражение, используя теорему Штольца, и по определению интеграла получаем: $\int_0^1 \left(\frac{x^5}{7}\right) dx = st\left(\frac{1}{7}\cdot\frac{N^5}{6N^5-...}\right) = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{42}$.

Далее вычислим второе слагаемое $\int_0^1 \left(\frac{x^6}{6}\right) dx$. Разобьем промежуток $[0,1]$ на бесконечно большое количество N равных частей. Тогда гиперконечная интегральная сумма имеет вид: $\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\left(\frac{i}{N}\right)^6}{6}\right)\cdot\frac{1}{N} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1^6+2^6+...+N^6}{N^7}$. Преобразуем выражение, используя теорему Штольца, и по определению интеграла получаем: $\int_0^1 \left(\frac{x^6}{6}\right) dx = st\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{N^6}{7N^6-...}\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{42}$. Вычислим изначальный интеграл: $\int_0^1 \left(\frac{x^5}{7}-\frac{x^6}{6}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^5}{7}\right) dx - \int_0^1 \left(\frac{x^6}{6}\right) dx = \frac{1}{42}-\frac{1}{42} = 0$. Таким образом, мы смогли вычислить определенный интеграл непосредственно по его нестандартному определению.

3. Теперь возьмем пример вычисления интеграла по его стандартному определению, взятый из учебника «Курс дифференциального и интегрального исчисления» [17, с. 121], и представим данный пример в эквивалентном ему виде в рамках теории нестандартного анализа. Этим мы покажем эквивалентность стандартного и нестандартного определения интеграла.

Требуется вычислить непосредственно по определению интеграл $\int_a^b \sin x dx$.

Замечание. Вычисление данного интеграла стандартным способом здесь приводить не будем, поскольку с ним можно ознакомиться в источнике [17, с. 121]. Здесь приведем эквивалентное вычисление по нестандартному определению.

Разделим промежуток $[a,b]$ на бесконечно большое количество N равных частей. Положим $h=\frac{b-a}{N}$, значит h – по определению является бесконечно малой. Тогда гиперконечная интегральная сумма имеет вид: $h\cdot\sum_{i=1}^{N}\sin(a+ih)$. Найдем выражение для суммы справа. Умножив и разделив ее на $2\sin\frac{h}{2}$, а затем представляя все слагаемые в виде разности косинусов, получаем: $\sum_{i=1}^{N}\sin(a+ih)=\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{i=1}^{N}2\sin(a+ih)\sin\frac{h}{2}=$

$$\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{i=1}^{N}\left[\cos\left(a+i-\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(a+i+\frac{1}{2}h\right)\right]=\frac{\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(a+n+\frac{1}{2}h\right)}{2\sin\frac{h}{2}}=$$

$\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right]$. По определению интеграла получаем:

$$\int_a^b\sin xdx=st\left(\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right]\right)=st\left(\frac{\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right]\right)=$$
$$st\left(\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right)=\cos(a)-\cos(b).$$

Замечание. Поскольку синус бесконечно малой дуги равен самой этой дуге, то $\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}=1$. Так как прямой способ вычисления требует значительных усилий, им пользуются редко как в стандартном, так и нестандартном математическом анализе.

Приведенных вычислений достаточно, чтобы была на примерах продемонстрирована эквивалентность стандартного и нестандартного определений; показана суть вычисления определенного интеграла непосредственно по нестандартному определению и показаны методы нестандартного анализа в решении такого рода задач. Из приведенного ясно, каковы основные отличия вычисления определенного интеграла методами нестандартного анализа от классического интегрирования.