ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В курсе «Алгебра и теория чисел» вводятся и изучаются основные алгебраические структуры и их свойства. В зависимости от введенных на множествах матриц алгебраических операций и их свойств получаются различные алгебраические структуры. К ним относятся, в частности, аддитивные и мультипликативные матричные группы, решетки, кольца и др., рассмотренные нами в данной работе.

В настоящее время ряд сведений, относящихся к матричным структурам в курсе алгебры и теории чисел, предлагается студентам математического факультета ПГГПУ для самостоятельного изучения. Поэтому становится актуальным создание методических рекомендаций для обучающихся, изучающих данные вопросы самостоятельно.

Объект исследования: матричные алгебраические структуры.

Предмет исследования: методические аспекты изучения матричных алгебраических структур и его контроля.

Цель исследования – разработка методического сопровождения изучения студентами математического факультета ПГГПУ матричных алгебраических структур в курсе алгебры и теории чисел.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие *задачи*:

1) выполнить обзор литературы по теме исследования;

2) рассмотреть основные понятия теории матриц, теории групп, теории решеток, теории колец;

3) привести классификацию видов квадратных матриц и примеры на кольца матриц;

4) изобразить решетки в аддитивных и мультипликативных матричных группах;

5) разработать методическое сопровождение к рассматриваемым темам и контрольно-измерительные материалы для студентов-первокурсников математического факультета ПГГПУ, изучающих элементы теории матриц;

6) провести апробацию по разработанным контрольно-измерительным материалам в группе первокурсников;

7) проанализировать полученные результаты.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы, насчитывающего 30 наименований, имеет два приложения, 20 иллюстраций и одну таблицу.

Во введении представлены актуальность темы выпускной квалификационной работы, объект, предмет, цели и задачи исследования, краткая характеристика структуры работы.

В первой главе даны основные понятия теории матриц, сопровождающиеся исторической справкой, приведен алгоритм нахождения обратной матрицы. Также даны основные понятия теории групп. Рассмотрены виды квадратных матриц, аддитивные и мультипликативные группы квадратных матриц n-го порядка. В теории решеток разобраны две теоремы с доказательством, приведен пример изображения решетки в общем виде и решетки по данным видам матричных групп и их подгрупп. В теории колец матриц приведены примеры матриц особого вида. В каждом пункте приведены методические рекомендации и указания по изучению студентами рассматриваемых тем и определено, что они в результате должны знать и уметь.

Во второй главе приведена реализация методического сопровождения при помощи контрольно-измерительных материалов по теме «Матрицы» и результаты их апробирования, проведенного в 111 группе ПГГПУ.

В заключении подведены итоги проделанной работы.

Выпускная квалификационная работа насчитывает 60 страниц машинописного текста.

ГЛАВА I. МАТРИЧНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

В главе представлены основные понятия из теории матриц, теории групп и их подгрупп, теории решеток и колец матриц. К каждому из разделов приведена небольшая историческая справка.

1.1. Основные понятия теории матриц

В середине XIX в. впервые появилось понятие матрицы в работах Уильяма Гамильтона и Артура Кэли. Фундаментальные результаты в теории матриц принадлежат Карлу Вейерштрассу, Мари Жордану, Фердинанду Фробениусу.

Матрицы позволяют оперировать с массивами чисел, функций или символов и имеют широкие приложения не только в математике, но и в других отраслях знания, например, в физике, информатике, экономике и т.д. Матрицы позволяют решать системы обычных или дифференциальных уравнений, предсказывать значения физических величин в квантовой теории, шифровать сообщения в Интернете и многое другое.

Введем понятие матрицы. Матрицей A называется прямоугольная таблица размера $m\times n$, заполненная некоторыми математическими объектами.

Матрицу удобно представлять в виде:

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если $m=n$, то матрица называется *квадратной*, а число m, равное n, – ее порядком. В общем же случае матрица называется прямоугольной с размером $m\times n$. Объекты, составляющие матрицу, называются ее элементами. При обозначении элементов первый индекс всегда указывает на номер строки, а второй индекс – номер столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Употребляют и сокращенное обозначение матрицы:

$$\| a_{ik} \| \ (i = 1,2,\dots,m; k = 1,2,\dots,n) \ [6].$$

В квадратной матрице $A = \|a_{ij}\|$ элементы a_{ii} (i=1, 2, … , n) образуют главную диагональ и называются *диагональными* элементами. *Главная диагональ* проходит из левого верхнего угла матрицы в ее правый нижний угол. Совокупность элементов, расположенных на диагонали, проходящей из правого верхнего угла в левый нижний угол, называется *побочной* диагональю [26].

Две матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называются *равными*, если их соответственные элементы равны, т.е.

$$a_{ij} = b_{ij}, (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}).$$

Суммой двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица C, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B, т.е.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Для суммы матриц справедливы следующие свойства:

1. $A+B=B+A$ – коммутативность.
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ – ассоциативность.
3. $A+\Theta=A$ – свойство нулевой матрицы.
4. $A+(-A)=(-A)+A=\Theta$ – свойство противоположной матрицы.

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на число α из поля P называется матрица $B_{m\times n} = (b_{ij})$, элементы которой равны произведению соответствующих элементов матрицы A на число α, т.е.

$$b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}.$$

$\forall \alpha, \beta \in P, \forall A, B \in M_{m\times n}$ справедливы следующие свойства умножения матрицы на число:

1. $\alpha \cdot A = A \cdot \alpha$.
2. $1 \cdot A = A, 1 \in P$.

3. $0 \cdot A = \Theta, 0 \in P$.

4. $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$ – смешанная ассоциативность.

5. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$ – смешанная дистрибутивность.

6. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ – смешанная дистрибутивность.

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ размером $m \times k$ на матрицу $B=(b_{ij})$ размером $k \times n$ называется матрица C размера $m \times n$, элементы которой равны:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ik}b_{kj},\ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}).$$

Свойства произведения матриц:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ – ассоциативность.

2. $(\alpha \cdot A) \cdot B = \alpha \cdot (A \cdot B)$ – смешанная ассоциативность.

3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ – дистрибутивность.

4. $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$ – дистрибутивность.

Произведение двух матриц некоммутативно, т.е. в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$ [1].

1.1.1. Обратная матрица и алгоритм ее построения

Матрица A^{-1} называется *обратной* к квадратной матрице A, если

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E, \tag{1}$$

где E – единичная матрица порядка n .

Обратная матрица существует только для квадратных несингулярных матриц. Квадратная матрица называется *несингулярной*, если ее определитель не равен нулю. В качестве синонимов используются также термины *неособенная* или *невырожденная* матрица. Если же определитель равен нулю, то матрица называется *сингулярной* (или *особенной*, или *вырожденной*).

Покажем, что если матрица A невырожденная, то для нее существует обратная матрица, и построим ее.

Пусть дана матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ее определитель не равен нулю.

Составим матрицу из алгебраических дополнений элементов матрицы A:

$$A' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Транспонируя ее, получим так называемую присоединенную матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Найдем произведение $A\tilde{A}$:

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}A_{2j} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}A_{nj} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}A_{1j} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}A_{2j} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}A_{nj} \\ . & . & . & . \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}A_{1j} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}A_{2j} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}A_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} =$$

$$= |A| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = |A| \cdot E \Rightarrow A \cdot \tilde{A} = |A| \cdot E \Rightarrow E = A \cdot \left(\frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} \right) = A \cdot A^{-1}.$$

Делаем вывод:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}. \qquad (2)$$

Алгоритм построения обратной матрицы заключается в следующем:

1. Вычислить определитель матрицы A. Если определитель равен нулю, то обратной матрицы не существует.

2. Если определитель матрицы не равен нулю, то составить из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A матрицу A'.

3. Транспонируя матрицу A', получить присоединенную матрицу $\tilde{A}$.

4. По формуле (2) составить обратную матрицу A^{-1}.

5. По формуле (1) проверить вычисления [11].

Пример 1. Найти обратную матрицу матрице A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица A имеет две одинаковые строки, то определитель матрицы равен нулю. Следовательно, матрица является вырожденной, и для нее не существует обратной матрицы.

Пример 2. Найти обратную матрицу матрице A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

Определитель матрицы отличен от нуля, значит, обратная матрица существует. Составим матрицу алгебраических дополнений:

$$A' = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Транспонируя матрицу A', получим присоединенную матрицу $\tilde{A}$.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

По формуле (2) найдем обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность решений:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{1}{2} \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot \frac{1}{2} \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Следовательно, обратная матрица найдена верно.

1.1.2. Виды квадратных матриц

Изучив виды квадратных матриц, мы составили схему (рис. 1), в которой отразили их соподчинение.

Рис. 1. Виды квадратных матриц

Треугольной матрицей называется такая матрица, у которой все элементы, расположенные выше или ниже главной диагонали, равны нулю:

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix} \text{ или } B=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & 0 & \dots & 0\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & 0\\ . & . & . & .\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю. Такая матрица имеет следующий вид:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_{22} & \dots & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Единичной матрицей называется диагональная матрица, элементы главной диагонали которой равны единице. Такая матрица имеет вид:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется *скалярной*, если все ее элементы главной диагонали равны между собой, т.е. если $A=\lambda E$, где λ – число, а E – единичная матрица. Данная матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Нулевой матрицей называется матрица, содержащая только нулевые элементы и имеющая следующий вид:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ . & . & . \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Симметрической называют квадратную матрицу, элементы которой симметричны относительно главной диагонали. В общем виде симметрическая матрица третьего порядка имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}.$$

Кососимметрической называется квадратная матрица A над полем P характеристики, отличной от 2, удовлетворяющая соотношению:

$$A^T = -A,$$

где A^T – транспонированная матрица. Для $n\times n$ матрицы A это соотношение эквивалентно $a_{ij} = -a_{ji}$ для всех $i, j=1,2,\dots,n$, где a_{ij} – элемент i-ой строки и j-го столбца матрицы A.

Все элементы главной диагонали кососимметрической матрицы должны быть равны нулю, и сама матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица $A=(a_{ij})$ порядка n называется *ортогональной*, если $AA^T=E$, где E – единичная матрица, A^T – *транспонированная* матрица.

Квадратная матрица, элементами которой являются комплексные числа, и которая, будучи транспонирована, равна комплексно сопряженной, называется *эрмитовой* по имени великого французского математика Шарля Эрмита. Она равна комплексно сопряженной:

$$A = (\overline{A})^T .$$

Квадратная матрица I называется *инволютивной*, если $I^2=E$, где E – единичная матрица.

Квадратная матрица P называется *идемпотентной*, если $P^2=P$.

Квадратная матрица $A=(a_{ij})$ порядка n с вещественными или комплексными элементами называется *унитарной*, если $AA^*=E$, где E – единичная матрица, A^* – эрмитово сопряженная [11].

1.1.3. Методические рекомендации по изучению понятий теории матриц

Для изучения данной темы можно руководствоваться следующими рекомендациями:

1. Выполнить обзор материала по теме «Матрицы», где приводятся понятия матрицы, определителя матрицы, понятия вырожденной и невырожденной матриц, понятие транспонированной матрицы, обратной матрицы, алгоритм ее нахождения, понятия матричных уравнений, их виды.

2. Знать, как устанавливаются размеры матрицы и ее порядок.

3. Усвоить, что для существования обратной матрицы A^{-1} необходимо и достаточно, чтобы сама матрица A была невырожденной.

4. Внимательно изучить решения примеров на сложение, умножение квадратной матрицы на число, умножение квадратных матриц второго и более высоких порядков, нахождение определителя квадратных матриц второго и третьего порядка, решения примеров матричных уравнений второго и высшего порядка.

5. Уяснить, что матрицы бывают как квадратными, так и прямоугольными, и знать, как выполняются алгебраические операции над прямоугольными матрицами: умножение матрицы на число, сложение, умножение матриц, так как перемножать прямоугольные матрицы можно не во всех случаях.

6. Твердо усвоить формальное правило умножения и, связанное с ним, условие существования произведения AB матриц A и B: число столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B.

7. Решать сначала более простые примеры и задания, а затем постепенно переходить к сложным.

В результате изучения рассматриваемой темы студент должен:

– *знать* понятие матрицы, определителя матрицы, понятия вырожденной и невырожденной матриц, обратной матрицы, алгоритм ее нахождения, алгебраические операции над квадратными и прямоугольными матрицами, как устанавливаются размеры матрицы и ее порядок, понятия матричных уравнений и их видов;

– *уметь* находить обратную матрицу, вычислять определитель матрицы, выполнять алгебраические операции над квадратными и прямоугольными матрицами, выполнять транспонирование матриц, решать матричные уравнения второго и высшего порядка.

1.2. Основные понятия теории групп и их подгрупп

Теория групп имеет большую содержательную историю. Возникла она благодаря работам французского математика Эвариста Галуа. Огромный вклад в ее развитие внесли Огюстен Коши, Фердинанд Фробениус, Отто Шмидт, Александр Геннадьевич Курош, Николай Григорьевич Чеботарев и др.

К настоящему времени этот раздел математики превратился в широко развитую содержательную науку, занимающую одно из первых мест в современной алгебре. Многочисленность стоящих перед ней конкретных проблем, а также наличие направлений, по которым работа началась лишь в самое последнее время, позволяют считать, что теория групп еще далека от завершения.

К простому и окончательно решенному вопросу в случае конечных групп можно отнести теорию абелевых групп. В ней рассматривают матричные группы определенного вида и их подгруппы. В зависимости от введенных на множествах матриц алгебраических операций различают аддитивные и мультипликативные матричные группы.

Введем понятие группы. Множество G, в котором задана бинарная операция «$\circ$», сопоставляющая каждой упорядоченной паре элементов a, b из G некоторый элемент $a \circ b$ того же множества G, называют *группой*, если выполнены следующие свойства для операции $\circ$:

1. Ассоциативность операции:

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

для любых a, b, c из множества G.

2. Существование такого элемента $e \in G$ (нейтральный элемент), что

$$a \cdot e = a$$

и

$$e \cdot a = a$$

для любого $a \in G$.

3. Существование такого элемента $a' \in G$ (нейтрализующий или симметричный элемент), что

$$a \cdot a' = e$$

и

$$a' \cdot a = e$$

для любого $a \in G$.

4. Если, кроме того, для любых a, b из G справедливо соотношение

$$a \circ b = b \circ a,$$

то группу называют коммутативной (или абелевой) [15].

Аддитивной абелевой группой называется множество A с операцией сложения, обладающей следующими свойствами:

1. Выполнение равенства

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

для любых a, b, c из A.

2. Существование в A нулевого элемента 0 такого, что

$$a+0=a$$

для любого $a \in A$.

3. Существование такого элемента $-a \in A$ (противоположный элемент) для любого элемента $a \in A$, что

$$a+(-a)=0.$$

4. Выполнение равенства

$$a+b=b+a$$

для любых a, b из A.

Мультипликативной абелевой группой называется множество A с операцией умножения, обладающей следующими свойствами:

1. Выполнение равенства

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

для любых a, b, c из A.

2. Существование в A элемента e, называемого *единичным,* такого, что

$$a \cdot e = a$$

для любого a из A

3. Существование такого элемента a^{-1} из A, называемого *обратным* к a, что

$$a \cdot a^{-1} = e$$

для любого элемента a из A.

4. Выполнение равенства

$$a \cdot b = b \cdot a$$

для любых a, b из A.

Подмножество *B аддитивной абелевой группы A* называется *подгруппой*, если:

1. B замкнуто относительно сложения:

$$\forall a, b \in B \ \ (a+b) \in B.$$

2. B замкнуто относительно взятия противоположного элемента

$$\forall a \in B \Rightarrow -a \in B.$$

Подмножество *B мультипликативной абелевой группы A* называется *подгруппой*, если:

1. B замкнуто относительно умножения:

$$\forall a, b \in B \ \ a \cdot b \in B.$$

2. B замкнуто относительно взятия обратного элемента

$$a \in B \Rightarrow a^{-1} \in B.$$

Непустое подмножество H группы G называется ее *подгруппой*, если оно само является группой относительно операции $\circ$, заданной в G.

Теорема (критерий подгруппы). Непустое подмножество H группы G является подгруппой группы G тогда и только тогда, когда выполнимы следующие условия:

1. Если $a, b \in H$, то $a \circ b \in H$.
2. Если $a \in H$, то $a' \in H$ [15].

1.2.1. Аддитивные матричные группы и их подгруппы

Рассмотрим множество матриц n-го порядка с целыми числами.

$$Z^n = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in Z \right\}.$$

Покажем, что множество матриц данного вида есть группа относительно операции сложения.

1. Если сложить две квадратные матрицы n-го порядка из Z^n, то получится матрица n-го порядка, принадлежащая Z^n, так как сложение матриц сводится к сложению целых чисел. Следовательно, операция сложения на этом множестве определена.

2. Сложение квадратных матриц коммутативно, и таковым оно будет для множества квадратных матриц с целыми числами.

3. Сложение квадратных матриц ассоциативно, и таковым оно будет для множества квадратных матриц с целыми числами.

4. Существует такая нулевая матрица Θ, принадлежащая множеству Z^n, что для любой матрицы A из этого же множества выполняется равенство:

$$A+\Theta=\Theta+A=A.$$

5. Для любой матрицы n-го порядка с целыми числами существует противоположная матрица того же порядка такая, что

$$A+(-A)=\Theta.$$

6. Множество Z^n является группой. Так как в ней выполняется коммутативность сложения двух матриц из этого множества, то $< Z^n,+ >$ – абелева аддитивная группа [15].

Примеры аддитивных матричных групп:

1. Множество всех матриц $M_{n\times n}(P)$ – абелева аддитивная группа.

2. Множество эрмитовых $H(n)$ матриц n-го порядка – аддитивная группа.

3. Множество симметрических $S(n)$ матриц n-го порядка – аддитивная группа.

Рассмотрим подгруппы группы $Z_{(n)}$ и частный случай при n=2. Найдем подгруппы группы $Z_{(2)}$:

$$Z_{(2)}=\left\{A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, a_{ij}\in Z\right\}.$$

Данная группа является вместилищем очень интересных групп.

Подгруппы в аддитивных матричных группах обладают следующими свойствами:

– кратность;

– нулевой элемент.

Рассмотрим подробнее эти свойства.

Дано множество матриц $H_{(2)}$, содержащее матрицы, элементы которых кратны какому-либо одному натуральному числу *k*:

$$H_{(2)} = \left\{ H = \begin{pmatrix} k \cdot h_{11} & k \cdot h_{12} \\ k \cdot h_{21} & k \cdot h_{22} \end{pmatrix}, k \in N,\, h_{ij} \in Z \right\}.$$

Множество $H_{(2)}$ является подмножеством группы $Z_{(2)}$. Докажем, что $H_{(2)}$ – подгруппа группы по сложению.

Доказательство:

1. Для любых двух матриц множества $H_{(2)}$ матрица, которая является их суммой, будет также принадлежать множеству $H_{(2)}$:

$$\left(\forall A_1, A_2 \in H_{(2)}\right)\left(\exists \left(A_1 + A_2\right) \in H_{(2)}\right).$$

2. Для любой матрицы из множества $H_{(2)}$, противоположная ей матрица существует и также принадлежит множеству $H_{(2)}$:

$$\left(\forall A \in H_{(2)}\right)\left(\exists \left(-A_2\right) \in H_{(2)}\right),$$

где

$$A + (-A) = (-A) + A = \Theta,\ \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H_{(2)}.$$

Таким образом, $< H_{(2)}, + >$ является подгруппой группы $< Z_{(2)}, + >$.

Так как *k* может принимать любое значение из множества натуральных чисел, то группа $Z_{(2)}$ имеет бесконечное множество подгрупп описанного вида.

Теперь выделим множество матриц с целыми элементами, один из которых является нулем:

$$H_{(2)}\left(0_{11}\right) = \left\{ H = \begin{pmatrix} 0 & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix},\ h_{ij} \in Z \right\}.$$

Множество $H_{(2)}(0_{11})$ является подмножеством $Z_{(2)}$. Легко видеть, что

1. $(\forall A_1, A_2 \in H_{(2)})(\exists (A_1 + A_2) \in H_{(2)}(0_{11}))$.

2. $(\forall A \in H_{(2)}(0_{11}))(\exists (-A) \in H_{(2)}(0_{11}))$.

Т.е. выполняются утверждения теоремы о подгруппе. Таким образом, $< H_{(2)}(0_{11}), +>$ – подгруппа группы $<Z_{(2)},+>$.

Аналогично, множества $H_{(2)}(0_{11})$ – подгруппы группы $Z_{(2)}$, где

$$H_{(2)}(0_{12}) = \left\{ H = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, h_{ij} \in Z \right\},$$

$$H_{(2)}(0_{21}) = \left\{ H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}, h_{ij} \in Z \right\},$$

$$H_{(2)}(0_{22}) = \left\{ H = \begin{pmatrix} h_{12} & h_{12} \\ h_{21} & 0 \end{pmatrix}, h_{ij} \in Z \right\}.$$

Группа $<Z_{(2)},+>$ имеет четыре подгруппы описанного вида [15].

1.2.2. Мультипликативные матричные группы и их подгруппы

Рассмотрим $GL(n,R)$ – множество всех невырожденных матриц порядка n с действительными элементами.

$$GL(n,R) = \left\{ A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in R, |A| \neq 0 \right\}.$$

Покажем, что данное множество является мультипликативной группой:

1. Операция умножения выполнима и однозначна.

Пусть $A,B \in GL(n,R)$, тогда определители матриц A и B не равны нулю. По теореме об определителе произведения матриц получаем:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|,$$

где

$$|A \cdot B| \neq 0.$$

По определению множества $GL(n,R)$

$$A \cdot B \in GL(n, R).$$

2. Для матриц A, B $\in GL(n,R)$ не выполняется закон коммутативности умножения матриц на данном множестве:

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

3. Для матриц A, B, $C \in GL(n,R)$ выполняется закон ассоциативности умножения матриц на данном множестве:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

4. Существует единичная матрица E, принадлежащая множеству $GL(n,R)$. Ее определитель не равен нулю. Для этой матрицы выполняется равенство:

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

Как рассмотрено ранее, множество $GL(n,K)$ всех невырожденных матриц $n \times n$ над полем K является группой относительно умножения матриц. Также она называется *полной линейной группой*. Ее подгруппа $SL(n,K)$, состоящая из всех матриц с определителем 1, называется *специальной линейной группой*. Группа $SL(n,K)$ содержит подгруппу $T(n,K)$, состоящую из всех матриц с нулями под главной диагональю, и подгруппу $UT(n,K)$, состоящую из всех матриц с единицами на главной диагонали и нулями под ней. В этих случаях K может быть любым полем [11].

Надо сказать, что группа $GL(n,K)$ является вместилищем многих интересных подгрупп.

Множество всех ортогональных матриц $O(n,R)$ порядка n, т.е. таких матриц $A \in GL(n, R),$ что

$$A \cdot A^T = E$$

образует подгруппу в $GL(n, R)$, которая называется *ортогональной группой*.

Действительно, если $A, B \in O(n, R),$ то

$$A \cdot B \cdot (A \cdot B)^T = A \cdot (B \cdot B^T) \cdot A^E = A \cdot A^E = E.$$

Значит, $A \cdot B \in O(n, R).$ Далее, по определению

$$A^T = A^{-1},$$

поэтому, транспонируя обе части последнего равенства, получаем

$$A = (A^{-1})^T.$$

Следовательно,

$$A^{-1} \cdot (A^{-1})^T = A^{-1} \cdot A = E$$

и $A \in O(n, K)$.

Множество $SO(n, R)$ всех ортогональных матриц порядка n с определителем 1, очевидно, образует подгруппу в $O(n,R)$, которая называется *специальной ортогональной группой*.

Множество $U(n,C)$ всех унитарных матриц порядка n, т.е. таких матриц $A \in GL(n,C)$, что $A \cdot A^* = E$, образует подгруппу в $GL(n,C)$, которая называется *унитарной группой*. Множество $SU(n,C)$ всех унитарных матриц порядка n с определителем 1, очевидно, образует подгруппу в $U(n,C)$, которая называется *специальной унитарной группой* [16].

1.2.3. Методические рекомендации по изучению основных понятий теории матричных групп и их подгрупп

Для изучения данной темы можно дать следующие методические рекомендации:

1. Повторить сведения из теории матриц, виды квадратных матриц.
2. Выполнить обзор материала по теории групп, матричным группам и их подгруппам, изучить понятия аддитивных и мультипликативных матричных групп, понятия подгрупп в данных видах матричных групп.
3. Рассмотреть свойства понятия группы и ее подгруппы.
4. Усвоить, что аддитивные матричные группы – это группы относительно операции сложения, а мультипликативные матричные группы – это группы относительно операции умножения.
5. Овладеть аксиоматикой каждой из этих матричных групп.

6. Изучить достаточные условия подгрупп как аддитивных, так и мультипликативных матричных групп.

7. Рассмотреть примеры на аддитивные и мультипликативные матричные группы и их подгруппы.

В результате изучения данного раздела студент должен:

– *знать* понятия и свойства группы и ее подгруппы, понятия аддитивных и мультипликативных матричных групп и их подгрупп, различия этих матричных групп и их подгрупп;

– *уметь* различать аддитивные и мультипликативные матричные группы и их подгруппы, решать примеры на эти группы и их подгруппы.

1.3. Решетки групп

Теория решеток – одно из направлений алгебры, имеющее глубокие связи с различными областями математики. Основные направления этой теории стали развиваться в 30-50 г. прошлого столетия. Большую роль в теории решеток сыграли проблемы Гарретта Биркгофа – некоторые из них продолжают оставаться открытыми. В блестящей серии работ он продемонстрировал важность теории решеток и показал, что она является унифицирующим каркасом во многих математических дисциплинах.

В отечественной математике теория решеток связана с деятельностью Валерия Ивановича Гливенко. В дальнейшем большой вклад в теорию решеток внес А.Г. Курош.

Красота теории решеток отчасти объясняется исключительной простотой ее основных понятий: упорядочения, точной верхней и точной нижней граней. В этом отношении она очень напоминает теорию групп.

Множество S называется частично упорядоченным, если на S задано бинарное отношение σ, такое, что для некоторых упорядоченных пар $a, b \in S$ выполняется $a\ \sigma\, b$, причем это отношение должно быть:

1. Рефлексивным

$$(a\ \sigma\, a).$$

2. Транзитивным

$$((a\ \sigma\, b,\ b\ \sigma\, c) \Rightarrow a\ \sigma\, c).$$

3. Антисимметричным

$$((a\ \sigma\, b,\ b\ \sigma\, a) \Rightarrow a = b)$$

для всех $a, b, c \in S$.

Для обозначения бинарного отношения частичного порядка в дальнейшем будет использоваться символ $\leq$.

Частично упорядоченное множество S называется решеткой, если оно удовлетворяет двум условиям:

1°. Для всякой пары элементов $a, b \in S$ в S существует такой элемент

$$c = a \cap b,$$

называемый пересечением элементов a и b, что $c \leq a, c \leq b$, причем если некоторый элемент c' также обладает свойствами $c' \leq a, c' \leq b$, то $c' \leq c$. Здесь c – *точная нижняя грань* элементов a и b.

2°. Для всякой пары элементов $a, b \in S$ в S существует такой элемент

$$d = a \cup b,$$

называемый объединением элементов a и b, что $a \leq d, b \leq d$, причем если некоторый элемент d' также обладает свойствами $a \leq d', b \leq d'$, то $d \leq d'$.Здесь d – *точная верхняя грань* элементов a и b.

Из этого определения следует, что и пересечение $a \cap b$ и объединение $a \cup b$ элементов a и b определены в решетке S однозначно.

Теорема 1. Множество S с двумя бинарными операциями $a \cap b$ и $a \cup b$ определяет решетку тогда и только тогда, когда эти операции удовлетворяют следующим условиям:

1. $a \cap a = a$ $(a \cup a = a)$;
2. $a \cap b = b \cap a$ $(a \cup b = b \cup a)$;

3. $(a\cap b)\cap c = a\cap(b\cap c)$ $((a\cup b)\cup c = a\cup(b\cup c))$;

4. $a\cap(a\cup b) = a$ $(a\cup(a\cap b) = a)$.

Доказательство:

1. *Необходимость.*

Даны условия 1° и 2°. Выполнение условий 1 и 2 очевидны. Докажем условие 3, например, для пересечения. По условию 1° имеем:

$$(1)\ (a\cap b)\cap c \le a\cap b \le a;$$

$$(2)\ (a\cap b)\cap c \le a\cap b \le b;$$

$$(3)\ (a\cap b)\cap c \le c;$$

$$(4)\ (a\cap b)\cap c \le b\cap c.$$

Из (1) и (4) следует

$$(a\cap b)\cap c \le a\cap(b\cap c),$$

аналогично

$$(a\cap b)\cap c \le (a\cap b)\cap c.$$

Следовательно, условие 3 имеет место.

Проверим условие 4. Ввиду условия 1° имеем

$$(*)\ \ a\cap(a\cup b) \le a.$$

Кроме того, $a \le a$ и, по условию 2°, $a \le a\cup b$. Отсюда, по условию 1°, следует

$$(**)\ \ a \le a\cap(a\cup b).$$

Сравнивая (*) и (**), получаем условие 4.

2. *Достаточность.*

Пусть дано множество S с двумя бинарными операциями, обладающими свойствами 1, 2, 3, 4.

Введем во множество S частичную упорядоченность. Если $a, b \in S$, то

$$a\cap b = a,$$
$$a\cup b = b$$

одновременно выполняются или не выполняются.

Действительно, если $a\cap b = a$, то по условиям 4 и 2

$$a \cup b = (a \cap b) \cup b = b .$$

Если же $a \cup b = b$, то

$$a \cap b = a \cap (a \cup b) = a .$$

Положим

$$(a \le b) \Leftrightarrow (a \cap b = a \Leftrightarrow a \cup b = b) .$$

Этим во множество S введена частичная упорядоченность. Действительно, рефлексивность выполняется ввиду условия 1, т.е. $a \le a$.

Далее, если $a \le b$ и $b \le c$, т.е. $a \cap b = a$, $b \cap c = b$, то в силу условия 3

$$a \cap c = (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b = a,$$

т.е. $a \le c$, т.е. транзитивность выполняется.

Если $a \le b$ и $b \le a$, т.е.

$$a \cap b = a , \ b \cap a = b ,$$

то ввиду условия 2, $a = b$, т.е. антисимметричность выполняется. Введенное отношение $\le$ действительно является частичным порядком.

Покажем выполнимость 1°.

Из

$$(a \cap b) \cap a = a \cap (a \cap b) = (a \cap a) \cap b = a \cap b$$

следует

$$a \cap b \le a .$$

Аналогично,

$$a \cap b \le b .$$

Если в S взят произвольный элемент c', удовлетворяющий условиям $c' \le a, c' \le b$, т.е.

$$c' \cap b = c', c' \cap b = c' ,$$

то

$$c' \cap (a \cap b) = (c' \cap a) \cap b = c' \cap b = c' \Rightarrow c' \le a \cap b .$$

Следовательно, элемент $a \cap b$ является точной нижней гранью элементов a и b в смысле условия 1°.

Аналогично доказывается, что $a \cup b$ будет точной верхней гранью элементов a и b в смысле условия 2°.

Теорема 2. Множество всех подгрупп произвольной группы образует решетку.

Доказательство:

Пусть G – произвольная группа, M – множество всех ее подгрупп, M – непустое множество, так как $\{e\} \in M$.

Рассмотрим отношение включения на этом множестве.

$<M, \subset>$ – это частично упорядоченное множество. Под точной верхней гранью двух подгрупп понимают объединение этих подгрупп.

Теоретико-групповым объединением двух подгрупп G_1 и G_2 называется наименьшая из подгрупп группы G, включающая в себя как G_1, так и G_2 [16].

Установив частичный порядок на множестве всех подгрупп произвольной группы, можно доказать, что оно образует решетку. Соотношение подгрупп в группе допускает его наглядное изображение в виде схемы, устанавливающей связи подгрупп, которую можно назвать «решеткой» группы. В ней все подгруппы изображаются точками. Причем, если A подгруппа B и между ними нет подгрупп, то точка A изображается ниже B, и эти точки соединяются отрезком (рис. 2).

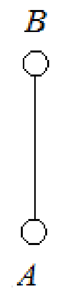

Рис. 2. Общий вид изображения решетки групп

1.3.1. Решетка в аддитивных матричных группах

Изучая виды квадратных матриц и аддитивные матричные группы в своих предыдущих исследованиях, мне удалось составить и изобразить следующую решетку (рис. 3).

Самой верхней точкой решетки является множество всех квадратных матриц над полем действительных чисел $A(n,R)$. Оно включает в себя такие множества как:

– множество $ID(n,R)$ – множество *идемпотентных* матриц;

– множество $IN(n,R)$ – множество *инволютивных* матриц;

– множество $NUL(n,R)$ – множество, состоящее из одной матрицы – *нулевой*;

– множество $P(n,R)$ – множество *перестановочных* матриц;

– множество $SIM(n,R)$ – множество *симметричных* матриц;

– множество $ORT(n,R)$ – множество ортогональных матриц.

Подгруппой множества $NUL(n,R)$ будет множество $D(n,R)$ – множество диагональных матриц. Ее подгруппой будет множество $SK(n,R)$ – множество *скалярных* матриц. Подгруппой множества скалярных матриц будет множество $E(n,R)$ – множество, состоящее из одной *единичной* матрицы.

Множества $SIM(n,R)$ и $ID(n,R)$ включает в себя множество $E(n,R)$, $SK(n,R)$ и $D(n,R)$.

Множества $IN(n,R)$, $ORT(n,R)$ и $P(n,R)$ содержат в себе множество $E(n,R)$. В свою очередь множество $ORT(n,R)$ является подгруппой множества $P(n,R)$.

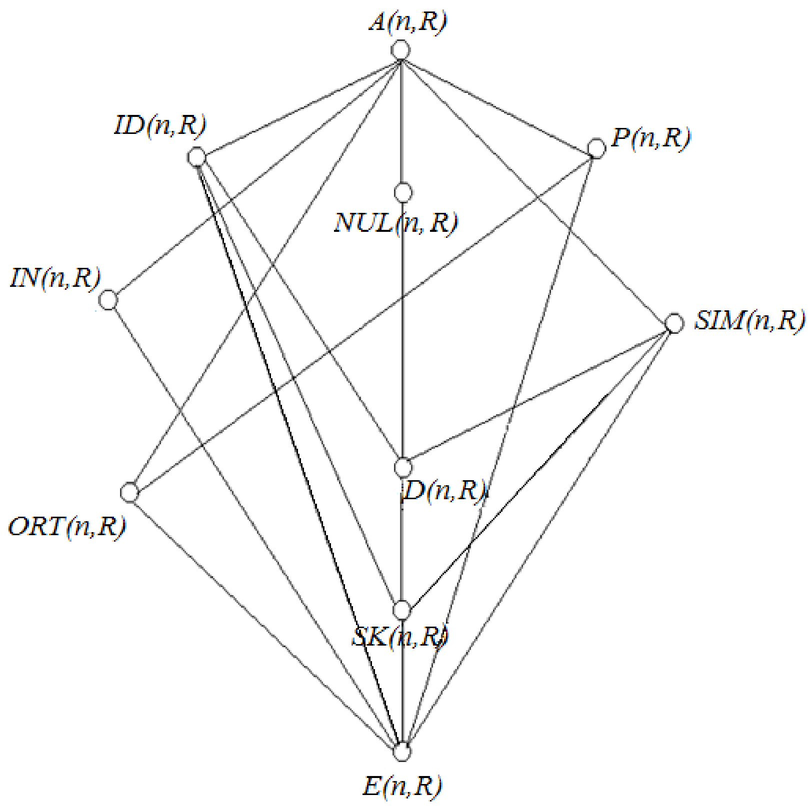

Рис.3. Решетка в аддитивных матричных группах

1.3.2. Решетки в мультипликативных матричных группах

В мультипликативных матричных группах над любым полем *К* подгруппы можно расположить следующим образом (рис. 4).

Самой верхней точкой решетки будет множество *GL*(*n*,*К*) – множество всех невырожденных матриц $n \times n$ над полем *К.* Ниже будет располагаться ее подгруппа *SL*(*n*,*К*), состоящая из всех матриц с определителем равным единице. Под ней будут располагаться подгруппы группы *SL*(*n*,*К*). Это подгруппа *T*(*n*,*К*), состоящая из всех матриц с нулями под главной диагональю, и подгруппа *UT*(*n*,*К*), состоящая из всех матриц с единицами на главной диагонали и нулями под ней. Это и будут конечные точки данной решетки.

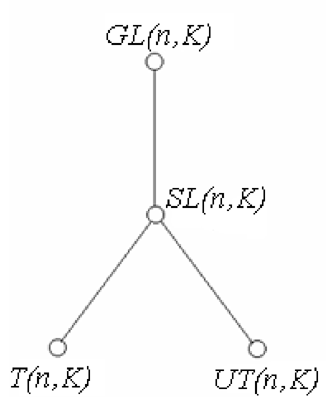

Рис.4. Решетка в мультипликативных матричных группах над полем K
с подгруппой матриц $SL(n,K)$

Также можно составить еще одну решетку матричных групп и их подгрупп над данным полем (рис. 5).

Самой верхней точкой будет множество $GL(n,K)$. Ниже будет располагаться ее подгруппа $D(n,K)$ – диагональная группа, состоящая из всех диагональных матриц порядка n. Это и будет конечной точкой.

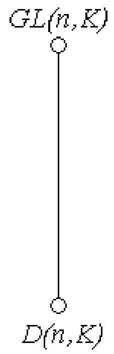

Рис. 5. Решетка в мультипликативных матричных группах над полем K
с подгруппой матриц $D(n,K)$

Над полем действительных чисел в полной линейной группе GL порядка n решетка ее подгрупп будет выглядеть следующим образом (рис. 6).

Самой верхней точкой будет уже известное нам множество $GL(n,R)$. Ниже нее будет располагаться множество всех *ортогональных* матриц $O(n,R)$, которое образует подгруппу в $GL(n,R)$.

И самой нижней точкой будет множество $SO(n,R)$ – множество всех ортогональных матриц порядка n с определителем равным единице, образующее подгруппу в $O(n,R)$.

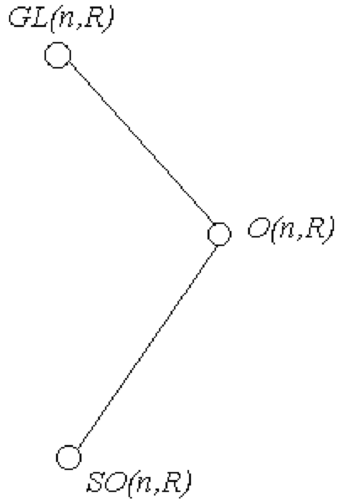

Рис.6. Решетка в мультипликативных матричных группах над полем *R*

Рассмотрим еще одну решетку, но уже над полем комплексных чисел (рис. 7).

Самой верхней точкой решетки будет множество $GL(n,C)$. Ниже этого множества будет располагаться множество *унитарных* матриц $U(n,C)$. Его подгруппой является множество $SU(n, C)$ – множество унитарных матриц с определителем, равным единице.

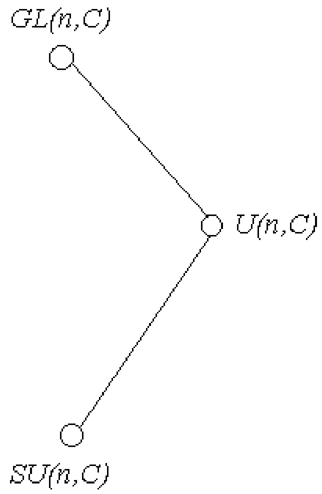

Рис. 7. Решетка в мультипликативных матричных группах над полем *C*

1.3.3. Методические рекомендации по изучению основных понятий теории решеток матричных групп

Для самостоятельного изучения данного раздела можно порекомендовать следующее:

1. Повторить сведения из теории матриц, матричных групп и их подгрупп.
2. Выполнить обзор литературы по теории решеток.
3. Овладеть понятием частично упорядоченного множества и его свойствами.
4. Изучить условия, позволяющие называть частично упорядоченное множество решеткой.
5. Усвоить бинарные операции, определяющие решетку, и их свойства.
6. Уяснить, что множество всех подгрупп произвольной группы образует решетку.
7. Внимательно разобрать изображение решетки и запомнить, что подгруппы изображаются ниже групп.
8. Рассмотреть примеры на составление решеток в аддитивных и мультипликативных матричных группах.

После изучения данного раздела студент должен:

– *знать* понятие частично упорядоченного множества, условия, когда частично упорядоченное множество можно называть решеткой, как составляется решетка в аддитивных и мультипликативных матричных группах и их подгруппах;

– *уметь* распознавать частично упорядоченное множество, условия для существования решетки, изображать решетки в аддитивных и мультипликативных матричных группах и их подгруппах.

1.4. Кольца

В отличие от групп, *кольца* – это алгебраические структуры с двумя бинарными операциями, называемыми сложением и умножением.

Кольцом называется непустое множество K с операциями сложения и умножения, обладающими следующими свойствами:

1. Относительно сложения K есть абелева группа (называемая аддитивной группой кольца K).
2. Относительно умножения K – полугруппа.
3. $a(b+c)=ab+ac$ и $(a+b)c=ac+bc$ для любых $a,b,c\in K$ (дистрибутивность умножения относительно сложения) [2].

1.4.1. Матричные кольца

Из свойств сложения и умножения матриц, а именно ассоциативности и коммутативности сложения, ассоциативности умножения, дистрибутивности умножения относительно сложения, существования нулевой и противоположной по сложению матрицы, следует, что квадратные матрицы размера $n \times n$ с элементами из любого кольца R образуют кольцо. Это кольцо обозначается $M(n, R)$.

Рассмотрим множество квадратных матриц 2-го порядка $<M_{2\times2}, +, \cdot>$. Оно является кольцом. В этом кольце выделим подмножество матриц *вида*:

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

1. Проверим, является ли $<M_{2\times2}, +>$ – абелевой группой (группой, коммутативной по сложению):

$$A+B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix},$$

$$B+A=\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c+a & 0 \\ 0 & d+b \end{pmatrix}.$$

Получается, что $<M_{2\times 2}, +>$ является абелевой группой.

2. Это множество относительно операции умножения является полугруппой, так как при изучении операций над матрицами доказывается ассоциативность их умножения.

3. Умножение матриц дистрибутивно относительно сложения слева (справа).

Можно выделить подмножество квадратных матриц 2-го порядка особого вида. Проверив свойства операций сложения и умножения, показать, что это подмножество само образует кольцо. Обозначим это кольцо $<MO_{2\times 2}, +, \cdot>$.

Например, рассмотрим матрицы вида:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} c & d \\ 3d & c \end{pmatrix}.$$

1. Коммутативность операции сложения выполняется, так как сложение матриц всегда коммутативно:

$$A+B=\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ 3d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 3b+3d & a+c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 3(b+d) & a+c \end{pmatrix},$$

$$B+A=\begin{pmatrix} c & d \\ 3d & c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c+a & d+b \\ 3d+3b & c+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c+a & d+b \\ 3(d+b) & c+a \end{pmatrix}.$$

Интереснее проверить коммутативность операции умножения матриц:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c & d \\ 3d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac+3bd & ad+bc \\ 3bc+3ad & 3bd+ac \end{pmatrix},$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} c & d \\ 3d & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ca+3db & cb+da \\ 3da+3cb & 3db+ca \end{pmatrix}.$$

2. Ассоциативность умножения матриц также выполняется.

Для доказательства возьмем из этого же множества матрицу

$$C=\begin{pmatrix} k & l \\ 3l & k \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A\cdot(B\cdot C)=\begin{pmatrix} a & b\\ 3b & a\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} c & d\\ 3d & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} k & l\\ 3l & k\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} a & b\\ 3b & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} ck+3dl & cl+dk\\ 3dk+3cl & 3dl+ck\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} ack+3dla+3dkb+3clb & acl+adk+3dlb+bck\\ 3bck+9dlb+3adk+3acl & 3bcl+3bdk+3adl+ack\end{pmatrix}$$

и

$$(A\cdot B)\cdot C=\left(\begin{pmatrix} a & b\\ 3b & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c & d\\ 3d & c\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} k & l\\ 3l & k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac+3bd & ad+bc\\ 3bc+3ad & 3bd+ac\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} k & l\\ 3l & k\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} ack+3bdk+3adl+3bcl & acl+3bdl+adk+bck\\ 3bck+3adk+9bdl+3acl & 3bcl+3adl+3bdk+ack\end{pmatrix}.$$

3. Также будут выполняться левый и правый законы дистрибутивности умножения относительно сложения:

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C,$$
$$\begin{pmatrix} a & b\\ 3b & a\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} c & d\\ 3d & c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} k & l\\ 3l & k\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} a & b\\ 3b & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c & d\\ 3d & c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b\\ 3b & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} k & l\\ 3l & k\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a & b\\ 3b & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c+k & d+l\\ 3d+3l & c+k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac+3bd & ad+bc\\ 3bc+3ad & 3bd+ac\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ak+3bl & al+bk\\ 3bk+3al & 3bl+ak\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} ac+ak+3bd+3bl & ad+al+bc+bk\\ 3bc+3bk+3ad+3al & 3bd+3bl+ac+ak\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac+3bd+ak+3bl & ad+bc+al+bk\\ 3bc+3ad+3bk+3al & 3bd+ac+3bl+ak\end{pmatrix}.$$

Для этого кольца интересно выделить группу обратимых элементов.

Рассмотрим матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ 3b & a\end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен

$$\Delta=|A|=a^2-3b^2.$$

Обратной матрицей к матрице A будет матрица

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2-3b^2} & \dfrac{-b}{a^2-3b^2}\\ \dfrac{-3b}{a^2-3b^2} & \dfrac{a}{a^2-3b^2}\end{pmatrix}.$$

Матрица A будет обратимой, если элементы матрицы A^{-1} будут целыми числами. Очевидно, что обратимыми будут следующие матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

и др.

Существуют и другие кольца, элементами которых являются другие матрицы особого вида.

1.4.2. Методические рекомендации по изучению основных понятий матричных колец

Для самостоятельного изучения данного раздела можно дать следующие рекомендации:

1. Выполнить обзор литературы по кольцам.
2. Повторить сведения из теории матриц, матричных групп, их подгрупп и теории матричных решеток.
3. Внимательно разобрать свойства сложения и умножения матриц, а именно ассоциативности и коммутативности сложения, ассоциативности умножения, дистрибутивности умножения относительно сложения, существования нулевой и противоположной по сложению матрицы, из которых следует, что квадратные матрицы размера $n \times n$ с элементами из любого кольца R образуют кольцо.
4. Рассмотреть примеры на кольца матриц.

После изучения данного раздела студент должен:

– *знать* понятие кольца матриц, его свойства;

– *уметь* решать примеры на кольца матриц.

В главе даны основные понятия теории матриц. Разобран алгоритм построения обратной матрицы. Приведена схема видов квадратных матриц. Также даны основные понятия теории групп и теории решеток. В теории групп рассмотрены аддитивные и мультипликативные матричные группы и их подгруппы, к которым приведены примеры. В теории решеток разобраны две теоремы с доказательством, изображены решетки в аддитивных и мультипликативных матричных группах. К каждому разделу прописано методическое сопровождение по его изучению и определено, что студенты в результате должны знать и уметь.

ГЛАВА II. РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДИЧЕСКИХ РЕКОМЕНДАЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ РАЗДЕЛА «МАТРИЦЫ»

На кафедре высшей математики ПГГПУ в 111 группе была проведена апробация научного исследования по разделу «Матрицы». Формами проведения апробации были тест и зачетная работа.

Апробация и результаты ее проведения представлены в данной главе.

2.1. Тест «Матрицы»

Первым этапом для апробации результатов научного исследования был тест по теме «Матрицы». Данный тест проводился среди студентов первого курса ПГГПУ дистанционно.

2.1.1. Описание теста

Тест состоял из 30 заданий (прил. 1). Он был создан и выложен в курсе «Алгебра и теория чисел. 1 курс», который находится на сайте университета ПГГПУ в системе электронной поддержки образовательных курсов Moodle (рис. 8).

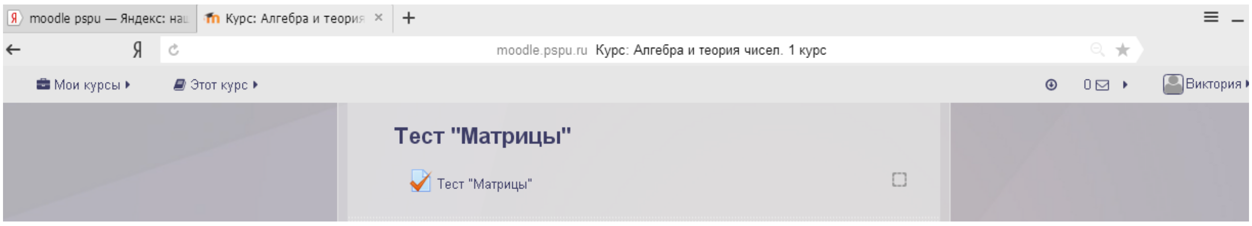

Рис. 8. Расположение теста в Moodle

Количество учащихся, прошедших тест, составило 20 человек.

Для прохождения теста была дана одна попытка, время было неограниченным.

Тестовые задания были открытого и закрытого типа. В тестовых заданиях открытого типа использовался вид «свободное изложение», где каждому студенту необходимо было самому записать либо одно слово, либо число. В тестовых заданиях закрытого типа из множества вариантов ответов студентам нужно было выбрать один.

2.1.2. Анализ полученных результатов

Общая средняя оценка двадцати учащихся получилась 28,85. У каждого студента время прохождения теста было разным. В среднем затраченное время тестирования составило тридцать-сорок минут.

Ниже приведена диаграмма (рис. 9), на которой представлены результаты прохождения теста студентами:

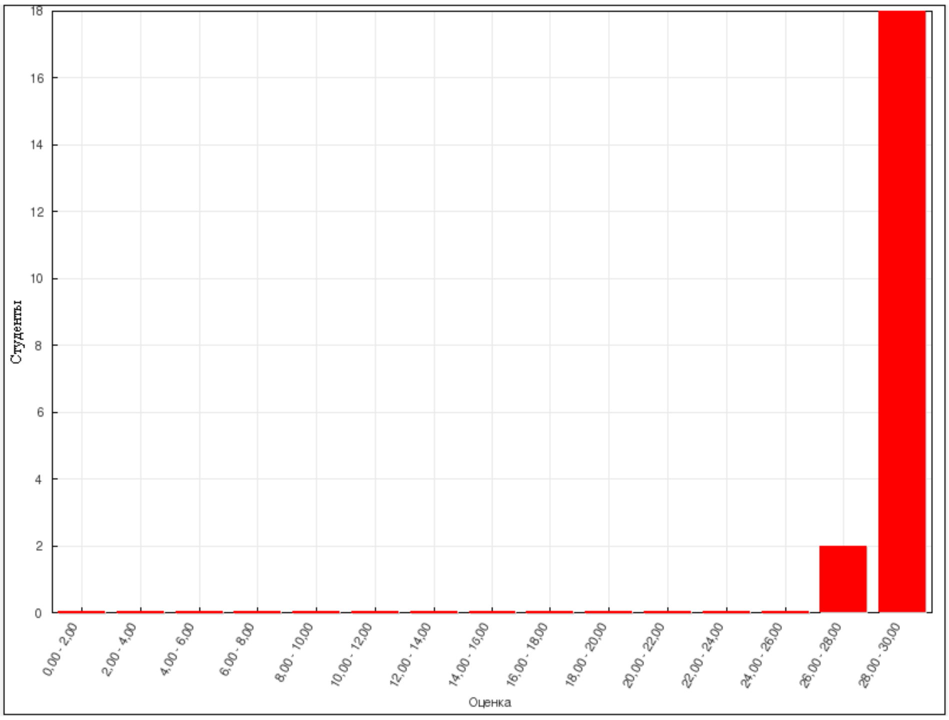

Рис. 9. Количество студентов, получивших оценки в диапазонах

Большинство ошибок было сделано в заданиях, где нужно было найти определитель квадратной матрицы. С такими заданиями не справилось одиннадцать человек. Два человека допустили ошибки при умножении квадратных матриц. Также по одной ошибке было сделано в вопросах, где нужно было указать:

1. Первый индекс элемента матрицы.
2. Второй индекс элемента матрицы.

В первом случае было отмечено, что это количество строк в матрице. Во втором случае – количество столбцов в матрице.

Два человека неправильно ответили на вопрос о нахождении результата сложения двух квадратных матриц второго порядка.

Один человек написал неверно ответ на вопрос открытого типа «Всегда ли можно найти обратную матрицу для квадратной матрицы третьего порядка?».

Три человека написали неправильно ответ на вопрос открытого типа «Можно ли для любой квадратной матрицы найти обратную к ней?».

Для устранения ошибок, которые допустили студенты, можно порекомендовать следующее: повторить теоретические материалы по данному разделу, самостоятельно выполнить задания на нахождение определителя матрицы и умножения квадратных матриц.

2.2. Зачетная работа по теме «Матрицы»

В 111 группе математического факультета ПГГПУ вторым этапом апробации стала аудиторная зачетная работа по теме «Матрицы.

2.2.1. Описание зачетной работы

Зачетная работа состояла из трех блоков. Задания в этих блоках были распределены по степени сложности: от простых к более сложным (прил. 2).

Время на выполнение заданий из каждого блока было установлено в зависимости от сложности заданий.

Так, например, *в первом блоке* было пять заданий, все эти 5 заданий были сделаны в трех вариантах. Первые три задания оценивались в один балл, последние два задания – в два балла. В этих заданиях нужно было:

1. Найти определитель квадратной матрицы второго порядка.
2. Сложить две квадратные матрицы второго порядка.
3. Умножить матрицу на число.
4. Выполнить умножение квадратных матриц второго порядка.
5. Найти матрицу по двум данным.

Время на выполнение заданий было пять-семь минут.

Во втором блоке студентам было предложено четыре задания. Эти задания были разработаны в трех вариантах. Первые три задания были оценены в три балла. Последнее задание – в четыре балла. Первые три задания заключались в следующем:

– найти определитель квадратной матрицы третьего порядка;

– выполнить умножение прямоугольных матриц, содержащих разное количество строк и столбцов;

– определить, существует ли обратная матрица к квадратной матрице второго порядка, если да, то найти ее.

Четвертое задание этого блока было аналогично третьему, но для квадратных матриц третьего порядка.

Время на выполнение данного блока было 15 минут.

В третьем блоке студентам было предложено решить матричное уравнение. Задание оценивалось в 5 баллов. Оно было разработано в двух вариантах.

Время на его выполнение –15 минут.

В ходе проверки данной работы все баллы, которые получили студенты за три блока, суммировались.

2.2.2. Анализ полученных результатов

На зачете присутствовало 19 студентов первого курса математического факультета ПГГПУ.

Баллы, которые получили студенты, представлены в таблице.

Таблица

Баллы, полученные студентами

	I блок					II блок				III блок	Итог
№ зад.	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	
S1	1	1	1	2	2	3	2	3	0	0	15
S2	1	1	1	2	2	3	3	1	1	2	17
S3	1	1	1	0	2	2	0	0	1	1	9
S4	1	1	1	2	2	2	2	3	3	2	19
S5	1	1	1	0	2	3	0	1	1	3	13
S6	1	1	1	2	2	3	3	1	0	1	15
S7	1	1	1	0	2	3	0	0	1	1	10
S8	1	1	1	1	2	3	3	3	1	3	19
S9	1	1	1	1	2	3	3	1	1	0	14
S10	1	1	1	0	2	3	3	3	2	2	18
S11	1	1	1	2	2	3	3	3	4	5	25
S12	1	1	1	2	2	3	0	1	0	5	16
S13	1	1	1	2	1	3	2	3	4	2	20
S14	1	1	1	2	2	3	3	2	0	2	17
S15	1	1	1	2	2	3	3	3	1	2	19
S16	1	1	1	2	2	3	3	3	2	4	22
S17	1	1	1	0	1	3	0	1	1	0	9
S18	1	1	1	2	2	2	3	1	0	4	17
S19	1	1	1	2	2	2	2	0	4	5	20
Общее количество студентов, выполнивших задание	19	19	19	14	19	19	14	16	14	16	

Полученные студентами результаты в ходе выполнения зачетной работы представлены на диаграмме (рис. 10).

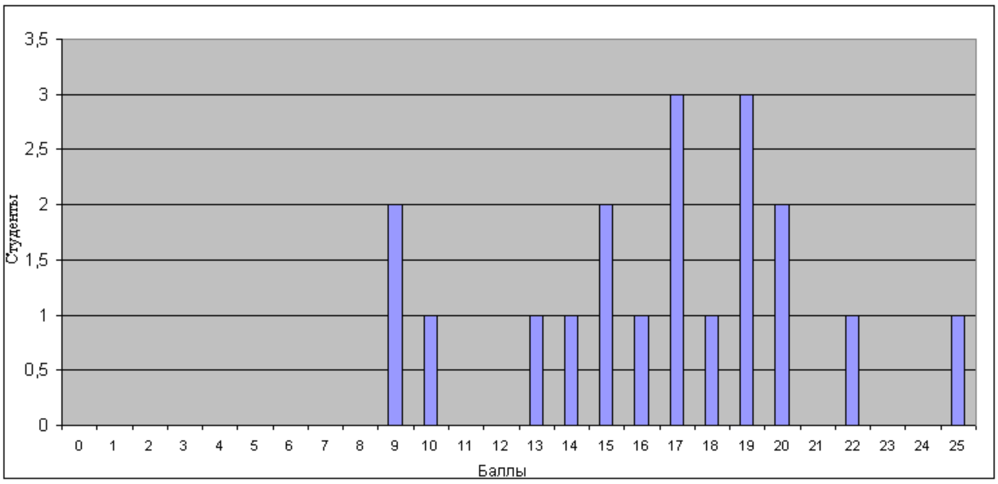

Рис. 10. Распределение баллов по количеству студентов, набравших их

Один человек из всех студентов первого курса получил максимальное число баллов – 25. По три человека получили 17 и 19 баллов. По два человека получили 9, 15 и 20 баллов. По одному человеку получили 10, 13, 14, 16, 18, 22 баллов.

В большинстве случаев студенты допускали арифметические ошибки.

Более подробный анализ ошибок, которые допустили студенты, приведен ниже.

I блок. Первые три задания были выполнены правильно всеми студентами. Результаты по этим заданиям представлены на диаграммах (рис. 11–13).

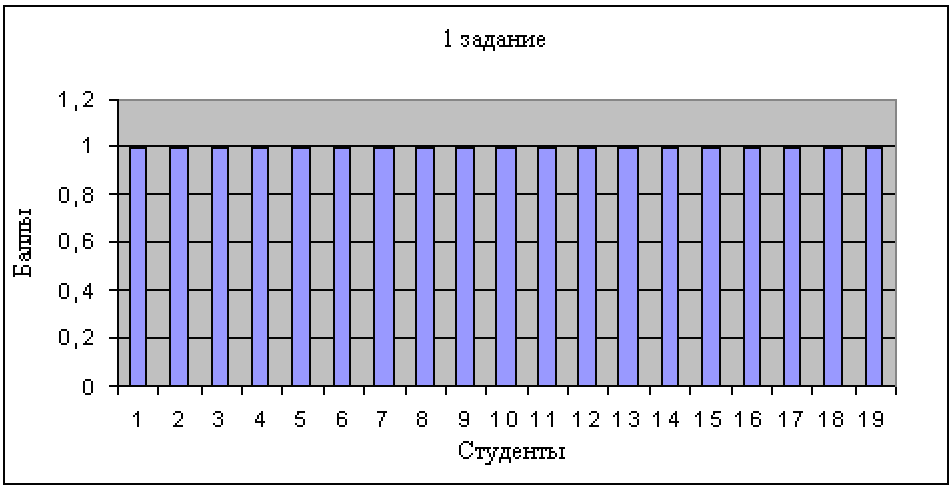

Рис. 11. Баллы, полученные студентами за 1 задание I блока

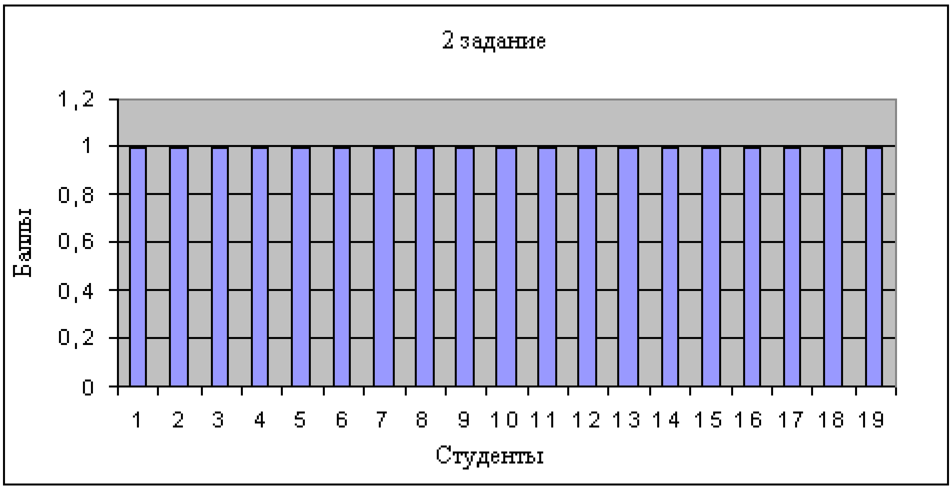

Рис. 12. Баллы, полученные студентами за 2 задание I блока

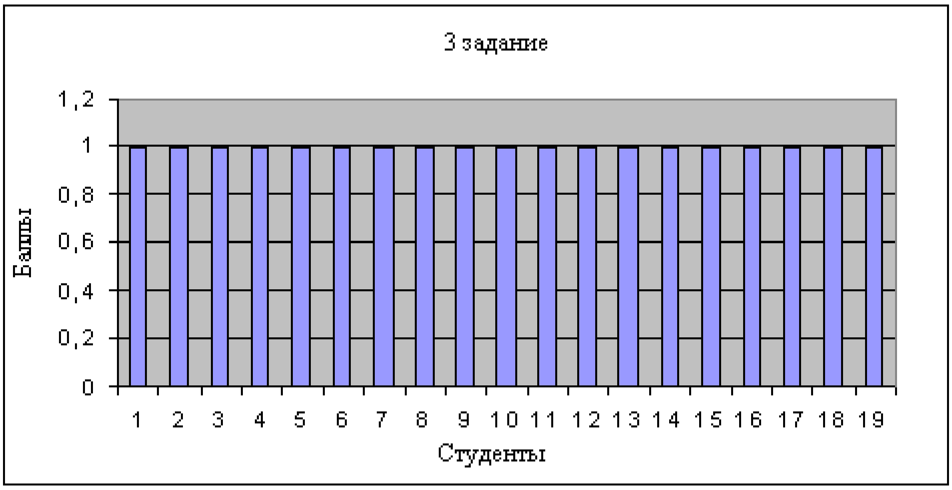

Рис. 13. Баллы, полученные студентами за 3 задание I блока

В четвертом задании нужно было перемножить квадратные матрицы второго порядка. Два человека из всех просто перемножали соответствующие элементы матриц. Максимальный балл набрали 12 человек. Распределение баллов по этому заданию представлено на диаграмме (рис. 14).

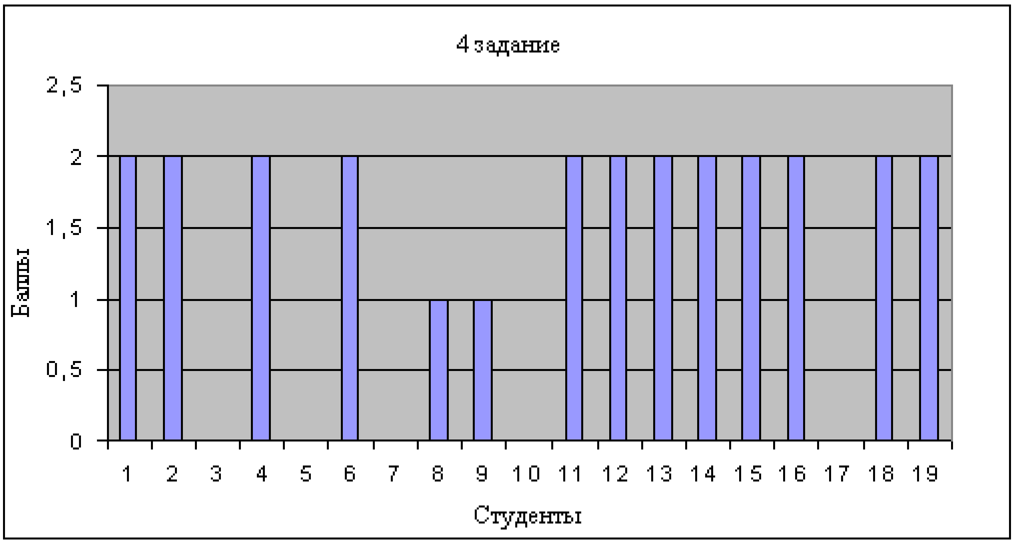

Рис. 14. Баллы, полученные студентами за 4 задание I блока

В пятом задании два студента совершили арифметические ошибки в счете, остальные студенты выполнили это задание без ошибок и получили максимальный балл. Результаты распределения баллов этого задания представлены на диаграмме (рис. 15).

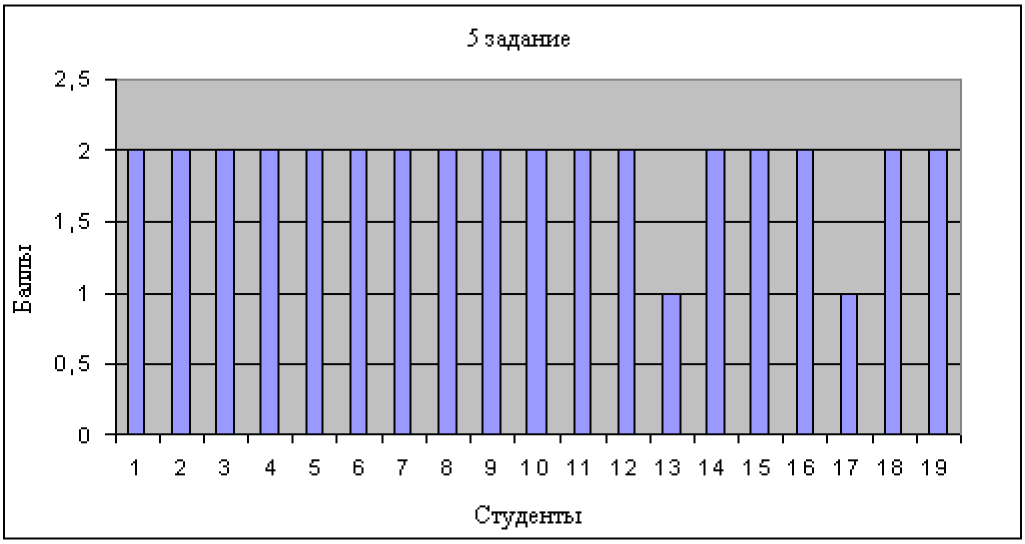

Рис. 15. Баллы, полученные студентами за 5 задание I блока

II блок. В первом задании четыре человека допустили ошибки в счете, из-за этого было снято по одному баллу.

Результаты первого задания данного блока представлены на диаграмме (рис. 16).

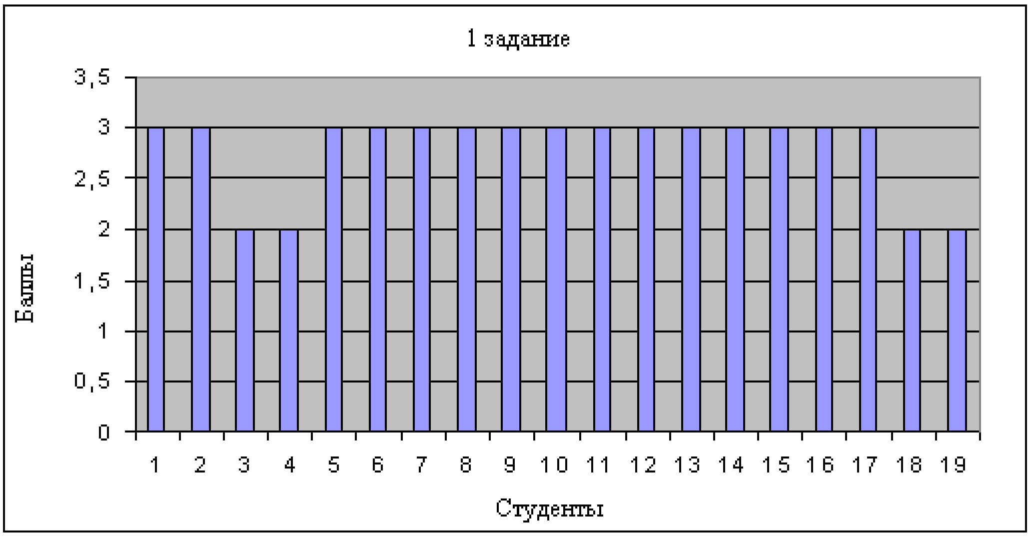

Рис. 16. Баллы, полученные студентами за 1 задание II блока

Во втором задании четыре человека совершили ошибки в счете, три человека не предоставили решения, два человека неверно перемножили строчки в матрицах.

Результаты этого задания представлены на диаграмме (рис. 17).

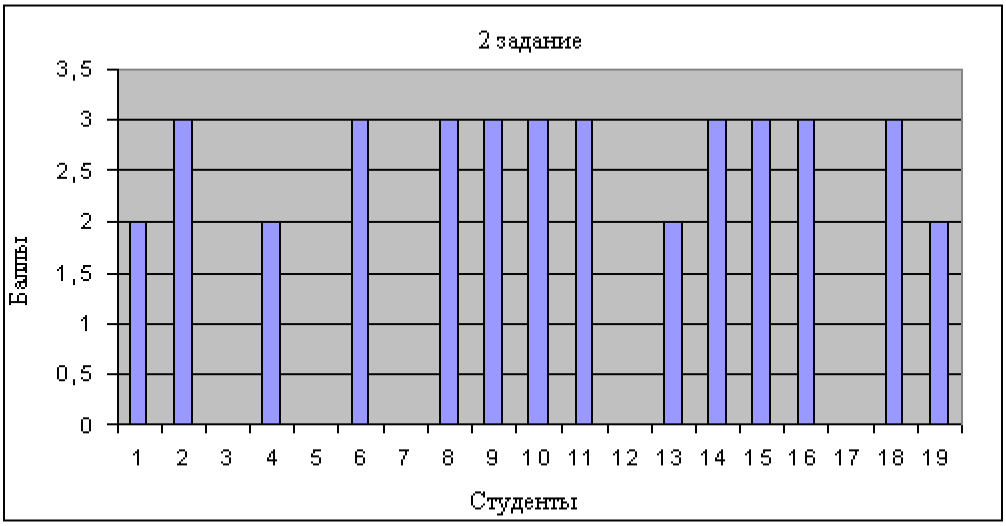

Рис. 17. Баллы, полученные студентами за 2 задание II блока

В третьем задании были сделаны следующие ошибки: в обратной матрице вместо элементов в строчках записаны элементы столбцов, неверно найдена обратная матрица, либо вместо алгебраических дополнений при нахождении обратной матрицы записаны миноры, в большинстве случаев студенты подсчитали правильно только определитель данной матрицы, в трех работах не было предоставлено решение этого задания. В итоге максимальный балл получили 8 человек.

Результаты данного задания представлены на диаграмме (рис. 18).

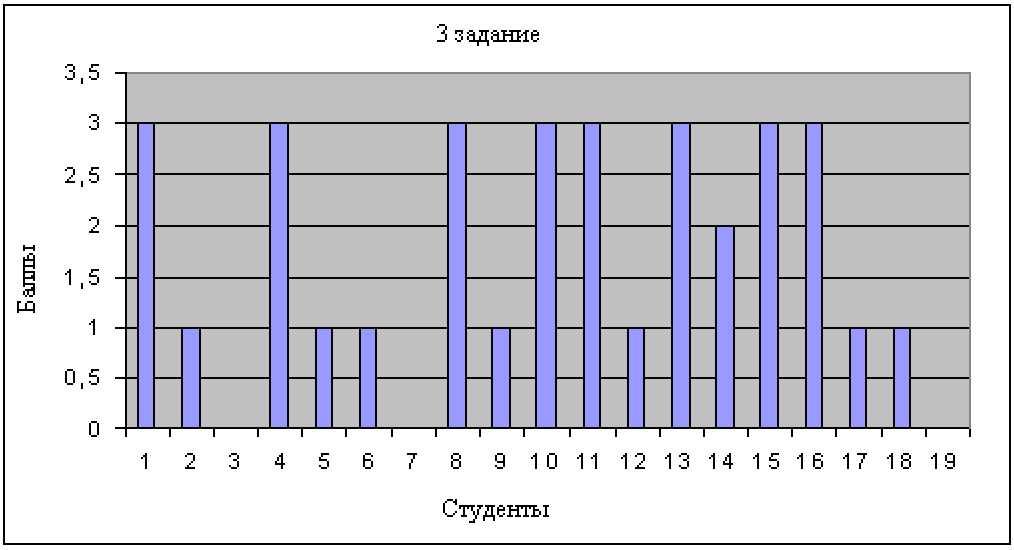

Рис. 18. Баллы, полученные студентами за 3 задание II блока

В четвертом задании 6 человек нашли правильно только определитель данной матрицы, один человек не предоставил решения к этому заданию, у некоторых решение представлено, но оно либо полностью, либо частично решено неправильно, три человека получили максимальный балл.

Результаты данного задания представлены на диаграмме (рис. 19).

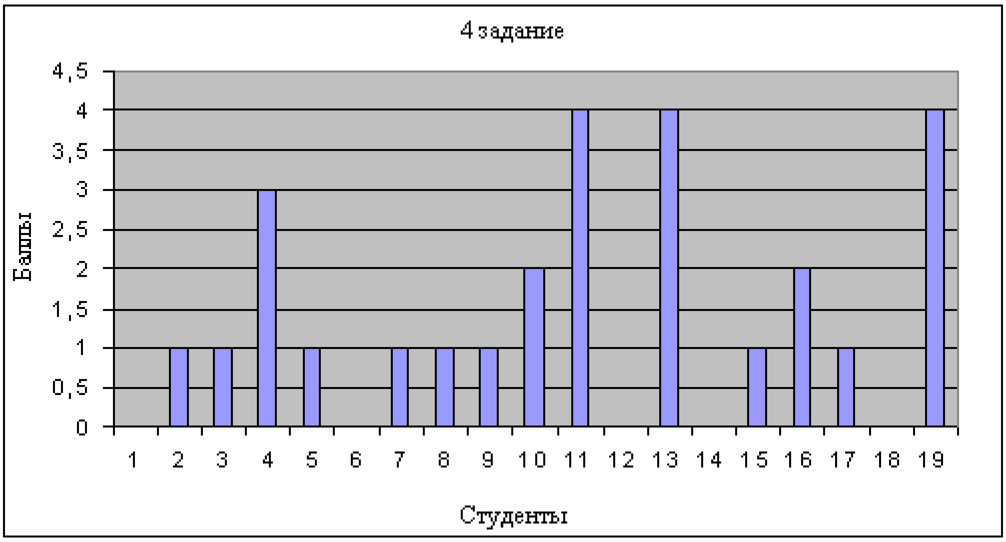

Рис. 19. Баллы, полученные студентами за 4 задание II блока

III блок. За задание из этого блока максимальный балл получили три человека, еще три человека не предоставили решения к этому заданию, в большинстве случаев правильно определен вид уравнения, верно подсчитан определитель матрицы, но некоторые студенты не смогли определить вид матричного уравнения, в обратной матрице вместо строк записаны столбцы, двум студентам один балл снижен из-за того, что они допустили арифметические ошибки.

Результаты данного задания представлены на диаграмме (рис. 20).

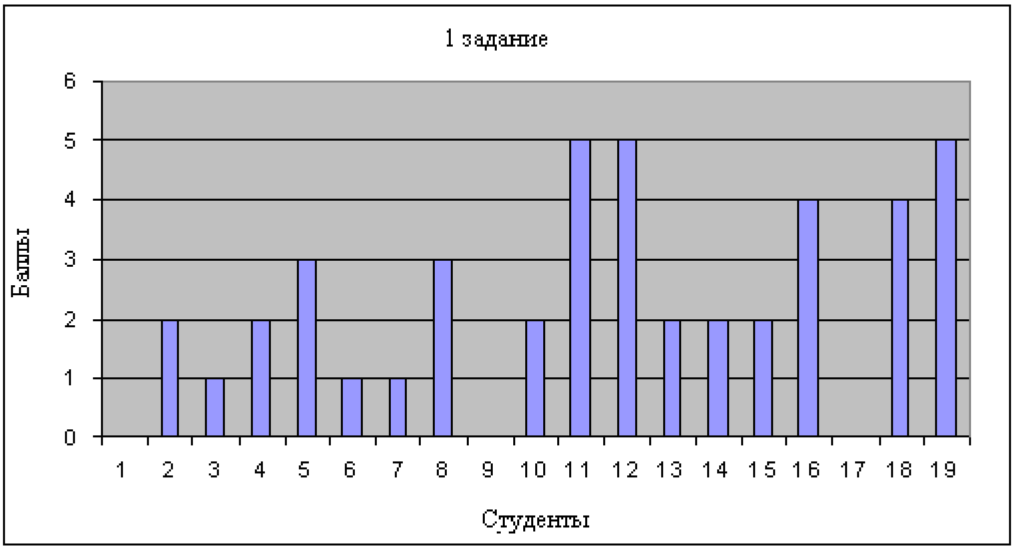

Рис.20. Баллы, полученные студентами за 1 задание III блока

Для устранения ошибок, которые допустили студенты на зачетной работе, можно дать следующие методические рекомендации:

– выполнить обзор материала по теме «Матрицы», повторить понятия матрицы, определителя матрицы, понятия вырожденной и невырожденной матриц, транспонированной матрицы, обратной матрицы, алгоритм ее нахождения, понятия матричных уравнений, их виды;

– самостоятельно решить задания на умножение прямоугольных матриц, нахождение определителя квадратных матриц второго и третьего порядка, решение матричных уравнений второго порядка;

– для усвоения данного материала сначала решать простые примеры, а затем переходить к более сложным.

В данной главе изложена апробация научного исследования: создание контрольно-измерительных материалов по теме «Матрицы», проведение теста и зачетной работы в 111 группе математического факультета ПГГПУ, подведение итогов контроля, с указанием допущенных студентами ошибок и методических рекомендаций для их устранения. Результаты тестирования и зачетной работы проиллюстрированы диаграммами, на которых представлены баллы, полученные студентами за каждое задание.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе научного исследования выполнены все поставленные задачи: сделан обзор литературы (30 источников, среди которых есть монографии, классические учебники, научные и методические издания последних лет), рассмотрены основные понятия теории матриц, теории групп, теории решеток, теории колец. Приведена классификация видов квадратных матриц, оформленная в виде схемы (с. 10). В теории групп рассмотрены аддитивные и мультипликативные матричные группы и их подгруппы, к которым приведены примеры. В теории решеток разобраны две теоремы с доказательством, самостоятельно составлены и изображены решетки: одна в аддитивных матричных группах и четыре решетки в мультипликативных матричных группах. К каждому разделу прописано методическое сопровождение по его овладению и определено, что студенты в результате его изучения должны знать и уметь.

По теме данного исследования проведена апробация среди студентов-первокурсников математического факультета ПГГПУ. Для этого использовались собственные разработанные контрольно-измерительные материалы по разделу «Матрицы»: тест и зачетная работа с подведением итогов контроля, указанием допущенных студентами ошибок и методических рекомендаций для их устранения. Результаты тестирования и зачетной работы проиллюстрированы диаграммами, на которых представлены баллы, полученные студентами за каждое задание.

Материалы исследования обсуждались на конференциях различного уровня, что отражено в соответствующих публикациях:

1. О матрицах и их видах // Научно-практическая конференция студентов математического факультета ПГГПУ 12 ноября 2013 г., Пермь, ПГГПУ / под ред. Ю.В. Корзняковой. – Пермь : ПГГПУ, 2013. – С. 4.

2. Матричные группы и их подгруппы // Межрегиональная научно-практическая конференция студентов математических факультетов 15 апреля 2015 г., Пермь, ПГГПУ / под ред. Ю.В. Корзняковой. – Вып. 7. – Пермь : ПГГПУ, 2014. – С. 12-13.

3. Матричные группы и их решетки // Межрегиональная научно-практическая конференция студентов математических факультетов 7 апреля 2015 г., Пермь, ПГГПУ / под ред. Ю.В. Корзняковой. – Вып. 8. – Пермь : ПГГПУ, 2015. – С. 10-11.

4. Матричные алгебраические структуры // Межрегиональная научно-практическая конференция студентов математических факультетов 5 апреля 2016 г., Пермь, ПГГПУ / под ред. Ю.В. Корзняковой. – Вып. 9. – Пермь : ПГГПУ, 2016. – С. 12-13.

Теория матричных решеток, которая рассматривается на частично упорядоченных множествах, и теория колец матриц относятся к более углубленному изучению студентами математического факультета ПГГПУ, что может стать предметом дальнейшего исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балюкевич Э.Л.* Алгебра и теория чисел / Э.Л. Балюкевич, З.В. Алферова, А.Н. Романников. – М. : ЕАОИ, 2011. – 278 с. ; то же [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.iprbookshop.ru/10599 (дата обращения 15.04.2016).
2. *Беняш-Кривец В.В., Мельников О.В.* Лекции по алгебре: группы, кольца, поля: учеб. пособие для студентов математических специальностей / В.В. Беняш-Кривец, О.В. Мельников. – Минск : БГУ, 2008. – 116 с.
3. *Биркгоф Г.* Теория решеток / Г. Биркгоф ; под ред. Л.А. Скорнякова ; пер. с англ. В.Н. Салий. – М. : Наука, 1984. – 568 с.
4. *Веселова Л.В.* Алгебра и теория чисел : учебное пособие / В. Веселова, О.Е. Тихонов. – Казань : КНИТУ, 2014. – 107 с.
5. *Винберг Э.Б.* Курс алгебры / Э.Б. Винберг. – М. : МЦНМО, 2011. – 591 с. ; то же [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=63299 (дата обращения 3.04.2016).
6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – 5-е изд. – М. : Физматлит, 2010. – 560 с. ; то же [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.iprbookshop.ru/12877(дата обращения 15.03.2016).
7. *Глухов М.М.* Алгебра / М.М. Глухов, В.П. Елизаров, А.А. Нечаев. – М. : Гелиос АРВ, 2003. – 336 с.
8. *Гретцер Г.* Общая теория решеток / Г. Гретцер ; под ред. Д.М. Смирнова ; пер. с англ. А.Д. Больбота, В.А. Горбунова, В.И. Туманова. – М. : Мир, 1981. – 456 с.
9. *Дальма А.* Эварист Галуа, революционер и математик / А. Дальма ; под ред. Ю.И. Мерзлякова ; пер. с франц. Ю.С. Родман – М. : Наука, 1984. – 112 с.
10. *Конев В.В.* Линейная алгебра / В.В. Конев. – Томск : ТПУ, 2008. – 65 с.
11. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру / А.И. Кострикин. – М. : Физматлит, 2001. – 272 с.
12. *Кострикин А.И.* Линейная алгебра и геометрия / А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. – М. : Лань, 2008. – 4-е изд. – 304 с.

13. *Куликов Л.Я.* Алгебра и теория чисел / Л.Я. Куликов. – М. : Высшая школа, 1979. – 559 с.

14. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры: учебник для вузов / А.Г. Курош. – СПб. : Лань; М. : Физматкнига, 2003. – 432 с.

15. *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре / А.Г. Курош. – СПб. : Лань, 2005. – 560 с.

16. *Курош А.Г.* Теория групп / А.Г. Курош. – М. : Физматлит; 2011. – 805 с. ; то же [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.iprbookshop.ru/12902 (дата обращения 25.03.2016).

17. *Ланкастер П.* Теория матриц / П. Ланкастер. – М. : Наука, 1973. – 280 с.

18. *Лизунова Н.А.* Матрицы и системы линейных уравнений : учеб. пособие / Н.А. Лизунова, С.П. Шкроба. – М. : Физматлит, 2007. – 350 с. ; то же [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.iprbookshop.ru/12904 (дата обращения 13.04.2016).

19. *Ляпин Е.С.* Курс высшей алгебры / Е.С. Ляпин. – СПб. : Лань, 2009.– 368 с.

20. *Мальцев И.А.* Линейная алгебра / И.А. Мальцев. – Изд. 2-ое, испр. и доп. – Спб. : Лань, 2010. – 384 с.

21. *Окунев Л.Я.* Высшая алгебра / Л.Я. Окунев. – СПб. : Лань, 2009. – 336 с.

22. *Окунев Л.Я.* Сборник задач по высшей алгебре / Л.Я. Окунев. – СПб. : Лань, 2009. – 192 с.

23. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков. – СПб. : Лань, 2010. – 480 с.

24. *Туганбаев А.А.* Линейная алгебра : учебное пособие / А.А. Туганбаев. – М. : Флинта, 2012. – 74 с. ; то же [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=115141&sr=1 (дата обращения 13.04.2016).

25. *Тыртышников Е.Е.* Матричный анализ и линейная алгебра : учебное пособие / Е.Е. Тыртышников. – М. : Физматлит, 2007. – 477 с. ; то же [Электронный ресурс]. Режим доступа : http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=69330 (дата обращения 05.05.2016).

26. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре: учеб. пособие для вузов / Д.К. Фаддеев. – М. : Наука, 1984. – 416 с.

27. *Фаддеев Д.К.* Сборник задач по высшей алгебре / Д.К. Фаддеев. – М. : Наука, 1977. – 288 с.

28. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон ; под ред. Х.Д. Икрамова ; пер. с англ. Х.Д. Икрамова, А.В. Князева, Е.Е. Тыртышникова. – М. : Мир, 1989. – 656 с.

29. *Шафаревич И.Р., Ремизов А.О.* Линейная алгебра и геометрия : учебное пособие / И.Р. Шафаревич., А.О. Ремизов, – М. : Физматлит, 2009. – 512 с. ; то же [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=68387 (дата обращения 02.06.2016).

30. *Шрейер О.* Теория матриц / О. Шрейер, Е. Шпернер ; под ред. Г.А. Сухомлинова ; пер. с нем. Г.И. Ольшанского. – М. : ОНТИ, 1936. – 154 с.

Приложение 1

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕСТА «МАТРИЦЫ»

1) Что указывает первый индекс элемента матрицы?

A) номер столбца элемента

B) номер строки элемента

C) количество строк в матрице

D) количество столбцов в матрице

2) Вставьте пропущенное слово:

_______________ диагональ проходит из левого верхнего угла квадратной матрицы в ее правый нижний угол

3) Найдите результат умножения двух квадратных матриц:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

А) $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Б) $\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ В) $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ Г) $\begin{pmatrix} 12 & -72 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) Напишите ответ (в ответе запишите число):

Определитель матрицы $\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ равен _____________ .

5) Напишите ответ (в ответе запишите число):

Элемент первой строки второго столбца при сложении $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

равен ____________ .

6) Вставьте пропущенное слово:

Если определитель квадратной матрицы равен нулю, то такую матрицу называют ______________.

7) Напишите ответ (в ответе запишите число):

Определитель матрицы $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ равен ____________ .

8) Даны матрицы A и B. Найдите $2A$-$3B$, если матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

А) $\begin{pmatrix} 16 & 33 \\ 28 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Б) $\begin{pmatrix} 5 & 29 \\ 6 & -7 \\ -28 & 3 \end{pmatrix}$ В) $\begin{pmatrix} -5 & -29 \\ -6 & 7 \\ 28 & -3 \end{pmatrix}$ Г) $\begin{pmatrix} 5 & 29 \\ 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

9) Результатом умножения матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ на число 5 будет матрица:

А) $\begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 35 & 40 \end{pmatrix}$ Б) $\begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ В) $\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 35 & 8 \end{pmatrix}$ Г) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 35 & 40 \end{pmatrix}$

10) Напишите ответ (в ответе запишите число):

При сложении двух матриц $\begin{pmatrix} 21 & 14 \\ 17 & 18 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 14 & 42 \\ 27 & 85 \end{pmatrix}$ элементом a_{21} в полученной матрице будет равен _______ .

11) Напишите ответ (в ответе запишите число):

Определитель квадратной матрицы $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ равен ________ .

12) Напишите ответ (в ответе запишите число):

Определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ равен ______ .

13) Напишите ответ (в ответе запишите число):

Определитель матрицы $C=3A$, если $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, равен______ .

14) Найти матрицу $C=A-2B$, если $A=\begin{pmatrix} 42 & 74 \\ 40 & 95 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

А) $\begin{pmatrix} 40 & 70 \\ 34 & 90 \end{pmatrix}$ Б) $\begin{pmatrix} 38 & 66 \\ 28 & 85 \end{pmatrix}$ В) $\begin{pmatrix} 38 & 64 \\ 34 & 90 \end{pmatrix}$ Г) $\begin{pmatrix} 38 & 70 \\ 28 & 90 \end{pmatrix}$

15) Напишите свой вариант ответа (да или нет):

Всегда ли можно найти обратную матрицу для квадратной матрицы третьего порядка?

16) Что указывает второй индекс элемента матрицы?

А) количество столбцов в матрице

Б) номер строки элемента

В) количество строк в матрице

Г) номер столбца элемента

17) Вставьте пропущенное слово:

_________ диагональ проходит из правого верхнего угла квадратной матрицы в ее левый нижний угол.

18) Найдите результат умножения двух квадратных матриц $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

А) $\begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ Б) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ В) $\begin{pmatrix} 0 & 24 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ Г) $\begin{pmatrix} 0 & 14 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

19) Напишите ответ (в ответе запишите число):

Определитель матрицы $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$ равен________ .

20) Напишите ответ (в ответе запишите число):

Элемент второй строки первого столбца при сложении $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

равен ________ .

21) Вставьте пропущенное слово:

Если определитель квадратной матрицы не равен нулю, то такую матрицу называют __________ .

22) Напишите ответ (в ответе запишите число):

Определитель матрицы $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ равен ___________ .

23) Даны матрицы A и B. Найти $3A$-$2B$, если матрица A=$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

А) $\begin{pmatrix} 13 & 5 \\ -6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ Б) $\begin{pmatrix} 14 & 23 \\ -6 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ В) $\begin{pmatrix} 14 & 23 \\ -18 & -2 \\ -9 & 23 \end{pmatrix}$ Г) $\begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -18 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$

24) Результатом умножения матрицы $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ на число 4 будет матрица:

А) $\begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ Б) $\begin{pmatrix} 24 & 28 \\ 8 & 36 \end{pmatrix}$ В) $\begin{pmatrix} 24 & 28 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ Г) $\begin{pmatrix} 24 & 28 \\ 2 & 36 \end{pmatrix}$

25) Напишите ответ (в ответе запишите число):

При сложении двух матриц $\begin{pmatrix} 21 & 14 \\ 17 & 18 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 14 & -4 \\ 27 & -2 \end{pmatrix}$ элементом a_{22} в полученной матрице будет равен _______ .

26) Напишите ответ (в ответе запишите число):

Определитель квадратной матрицы $A=\begin{vmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ равен ________ .

27) Напишите ответ (в ответе запишите число):

Определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ равен ______ .

28) Напишите ответ (в ответе запишите число):

Определитель матрицы $C=5A$, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, равен______ .

29) Найдите матрицу $C=A$-$4B$, если $A=\begin{pmatrix} 42 & 74 \\ 40 & 95 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

А) $\begin{pmatrix} 34 & 58 \\ 16 & 75 \end{pmatrix}$ Б) $\begin{pmatrix} 34 & 58 \\ 34 & 90 \end{pmatrix}$ В) $\begin{pmatrix} 34 & 70 \\ 16 & 90 \end{pmatrix}$ Г) $\begin{pmatrix} -34 & 58 \\ 16 & -75 \end{pmatrix}$

30) Напишите свой вариант ответа (да или нет):

Можно ли для любой квадратной матрицы найти обратную к ней?

Приложение 2

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЗАЧЕТНОЙ РАБОТЫ «МАТРИЦЫ»

I блок

1 вариант:

1. Найдите определитель квадратной матрицы 2-го порядка $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Сложите две матрицы $\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 28 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Умножьте матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ на число 2.

4. Выполните умножение матриц $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Найдите матрицу $C=2A+B$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

2 вариант:

1. Найдите определитель квадратной матрицы 2-го порядка $A=\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Сложите две матрицы $\begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 48 & 16 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 16 & -20 \\ 38 & 13 \end{pmatrix}$.

3. Умножьте матрицу $\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ на число 4.

4. Выполните умножение матриц $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Найдите матрицу $C=A+2B$, если $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$.

3 вариант:

1. Найдите определитель квадратной матрицы 2-го порядка $A=\begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

2. Сложите две матрицы $\begin{pmatrix} 45 & 9 \\ 28 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -16 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Умножьте матрицу $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$ на число 5.

4. Выполните умножение матриц $\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$.

5. Найдите матрицу C=2A+3B, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II блок

1 вариант:

1. Найдите определитель квадратной матрицы 3-го порядка $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 4 \\ 4 & 9 & 9 \end{pmatrix}$.

2. Выполните умножение матриц A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

3. Существует ли обратная матрица матрице A=$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$. Если существует, найдите обратную матрицу к данной матрице A.

4. Существует ли обратная матрица матрице A=$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Если существует, найдите обратную матрицу к данной матрице A.

2 вариант:

1. Найдите определитель квадратной матрицы 3-го порядка $A = \begin{pmatrix} 7 & -10 & 4 \\ 1 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Выполните умножение матриц A=$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 9 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Существует ли обратная матрица матрице A=$\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Если существует, найдите обратную матрицу к данной матрице A.

4. Существует ли обратная матрица матрице A=$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 \\ -3 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$. Если существует, найдите обратную матрицу к данной матрице A.

3 вариант:

1. Найдите определитель квадратной матрицы 3-го порядка $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 2 & 9 & 3 \\ 7 & -6 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Выполните умножение матриц A=$\begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 3 & -6 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

3. Существует ли обратная матрица матрице A=$\begin{pmatrix} 28 & 7 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$. Если существует, найдите обратную матрицу к данной матрице A.

4. Существует ли обратная матрица матрице A=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & 7 \\ 9 & 2 & 8 \end{pmatrix}$. Если существует, найдите обратную матрицу к данной матрице A.

III блок

1 вариант:

Решите матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$.

2 вариант:

Решите матричное уравнение: $X \cdot \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$.