ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Контроль знаний и умений учащихся является важной составной частью процесса обучения. Его цель определение качества освоения обучающимися образовательной программы в целом, и материала учебной программы конкретной дисциплины или дисциплинарного модуля в частности.

Проверка знаний и умений учащихся школы – один из важных структурных элементов каждого урока и всего процесса обучения в целом. С одной стороны, она всегда находится в зоне пристального внимания учителя, свидетельствуя о достигнутых результатах обучения и позволяя не только их диагностировать, но и корректировать знания и умения обучающихся, воспитывать ответственность к учебной работе. С другой стороны, для школьника проверка его знаний и умений нередко является источником глубоких переживаний: от гордости и удовлетворенности своей работой при высокой оценке до потери веры в свои силы, а иногда интереса к учению.

Проблема оценивания результатов обучения всегда была актуальной и для учителя, и для учащегося, и для родителей. В последнее время она связана с внедрением Федеральных государственных образовательных стандартов (ФГОС).

Объект исследования – процесс обучения математике в старшей школе.

Предмет исследования – контроль знаний при изучении интегралов в старшей школе.

Цель выпускной квалификационной работы – анализ вопросов организации контроля знаний по теме «Первообразная и интеграл» в старшей школе.

Для достижения этой цели были поставлены следующие *задачи*:

– проанализировать научно-методическую и учебную литературу по теме исследования;

– рассмотреть различные виды, методы и формы контроля; проанализировать традиционные и современные методы оценки результатов обучения в школе;

– рассмотреть последовательность изложения материала раздела «Интегральное исчисление» в действующих учебниках для школ; составить контрольно-измерительные задания по темам раздела;

– проанализировать содержание и формы заданий итоговой аттестации учащихся: Единого государственного экзамена по математике и Государственного выпускного экзамена (письменная и устная части).

Методы: исследование основано на анализе научной психолого-педагогической и методической литературы, действующих учебных пособий и материалов государственной итоговой аттестации выпускников средних образовательных учреждений.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и библиографического списка использованной литературы.

Во введении обоснованы актуальность темы, определяются объект и предмет исследования, сформулированы цель и задачи выпускной квалификационной работы, приведены методы исследования, дана характеристика структурных частей работы.

В первой главе «Теоретические основы оценивания результатов обучения математике» рассмотрены психолого-педагогические основы оценивания результатов обучения, в том числе проверки знаний (функции проверки и контроля знаний, определение уровня знаний), а также виды и формы контроля, традиционные и современные методы контроля знаний и умений учащихся в процессе обучения математике.

Вторая глава носит практический характер: в ней приведена характеристика тем раздела «Первообразная и интеграл», разработаны по ним контрольно-измерительные материалы, в том числе собственные, сведения по итоговой аттестации учащихся.

В заключении перечислены полученные результаты и сформулированы основные выводы по выполненному исследованию.

Библиографический список использованных источников насчитывает 18 наименований.

Общий объем работы составляет 96 страниц, основное содержание без приложений – 62 страницы.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Для выяснения значимости контроля в процессе обучения математике в главе рассмотрены основные понятия и функции: контролирующая, обучающая, ориентирующая и воспитывающая.

1.1. Основные понятия контроля знаний

Контроль проводится на основе научно обоснованных и опытным путем проверенных принципов, к которым относятся *объективность* и *всесторонность*. Он способствует развитию творческих сил и способностей обучающихся и осуществляется в полном соответствии с *принципами обучения* :

- объективности, научности;
- связи теории с практикой;
- последовательности, систематичности;
- доступности при необходимой степени трудности;
- наглядности, разнообразия методов;
- активности обучаемых;
- прочности усвоения знаний, умений и навыков в сочетании с опытом творческой деятельности.

Контроль и учет знаний, умений и навыков в обучении играет существенную роль. Основной функцией контроля знаний в учебном процессе является руководство и управление учебной деятельностью обучающихся.

В результате контроля устанавливается: глубина, полнота усвоенных знаний; готовность класса к усвоению новых знаний; уровень самостоятельной работы обучающихся; трудности, ошибки обучающихся в понимании тех или иных вопросов.

Приведем основные понятия контроля, которые выделяются в литературе.

Контроль знаний – это учет знаний учащихся, проводимый за определенный период учебного года (по четвертям и за полугодие). Это процесс определения уровня знаний, навыков.

Под контролем в психолого-педагогической литературе понимают проверку и оценку результатов обучения, выявление соответствия уровня освоения знаний учащихся образовательному стандарту по данному предмету.

В обучении под контролем понимается определение соответствия учебных действий условиям и требованиям учебной задачи; проверка постоянное наблюдение в целях проверки или надзора и др.

Суть проверки результатов обучения состоит в выявлении уровня усвоения знаний обучающимися, который должен соответствовать государственному образовательному стандарту по данной области знаний например программе или предмету.

Контроль обучения как часть дидактического процесса и дидактическая процедура ставит проблемы о функциях проверки, ее содержание, видах, методах и формах контроля, об измерениях, об успешности обучения и неуспеваемости учащихся. Всем известно, что основными задачами контроля являются:

- определение пробелов в обучении;
- коррекция процесса обучения;
- планирование последующего обучения;
- рекомендации по предупреждению неуспеваемости.

Содержание контроля определяется дидактическими задачами на разных этапах обучения; спецификой учебной дисциплины; уровнем подготовленности учащихся.

В педагогической практике при осуществлении контроля обычно ставится вопрос, что именно проверяется в обучении с помощью контроля. В соответствии с предыдущими государственными образовательными стандартами (ГОС) считается, что проверке подлежат знания, умения и навыки обучающихся (ЗУН).

В западной педагогике проверяемые результаты обучения описываются как когнитивные, социальные и эмоциональные цели обучения. Считается, что результаты, подлежащие проверке, формируются в терминах поведения, наблюдаемых действиях обучающихся. В этом случае может быть зафиксировано их наличие, проявление в том или ином виде. Они могут быть измерены, т.е. может быть установлен уровень сформированности знаний. Кроме знаний, содержание проверки достижений является: социальное и общепсихологическое развитие учащихся; сформированность мотивов учения и деятельности, такие социальные качества, как моральные нормы, поведение и чувство ответственности. Современные Федеральные государственные образовательные стандарты описывают результаты обучения в терминах «предметные», «метапредметные», «личностные» и «универсальные учебные действия».

1.2. Функции контроля

Для результатов обучения, описываемых в терминах ЗУН в литературе выделяли следующие дидактические функции контроля знаний, умений и навыков [3;15]:

1) контролирующую;
2) обучающую;
3) ориентирующую;
4) воспитывающую.

Сущность *контролирующей* проверки состоит в выявлении уровня знаний, умений и навыков учащихся, предусмотренных программой и соответствующих данному этапу обучения.

Сущность *обучающей* функции проверки и учета ЗУН заключается в том, что ожидание контроля, а затем результаты контроля позволяют направить учащихся на систематизацию и совершенствование выявленных ЗУН. Считается, что во время контроля (зачета, экзамена, контрольной работы) мозг работает с максимальной эффективностью, и учащийся начинает глубже понимать материал, особенно после устной беседы с учителем, в которой последний выясняет, насколько глубоко учащийся усвоил материал. Задания тестов обучающего характера составляются так, чтобы после их выполнения учащийся полностью разобрался в учебном материале.

Ориентирующая функция проверки заключается в ориентации учащихся по результатам их оцененного учебного труда на ликвидацию пробелов в знаниях и умениях; осуществлении обратной связи с учащимися – информации учителя о достижении цели обучения отдельными учащимися и классом в целом.

Воспитывающая функция проверки реализуется в воспитании чувства ответственности у школьников за свой учебный труд, трудолюбия, дисциплины труда; в формировании личностных качеств (честности, правдивости, настойчивости, взаимопомощи).
Контроль знаний является завершающим этапом в обучении и составной частью обучения. Сущность контроля знаний заключается в определении качества усвоения обучающимися учебного материала и повышение их ответственности в учебной работе. Контроль знаний служит цели совершенствования учебного процесса. В случае обнаружения неудовлетворительных знаний у обучающихся, учитель должен пересмотреть и внести изменения в организацию и методику учебной работы. Если же выявлены пробелы в знаниях лишь у отдельных учеников, то учитель вносит изменения в индивидуальную работу с обучающимися.

Проверка знаний, умений и навыков всегда одновременно является и средством повторения, углубления, закрепления и систематизации знаний.

В процессе обучения математике она часто сочетается с решением различного рода задач, т.е. содействует формированию у учащихся определенных умений и навыков, развитию их памяти, мышления и речи, приводит в систему их знания.

Организацию контроля знаний, умений и навыков считают правильной тогда, когда специфические функции контроля в ней сочетаются с другими важными задачами обучения. Такая проверка требует от учителя знаний, мастерства, специальной подготовительной работы – планирования всех этапов проверки, заблаговременной подготовки средств контроля: вопросов, дидактических карточек, тестов, задач для контрольных работ разных типов в достаточном количестве экземпляров и вариантов и др.

Основные требования к проверке успеваемости учащихся – *регулярность* и *объективность* оценки.

1.3. Методы контроля

При проверке и оценке качества успеваемости необходимо выявлять, как решаются основные задачи обучения, т.е. в какой мере учащиеся овладевают знаниями, умениями и навыками, мировоззренческими и нравственно-эстетическими идеями, а также способами творческой деятельности. Существенное значение имеет также то, как относится тот или иной учащийся к обучению, работает ли он с необходимым напряжением постоянно или урывками и т.д. Все это обуславливает необходимостью применения совокупности методов в проверки знаний. Выделяют следующие методы:

1) наблюдение;
2) устного контроля;
3) письменного контроля;
4) практического контроля;

1.3.1. Повседневное наблюдение. Повседневное наблюдение за учебной работой учащихся – метод, позволяющий учителю составить представление о том, как ведут себя учащиеся на уроках, как они воспринимают и осмысливают изучаемый материал, какая у них память, в какой мере они проявляют сообразительность и самостоятельность практических умений и навыков [3].

1.3.2. Устный контроль. К методам *устного контроля* относятся:

– опрос обучающихся,

– чтение чертежей, графиков,

– смысловое чтение текстовых задач и т.д.

Методы *письменного контроля*:

– математический диктант;

– письменные ответы на вопросы;

– решение различных задач и упражнений.

Исходя из классификации контроля, можно выделить виды устного контроля:

– фронтальный устный опрос;

– индивидуальный устный опрос.

При *фронтальном опросе* за короткое время проверяется состояние знаний учащихся по определенному вопросу или группе вопросов. Его назначение:

– выяснение готовности класса к изучению нового материала;

– определение сформированности понятий;

– проверка домашнего задания;

– поэтапная или окончательная проверка усвоения учебного материала, например, только что разобранного на уроке.

В процессе устного опроса можно использовать и коллективную работу класса, наиболее действенными приемами которой являются:

– обращение с вопросом ко всему классу,

– конструирование ответа,

– рецензирование ответа,

– оценка ответа и ее обоснование,

– постановка вопросов самими учащимися,

– взаимопроверка,

– самопроверка.

Индивидуальный устный опрос позволяет выявить правильность ответа по содержанию, его последовательность, самостоятельность суждений и выводов, степень развития логического мышления, культуру речи обучающихся. Эта форма применяется для текущего и тематического учета, а также для отработки и развития экспериментальных умений учащихся.

Устную проверку считают эффективной, если она направлена на выявление осмысленности восприятия знаний и осознанности их использования, если она стимулирует самостоятельность и творческую активность учащихся.

Устный опрос осуществляется на каждом уроке, хотя оценивать знания учащихся необязательно. Главным в контроле знаний является определение проблемных мест в усвоении учебного материала и фиксирование внимания обучающихся на сложных понятиях, явлениях, процессах. Для его проведения можно использовать заранее заготовленные, специальные листы контроля знаний.

В сравнении с устным контролем письменный характеризуется высокой экономичностью во времени, проявлением учащимися большей самостоятельности, возможностью одновременного выявления общей подготовленности класса и каждого ученика в отдельности. Однако, письменный контроль имеет определенные трудности в организации и проведении, и требует значительных затрат времени учителя на проверку выполненных работ [3].

1.3.3. Письменный контроль. Письменная проверка позволяет за короткое время проверить знания большого числа учащихся одновременно. Используется письменный контроль знаний учащихся в целях диагностики умения применять знания в учебной практике и осуществляется в виде математических диктантов, контрольных, проверочных и самостоятельных работ, тестов, рефератов.

Математический диктант. Диктант используется как форма опроса для контроля за усвоением проходимого материала, его обобщения и систематизации и выявление готовности учащихся к восприятию нового. Диктант обычно проводится в самом начале урока, состоит из одного или двух вариантов. Текст, вопросов простой, легко воспринимаемый на слух, требующий краткого ответа. Пауза между следующими друг за другом вопросами должна быть достаточной для записи ответов учащимися. (Либо «Продолжи предложение»)

Проверка домашних работ учащихся. Для проверки и оценки успеваемости учащихся большое значение имеет проверка выполнения ими домашних заданий. Она позволяет учителю изучать отношение учащихся к учебной работе, качество усвоения изучаемого материала, наличие пробелов в знаниях, а также степень самостоятельности при выполнении домашних заданий [3].

Зачет проводится для определения достижения конечных результатов обучения по определенной теме каждым учащимся. Перед началом изучения, материала учащиеся знакомятся с перечнем вопросов и обязательных задач по теме, а также, дополнительными вопросами и задачами. Иногда целесообразны закрытые зачеты, когда учащиеся получают вопросы и задания непосредственно во время проведения зачета. Его достоинство заключается в том, что он предполагает комплексную проверку всех знаний и умений учащихся.

Необходимость такого тематического контроля обусловлена тем, что для каждого учащегося характерен определенный темп овладения учебным материалом. А потому обычные контрольные работы, в которых трудно учесть должным образом индивидуальные особенности учащихся, могут оказаться недостаточными.

Тематические зачеты должны быть дифференцированными, чтобы учащийся мог самостоятельно выбрать уровень зачета. Учитель решает, основываясь на результатах прошлых или промежуточных контрольных мероприятий, какие знания и умения целесообразно проверять у какого учащегося: всем даются индивидуальные задания. Учащийся может решать практические задачи, надлежащим образом оформить, а затем беседовать с учителем.

Самостоятельная проверочная работа. Традиционная форма контроля знаний, которая по своему назначению делится на обучающую самостоятельную работу и контролирующую. Самостоятельная работа творческого характера позволит не только проверить определенные знания, умения, но и развивать творческие способности учащихся. Самостоятельная работа является необходимым этапом изучения любой темы. Как правило, она проводится после коллективного решения или обсуждения задач новой темы и обязательно предшествует контрольной работе по данной теме. Работа выполняется без помощи преподавателя.

Контрольная работа. Контрольные работы проводятся с целью определения конечного результата в обучении по данной теме или разделу, контролировать знания одного и того же материала неоднократно. Целесообразно проводить контрольные работы различного вида.

С помощью промежуточной контрольной работы учитель проверяет усвоение учащимися материала в период изучения темы.

Итоговая контрольная работа проводится с целью проверки знаний и умений по отдельной теме или главе. Полугодовая и годовая контрольная работа призвана систематизировать знания, позволяет повторить и закрепить материал.

Экзамен. Это отдельный вид контроля знаний. Проводится в целях итоговой проверки учебной работы учеников, служат средством государственного контроля за работой учителей и школ.

Тест. Традиционные формы контроля недостаточно оперативны, и для их осуществления требуется значительное время, поэтому возникает необходимость в новых видах проверки знаний.

Различают разные *виды* тестов. Избирательный тест состоит из системы заданий, к каждому из которых прилагаются как верные, так и неверные ответы. Из них обучающийся выбирает тот, который считает верным для данного вопроса. При этом неверные ответы содержат такую ошибку, которую учащийся может допустить, имея определенные пробелы в знаниях.

Тесты, направленные на определение уровня знаний по заданной теме называют *знаниевыми*. В знаниевых тестах чаще всего используют тесты с выбором одного или нескольких вариантов ответа, а также задания открытого типа, когда опрашиваемые сами вписывают ответ.

Классификация тестовых заданий:

1) закрытого типа (когда ученику предстоит выбрать из готовых вариантов ответа);
2) открытого типа (когда ученик сам находит ответ и вписывает в бланк);
3) установление соответствия;
4) последовательность.

Задания *закрытого типа***,** в свою очередь, делятся на:

- тесты, в которых можно выбрать *один* вариант ответа (тест, множественный выбор; radio-кнопка). Ответ засчитывается, если ученик выбрал его правильно.

- тесты, в которых можно выбрать *несколько* вариантов ответа – поставить галочки, но правильным может быть как один, так и несколько вариантов ответа (альтернативный выбор, checkbox). Ответ за тест засчитывается, если одновременно все ответы даны правильно или начисляется балл за каждый правильный ответ (и/или вычитается балл за каждый неправильный ответ).

Варианты ответов заданий закрытого типа:

- простой выбор – один ответ из 4-5;
- простой выбор из множества – один ответ из 6-15;
- выбор наиболее точного ответа из представленных;
- сложный выбор – двух и более правильных ответов из 4-5;
- сложный выбор из множества – двух и более правильных ответов из 6-15.

В задании на *установление соответствия* (перекрестный выбор) слева и справа даются связанные понятия, например, слова в предложении, родовые и видовые понятия и др. Ученику нужно провести линии соответствия, на компьютере перетащить блоки и установить друг с другом и т.п. Сюда же можно отнести задания на *сортировку* и *классификацию*. Варианты соответствия:

- между понятиями и определениями;
- текстом и изображением;
- списком авторов и цитатами;
- датами и событиями;
- списком понятий и их характеристиками;
- и др.

В задании на *определение последовательности* ученику предлагается ряд понятий, дат, слов, которые ему предстоит установить в правильной последовательности. Варианты заданий:

- расстановка чисел по возрастанию или убыванию;
- установление хронологической последовательности событий;
- установление логической последовательности.

Тестирование является стандартизированной формой контроля: процедура проведения теста, оценка знаний единообразны, т.е. стандартны для всех учащихся.

Грамотно составленный тест имеет ряд достоинств:

– оперативно выявляет знания, умения и навыки учащихся, а также понимание им закономерностей, лежащих в основе изучаемых фактов (при подборе задач учитываются трудности усвоения и характер возможных ошибок);

– позволяет в течение короткого времени получить представление о пробелах в знаниях и помогает организовать работу по предупреждению отставания учащихся;

– предоставляет учителю возможность проверять знания, умения и навыки на разных уровнях и осуществлять дифференцированное обучение;

– способствует рациональному использованию времени на уроке;

– активизирует мышление обучающегося.

– дает возможность учителю критически оценить собственные результаты и свои методы преподавания.

К недостаткам работы с тестами относят тот факт, что тест фиксирует только результаты работы, но не ход ее выполнения, возможно угадывание правильного ответа (многовариантные тесты), а также случаи, когда выбор неправильного ответа объясняется невнимательностью учащегося, поэтому рациональнее сочетать тестирование с различными формами традиционного контроля.

Тестовые задания удобно использовать при организации самостоятельной работы учащихся в режиме самоконтроля, при повторении учебного материала.

Оценить знания человека количественно трудно, но можно. Наибольшая объективность присуща оценкам, полученным методом письменного тестирования. Если подходить к проблеме оценки знаний как способу сравнения, то двум разным ученикам следует предлагать одинаковые тесты (вопросы) и ограничивать время размышления. Тесты должны быть предварительно проверены на довольно большой группе ребят. Обязательна при этом и статистическая обработка ответов. До этого момента их даже считают не тестами, а тестовыми заданиями, то есть вопросами, которые обладают недостаточно надежной «проверяющей способностью». Чем больше тестов, тем надежнее оценка знаний. В серьезных случаях при оценке знаний взрослых используют набор из 100–200 вопросов, ограничивая время размышления над каждым. Это серьезнейшая проверка, требующая хорошей подготовленности. Облегченный вариант этой проверки уже давно используют в школах в виде экзаменационных или зачетных тестов. Если составители тестов хорошо знают реальную программу, а еще лучше - содержание базового учебника (что бывает нечасто), то оценка получается достаточно объективной.

Кроме зачетных или экзаменационных тестов существуют еще поурочные (рабочие) тесты для текущей оценки знаний учащихся на каждом уроке. Поурочные тесты требуют особого внимания, так, при необходимости они могут заменить экзаменационные. А вот обратная замена невозможна в силу постепенности прохождения материала. Составлять поурочные тесты нетрудно, но долго. Их главные особенности:

1) тесты должны быть «закрытыми», т.е. иметь варианты ответов;

2) задания должны быть краткими (вопрос должен занимать одну строку и быть абсолютно ясным);

3) оптимальное количество вариантов ответов 4– 6, каждый вариант должен занимать не более одной строки.

К тестам учеными и педагогами разработаны определенные требования [8].

К современным методам контроля знаний относят и *программированный* контроль, схожий с тестированием. В системе проверки знаний учащихся применяется программированный контроль, который называют альтернативным методом (от фр. alternative - одна из двух возможностей), или методом выбора. Его сущность состоит в том, что учащемуся предлагаются вопросы, на каждый из которых дается три-четыре ответа, но только один из них является правильным. Задача ученика – выбрать правильный ответ. Несколько подобных вопросов и ответов может быть дано в классе одновременно всем учащимся на отдельных листах бумаги или с помощью компьютера, что позволяет в течение нескольких минут проверить их знания. В этом состоит положительная сторона метода программированного контроля.

Однако этот метод имеет и свои недочеты. Главным из них является то, что с его помощью можно проверить лишь отдельные стороны усвоения изучаемого материала. Всей же полноты и объема знаний этот метод выявить не позволяет.

Все вышеперечисленные методы контроля знаний органически сочетаются с другими сторонами процесса воспитания и обучения в школе.

1.4. Классификация контроля

В литературе выделяют следующие типы контроля:

– *внешний* контроль учителя за деятельностью обучающихся;

– *взаимоконтроль* и сотрудничество обучающихся;

– *самоконтроль* обучающихся.

Для развития обучающихся важен самоконтроль, потому что в этом случае они способны осознать правильность своих действий, обнаружить совершенные ошибки, проанализировать их и предупредить в дальнейшем.

Формы проверки бывают следующие:

1) *устные* (индивидуальный, фронтальный опрос, зачет);

2) *письменные* (кратковременные и итоговые контрольные работы, математические диктанты, входные, промежуточные, итоговые, тематические тесты);

3) проверка домашних работ.

Различают также формы организации контроля:

– фронтальная;

– групповая;

– индивидуальная.

При *фронтальном* контроле задания предлагаются всему классу. В процессе этой проверки изучается правильность восприятия и понимания учебного материала, качество словесного, наглядного предметного оформления, степени закрепления в памяти.

При *групповом* контроле обучающиеся класса временно делится на несколько групп (от 2 до 5 учащихся) и каждой группе дается проверочное задание. В зависимости от цели контроля, группам, предлагают одинаковые задания или разные. Групповую форму организации контроля применяют при повторении с целью обобщения и систематизации учебного материала, при выделении приемов и методов решения задач, при акцентировании внимания обучающихся на наиболее рациональных способах выполнения заданий и т.п.

При *индивидуальном* контроле каждый учащийся получает свое задание, которое он должен выполнять без посторонней помощи. Эта форма целесообразна в том случае, если требуется выяснять индивидуальные знания, способности и возможности отдельных учащихся.

К видам контроля знаний относят:

– входной;

– текущий;

– коррекционный;

– периодический;

– итоговый.

Входной (или *вводный*) проводится с целью проверки уровня знаний (например, остаточных знаний в начале учебного года). Могут быть применены такие методы как: тестирование, беседа, анкетирование, наблюдение.

Текущий контроль проводится учителем на каждом уроке, в ходе повседневной работы. Он проводится после изучения тем, подтем, разделов. Применяются такие методы, как фронтальный и индивидуальный опрос, эвристическая беседа, тестирование, проверка выполнения домашних заданий. Этот вид контроля способствует повышению интереса к учению, систематической самостоятельной работе учащихся, воспитанию чувства ответственности за порученное дело.

Периодический контроль служит для проверки учебной деятельности учащихся по усвоению сравнительно большого объема материала. Обычно проводится после изучения логически законченной части, раздела программы или в конце учебного периода.

Итоговый контроль осуществляется в конце каждого учебного года. Он может включать переводные и выпускные экзамены.

Правильное проведение всех видов контроля помогают получить соответствующие результаты. Все перечисленное выше можно представить в виде таблицы 2.

Таблица 2

Различные классификации контроля

<table>
<tr><th colspan="12">Типы</th></tr>
<tr><td colspan="4">Внешний</td><td colspan="4">Взаимоконтроль</td><td colspan="4">Самоконтроль</td></tr>
<tr><th colspan="12">Формы</th></tr>
<tr><td colspan="4">Фронтальный</td><td colspan="4">Групповой</td><td colspan="4">Индивидуальный</td></tr>
<tr><th colspan="12">Виды</th></tr>
<tr><td colspan="3">Входной (вводный)</td><td colspan="3">Текущий</td><td colspan="3">Периодический</td><td colspan="3">Итоговый</td></tr>
<tr><th colspan="12">Методы</th></tr>
<tr><td colspan="3">Устный опрос</td><td colspan="3">Письменный</td><td colspan="3">Практический</td><td colspan="3">Нетрадиционный</td></tr>
<tr><td colspan="3">Фронтальный, индивидуальный, зачет</td><td colspan="3">Самостоятельная работа, контрольная работа, практическая работа,</td><td colspan="3">Эксперимент, построение графиков</td><td colspan="3">Кроссворд, викторина</td></tr>
</table>

	программированный, тест		

Учителю необходимо установить, какая форма контроля подходит для текущего контроля, а какая форма для итогового. Это можно сделать, учитывая время, которое занимает та или иная форма, а также количество материала, которое она позволяет проверить. Так, например, математический диктант и кратковременная самостоятельная работа с полным правом могут быть отнесены к текущему контролю знаний и умений учащихся: они кратковременны и не могут охватить весь изученный материал.

Тестовые задания, составленные по-разному, с разным количеством вопросов, могут быть как формой текущего, так и итогового контроля, однако чаще задания с выбором ответов используются при текущей проверке. Устный зачет по теме и письменная контрольная работа – формы итогового контроля, так как охватывают большое количество материала и занимают много времени. На основании всего сказанного можно составить такую наглядную таблицу:

Таблица 3

Связь видов и форм контроля

Виды контроля	**Формы контроля**
Входной	Тестовые задания
Текущий контроль	Математический диктант Тестовые задания Кратковременная самостоятельная работа
Периодический	Письменная контрольная работа Устный зачет по теме Тестовые задания
Итоговый контроль	Письменная контрольная работа Устный зачет по темам Тестовые задания Экзамен

Нетрадиционные виды контроля. В методической литературе имеются описания разнообразных методов опроса, которые представляют несомненный интерес. На уроках возможны короткие проверочные работы нетрадиционного вида. В каждой теме выделяются ключевые понятия и термины, которые могут быть положены в основу кроссвордов, головоломок, викторин. Для ряда тем специально разрабатываются кроссворды, содержащие понятия одной определенной темы, есть достаточное количество кроссвордов, включающих в себя основные, понятия пройденной темы. Решение кроссвордов – занятие увлекательное и полезное, позволяет тренировать память, мышление.

Кроссворды, применяемые для контроля знаний, подразделяются на кроссворды для текущей, тематической или обобщающей проверки. Первые направлены на проверку базовых знаний учащихся по текущему материалу, количество вопросов в них составляет 10–12. Вторые – на проверку базовых и дополнительно полученных знаний по определённой теме, в них рекомендуется использовать не более 15–25 вопросов. Третьи – на общую проверку знаний по большому блоку материала (за полугодие, год), количество вопросов в них 15–25. Это дополнительный метод к известным методам контроля, но не альтернативный им, поскольку не дает возможности проверить глубину понимания изученного материала.

Викторина – это совокупность не менее десяти вопросов по определенной тематике, на которые необходимо дать краткие и емкие ответы. Викторины, как средство обучения, можно включать в учебный процесс на начальной стадии урока или на стадии его завершения. Первый вариант позволяет реализовать контроль или актуализацию знаний, второй способствует закреплению и контролю уровня усвоения материала. Отводимое на работу с викторинами время не должно превышать 5–6 минут.

Сначала учитель объявляет тему викторины. После объявления темы задается не менее десяти вопросов, на которые обучаемые дают ответы.

Далее следует серия обобщающих вопросов или заданий, ответы на которые непосредственно оцениваются учителем.

1.5. Уровни знаний при проверке

Система оценивания в отечественной школе остается 5-бальной.

Система оценивания ЕГЭ по математике иная. За каждое правильно выполненное задание от 1 по 12 зачисляется один балл. За ответы с 13 по 15 номер начисляется от 0 до 2 баллов, 16-17 – максимальное количество баллов – 3, 18–19 – 4 балла за правильный и обоснованный ответ. Количество баллов зависит от сложности задания. Для получения максимального количества необходимо математически грамотно записать развернутый ответ. Методы решения, форма записи может быть разной, но ответ должен быть верным и обоснованным. Если ответ верный, но путь решения не записан, такой ответ не учитывается, начисляется 0 баллов. Проверяется математическое содержимое ответа. Первичные баллы переводятся в 100-бальную шкалу.

Количество уровней при оценивании в ходе занятий должно быть невелико, раскрытие и их конкретизация должны быть посильными для каждого учителя без специального обучения. В соответствии с требованиями программы по математике предлагалось выделять следующие уровни при проверке достижения целей обучения в V–XI классах (табл. 1)

Таблица 1

Уровни усвоения и стадии освоения знаний

Уровни	**Значение**
I низкий	Запоминание информации
II средний	Понимание информации
III выше среднего	Применение знаний в знакомой ситуации
IV высокий	Применение знаний в новой ситуации

1.6. Значение контроля

Большое обучающее и воспитывающее значение имеет своевременная и педагогически правильная оценка учебных успехов учащихся, стимулирующая их познавательную деятельность. Важной задачей контроля знаний, умений и навыков обучающихся является воспитание у них чувства ответственности и добросовестности в ходе выполнения учебных заданий. Контроль знаний, умений и навыков дает необходимый учебный и воспитательный эффект только тогда, когда он проводится своевременно и систематически, чтобы имелась возможность вовремя выявить и исправить ошибки, оказать необходимую помощь. Для обучающихся контроль их учебных успехов является стимулирующим фактором, во многом определяющим мотивы учебного труда.

Контролируя знания, умения и навыки обучающихся, учитель оценивает их. Оценка должна быть объективной и справедливой. Правильно поставленная оценка помогает учащимся правильно оценить свои возможности и направить необходимую энергию на осуществление реальных перспектив.

Правильно организованный контроль знаний, умений и навыков учащихся должен быть, с одной стороны, всесторонним, т.е. охватывать все стороны учебной деятельности учащихся при изучении учебного материала, с другой стороны, дифференцированным, т.е. охватывать каждый узловой вопрос программы. Только такое единство всех сторон контроля может обеспечить соответствующий учебный и воспитательный эффект.

Контроль и оценка учебных успехов учащихся должны осуществляться с учетом индивидуальных особенностей учащихся. В ряде случаев следует принимать во внимание такие качества отдельных учащихся, как робость или застенчивость, замедленность в мышлении, излишняя самоуверенность, физические недостатки. Необходимо учитывать также и временные затруднения отдельных учащихся, вызванные какими-либо уважительными причинами.

Дифференцированный подход к контролю знаний, умений и навыков учащихся проявляется также в учете их производственного опыта и уровня общеобразовательной подготовки на различных этапах учебной работы.

Каждый из рассмотренных выше методов проверки и оценки знаний имеет плюсы и минусы. Контрольные письменные работы полезны тем, что дают возможность проверять и оценивать одновременно знания всех учащихся класса или группы, но они требуют много времени и поэтому не могут проводиться часто.

Отсюда следует вывод: в системе учебной работы могут находить применение практически все рассмотренные выше методы проверки и оценки знаний с тем, чтобы обеспечить необходимую систематичность и глубину контроля над качеством успеваемости обучающихся [12].

Место, в которое целесообразно поместить проверку в процессе обучения, определяется ее целями. Контроль нужен на разных этапах обучения и на разном уровне: тематический, четвертной учет, экзамены и т.д. Основная цель проверки как для учащихся, так и для учителя, – выяснить, усвоили ли учащиеся необходимые знания и умения по данной теме или разделу. Основная функция в этом случае – контролирующая.

В обучении математике используют все виды контроля.

ГЛАВА 2. КОНТРОЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ К ТЕМЕ «ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ»

Понятие интеграла является одним из основных в математике. Интегралы ввели в школьную программу в связи с реформами образования конца 60-х – начала 70-х годов XX века. Специфика рассуждений, свойственная математическому анализу способствует формированию представлений о математике как развивающейся науке, позволяет учащимся совершить следующий шаг в обобщении полученных ими знаний из курса элементарной математики, способствует формированию качеств мышления, необходимых образованному человеку.

Знакомство с интегральным исчислением завершает школьный курс математического анализа, знакомит учащихся с новым инструментом познания мира, а рассмотрение в школе применения интегрального исчисления к важнейшим разделам физики показывает учащимся значение математики для общественной практики.

2.1. Структура раздела «Первообразная и интеграл» в школьном курсе математики

Трудности, возникающие при изучении этой темы в средней школе, вызваны высоким уровнем абстракции понятий, сложной логической структурой их определений. Поэтому улучшить усвоение понятия интеграла учащимися можно за счет постоянного контроля освоения вопросов тем [14].

Название темы «Первообразная и интеграл» связывает два важных понятия математического анализа, которую открыли немецкий ученый Готфрид Вильгельм Лейбниц и английский ученый Исаак Ньютон. Она выражена в известной формуле, носящей их имена. Раздел, в котором излагаются названные понятия и их приложения, называется интегральным исчислением, которое воз никло из потребности вычислять площади любых фигур и поверхностей, а также объемы произвольных тел.

Предыстория интегрального исчисления восходит к глубокой древности, еще к «методу исчерпывания» Архимеда (III в. до н.э.). Появление интегрального исчисления, как и связанного с ним дифференциального исчисления, в настоящем смысле этого слова относится к последней трети XVII в.

Основная операция интегрирования – нахождение первообразной по данной функции – является обратной к операции дифференцирования – нахождение производной для данной функции. Первообразная – значит, первоначальная, т.е. та, из которой образуется (путем дифференцирования) функция (первичный образ). В термине «первообразная» иногда делают ударение на втором звуке «о», опираясь на коренное слово первообраз, но в соответствии со словарем русского языка ударение ставится на звуке «а», о чем необходимо сообщить учащимся. Термин «интеграл» имеет латинское происхождение и переводится как «приводить в прежнее состояние, восстанавливать (операция интегрирования «восстанавливает» функцию, дифференцированием которой получена подынтегральная функция) или объединять в одно целое (нахождение площади фигуры по ее частям)».

В математическом анализе рассматриваются разные виды интегралов, в школе:

1) неопределенный интеграл от функции, который обозначает множество всех первообразных данной функции;

2) определенный интеграл от функции , в котором указаны пределы интегрирования и он напрямую связан с площадью криволинейной трапеции («настоящий» интеграл, вполне определенный).

Вычисление первообразных названо интегрированием, поскольку это есть вычисление неопределенного интеграла. Формула Ньютона–Лейбница устанавливает связь между поиском первообразной и измерением площадей.

В учебниках встречается различный порядок изложения вопросов интегрального исчисления, особенно это касается первообразной и определенного интеграла (сначала первообразная, затем интеграл или наоборот); разные формулировки определений понятий, например, определенный интеграл как приращение первообразной, как предел интегральных сумм (так он исторически возник), как площадь криволинейной трапеции.

Учебники отличаются и объемом материала, предложенного для изучения. В общеобразовательных классах он сведен к минимуму и предполагает ознакомление только с понятием первообразной и применением ее к вычислению площади криволинейной трапеции, опираясь на интуицию и опыт учащихся. Существенную помощь окажет использование метода аналогии, его использование обусловлено тем, что операции дифференцирования и интегрирования «похоже» устроены (обе операции взаимно обратные). В методической литературе даже существует рекомендация совместного изучения этих операций.

Изучение первообразной начинают с беседы о взаимно обратных операциях (действиях), уже известных учащимся, а затем на нескольких примерах вспомнить операцию дифференцирования – для функции найти ее производную и поставить вопрос об обратной операции – по производной найти (восстановить) функцию, которую дифференцировали, воспользовавшись соответствующими табличными записями, и выяснить, как проверить. Дается определение с использованием обозначений. Эту символическую запись можно прочесть по- разному: – производная функции или – первообразная для функции .

В отличие от производной, которая сначала определялась в точке, а затем на промежутке, первообразная сразу определяется на промежутке. Следующий шаг состоит в том, чтобы показать, что операция интегрирования в отличие от операции дифференцирования не однозначна – существует бесконечное множество (семейство) первообразных для данной функции, отличающихся друг от друга на величину действительной константы.

Первообразная функции есть функция, поэтому можно говорить о ее аналитическом и графическом способах задания. В учебниках такие графики обычно даются в абстрактном виде. Поэтому лучше привести конкретный пример для графиков первообразных функции – их графики получаются друг из друга параллельным переносом вдоль оси ординат. Для функции можно выделить конкретную первообразную, график которой проходит через данную точку.

Для отыскания первообразной заданной функции нужно хорошо знать таблицу производных и уметь применять ее в обратной последовательности. Можно составить таблицу первообразных для возможных простых случаев.

В общем случае операция интегрирования заметно сложнее операции дифференцирования: вычисление производных – задача алгоритмическая, а вычисление первообразных (неопределенное интегрирование) иногда называют предметом «высокого искусства». Продифференцировать можно любую элементарную функцию и в результате получить элементарную функцию, но не для всякой элементарной функции первообразная есть элементарная функция; в ряде случаев первообразную даже нельзя вычислить. При отыскании первообразных, как и при нахождении производных, используются правила, но только три: для первообразной суммы, о постоянном множителе, первообразной для линейной функции.

Сопоставление правил интегрирования и дифференцирования значительно облегчает процесс их усвоения и запоминания. Правил о произведении и частном нет для отыскания первообразной. При вычислении первообразной желательно предлагать задачи с физическим содержанием (например, на свободное падение тел), которые могут предшествовать введению понятия в целях его мотивации.

Центральным вопросом в изучении темы является вычисление площадей плоских фигур. Основной фигурой здесь считается криволинейная трапеция. Приступая к изучению этого материала, целесообразно повторить с учащимися из курса геометрии понятие площади, вычисление площадей фигур, ограниченных отрезками прямых (треугольник, параллелограмм, трапеция и т.д.) и окружностью или ее частью (круг, сектор, сегмент). Практика требует умения вычислять площади фигур, ограниченных криволинейным контуром (произвольными кривыми линиями). Возникает проблема: «Как вычислять площади фигур?»

Предварительно у учеников должно быть создано представление о криволинейной трапеции как о фигуре, ограниченной в координатной плоскости графиком непрерывной и не меняющей на отрезке. Это достигается с помощью рассмотрения различных рисунков криволинейных трапеций, подчеркивающих их особенности расположения на координатной плоскости. Среди них должны быть и частные случаи, когда графиком является прямая или отрезок, длины перпендикулярных отрезков к оси абсцисс равны нулю.

После этого уже можно перейти к задаче на нахождение площади криволинейной трапеции с помощью понятия первообразной. Задачу можно вначале сформулировать для конкретной функции (например, или) и решить ее, а затем решить ее в общем виде для функции , которая и приведет нас к формуле , где – одна из первообразных для функции . В учебниках чаще всего сразу же рассматривают задачу в общем виде и формулируют ее в виде теоремы, доказательство которой не считается обязательным для всех учащихся.

Необходимо обращать внимание учащихся на правильное выполнение рисунка криволинейной трапеции в соответствии с условием задачи, выделяя ее штриховкой. Наглядная иллюстрация помогает понять, а затем решить задачу. В ответе следует указывать размерность в квадратных единицах. Другой подход к задаче вычисления площади криволинейной трапеции (не связанный с первообразной) приводит к понятию определенного интеграла (или просто интеграла) и его геометрической иллюстрации (интеграл –

площадь). Решение задачи сводится к замене криволинейной трапеции так называемой «ступенчатой фигурой», состоящей из прямоугольников, площадь которой является приближенным значением площади криволинейной трапеции. Сумму в некоторых учебниках называют интегральной суммой функции на отрезке.

При сравнении двух формул, полученных при различных подходах к решению задачи о площади криволинейной трапеции, получается новая, называемая формулой Ньютона – Лейбница. Вычисляя по ней интеграл, сначала находят первообразную, а затем осуществляют двойную подстановку. Необходимо помнить, что формула справедлива для любой функции, непрерывной на отрезке. Важно отработать навыки применения формулы к решению несложных упражнений на вычисление интегралов и площадей криволинейных трапеций. Постепенно идет усложнение упражнений на вычисление площадей [14].

Кроме задач на вычисление площадей в учебнике А.Н. Колмогорова и др. рассматривается вычисление объемов тел, исходя из наглядных соображений. Выводится формула объема тела. Предлагаются и другие конкретные задачи, решая которые учащиеся знакомятся с применением интеграла в физике (работа переменной силы, центр масс, сила давления жидкости, электрический заряд и др.).

На изучение раздела отводится от 8–10 до 20 академических часов.

Основные темы [12]:

1. Первообразная и неопределенный интеграл.

2. Определенный интеграл, его вычисление и свойства.

3. Вычисление площадей плоских фигур. Примеры применения интеграла в физике.

2.2. Требования к результатам обучения

В соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом (ФГОС) обучающиеся должны ***знать***:

– понятия «Первообразная» и «Неопределенный интеграл»;

– правила нахождения первообразных основных элементарных функций;

– формулу Ньютона–Лейбница.

Обучающиеся должны ***уметь***:

- пользоваться понятиями «Первообразная» и «Интеграл»;
- находить первообразные функции;
- вычислять интегралы;
- вычислять площадь криволинейной трапеции;
- решать дифференциальные уравнения;
- решать прикладные задачи [15].

Личностные, метапредметные и *предметные результаты* освоения учебного предмета. Изучение математики на старшей ступени среднего (полного) общего образования дает возможность обучающимся достичь следующих результатов развития [15]:

1) личностные:

– умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры;

– представление о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах ее развития, о ее значимости для развития цивилизации;

– умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности;

– способность к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений;

2) метапредметные:

– первоначальные представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники, о средстве моделирования явлений и процессов;

– умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других дисциплинах, в окружающей жизни;

– умение находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, и представлять ее в понятной форме; принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации;

– умение понимать и использовать математические средства наглядности (графики, диаграммы, таблицы, схемы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации;

– умение выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки;

– понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом;

3) предметные:

– овладение базовым понятийным аппаратом по основным разделам содержания; представление об основных изучаемых понятиях (число, уравнение, функция, вероятность) как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать реальные процессы и явления;

– умение работать с математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли в устной и письменной речи с применением математической терминологии и символики, использовать различные языки математики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;

– овладение системой функциональных понятий, функциональным языком и символикой; умение использовать функционально- графические представления для описания и анализа реальных зависимостей; • овладение основными способами представления и анализа статистических данных; наличие представлений о статистических закономерностях в реальном мире и о различных способах их изучения, о вероятностных моделях; • умение применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, калькулятора, компьютера.

У обучающихся должны быть сформированы *универсальные учебные действия*:

1) *регулятивные:* планирование и контроль способа решения; оценивать правильность выполнения действия;

2) *познавательные:* владеть общим приёмом решения задач; строить речевое высказывание в устной и письменной форме;

3) *коммуникативные:* умения договариваться и приходить к общему решению совместной деятельности, в том числе в ситуации столкновения интересов; контролировать действие партнёра.

Осуществляемый контроль знаний: устный опрос; самостоятельные и проверочные работы, контрольная работа.

2.3. Тема «Первообразная»

2.3.1. Тестовые задания на этапе актуализации знаний. На первом уроке по теме «Первообразная» на этапе актуализации знаний можно дать учащимся выполнить тест (на 15 минут).

Цель: подготовка к восприятию нового материала; повторение темы «Производная, правила дифференцирования».

Инструкция для обучающихся по выполнению работы:

«Ребята, перед вами лежат тесты. Выполняя задание теста, записывайте в тетрадь букву, стоящую перед выбранным вами ответом».

Работа состоит из 13 заданий. На выполнение отводится 15 минут.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком.

Найдите производную функции:

№	Функция	Варианты ответов	
1.	$y=7x-9$	*М*	$y'=-7$
		К	$y'=7x$
		П	$y'=7$
2.	$y=\sin 2x$	*А*	$y'=\cos 2x$
		Е	$y'=2\cos 2x$
		О	$y'=-\cos 2x$
3.	$y=\cos 3x$	*Р*	$y'=-3\sin 3x$
		В	$y'=-3\cos x$
		Н	$y'=3\sin 3x$
4.	$y=x^3+2x^5$	*У*	$y'=3x^2+5x^4$
		В	$y'=3x^2+10x^4$
		П	$y'=3x+5x^4$
5.	$y=\sin x\cdot\cos x$	*Р*	$y=2\cos x+\sin x$
		О	$y'=\cos 2x$
		К	$y'=\sin 2x$
6.	$y=2\operatorname{tg} 3x$	*С*	$y'=6\operatorname{tg} 3x$
		П	$y'=\dfrac{18}{\cos^2 3x}$
		О	$y=\dfrac{6}{\cos^2 3x}$
7.	$y=e^{2x}$	*Б*	$y'=2e^{2x}$
		М	$y'=e^{2x}$
		Н	$y'=\frac{1}{2}e^{2x}$

8.	$y = log_2(4x + 3)$	Р	$y' = 4 \cdot \frac{1}{(4x+3)\ln 2}$
		О	$y' = \frac{1}{(4x+3)\ln 2}$
		В	$y' = \frac{1}{\ln 2}$
9.	$y = 2^{x+3}$	Р	$y' = 2^{x+3}\ln(x+3)$
		О	$y' = 2^x \ln 2$
		А	$y' = 8\ln 2 \cdot 2^x$
10.	$y = \mathrm{ctg}\, 2x$	Л	$y' = 2\mathrm{tg}2x$
		Н	$y' = \frac{2}{\sin^2 2x}$
		З	$y' = -\frac{2}{\sin^2 2x}$
11.	$y = \left((x^2 + 3x)^5\right)$	А	$y' = 5 \cdot (x^2 + 3x)^4$
		Н	$y' = (x^2 + 3x)^4 \cdot (10x + 15)$
		И	$y' = (2x + 3) \cdot (x^2 + 3x)^4$
12.	$y = \sin^2 x$	А	$y' = 2\sin x \cdot \cos x$
		К	$y' = 2\sin x$
		Б	$y' = 2\cos x$
13.	$y = \frac{x^3}{\cos 2x}$	О	$y' = -3x^2 \cdot \sin 2x$
		Я	$y' = \frac{3x^2\cos 2x - 2x^3 \sin 2x}{\cos^2 2x}$
		Л	$y' = 3x^2 \cos 2x$

На выполнение теста дается 15 минут. По истечении указанного времени, тесты сдаются и по полученному слову у учащихся проверяется правильность выполнения теста. Должно получиться слово «Первообразная».

На первом уроке по теме «Определение первообразной и ее общий вид» можно дать вопросы к зачету [8].

2.3.2. Вопросы к зачету по теме «Определение первообразной и ее общий вид»

1. Расскажите о применении интегрирования в механике.
2. Объясните основную цель интегрирования.
3. Дайте определение первообразной функции.
4. Приведите общий вид первообразных для функции $f(x)$.
5. Объясните геометрический смысл основного свойства первообразной.
6. Таблица первообразной.

2.3.3. Текущий контроль. Самостоятельную работу можно дать в начале урока по теме «Таблица первообразных. Три правила нахождения первообразных» на 10–15 минут с проверкой по эталону [10].

<u>Вариант 1.</u>

1.Сформулируйте основное свойство первообразной.

2.Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)$ и напишите ту первообразную, график которой проходит через точку A:

а) $f(x)=x^2+3,\ \ A(1;\,4)$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x},\ \ A\left(\dfrac{3\pi}{4};-2\right)$.

<u>Вариант 2.</u>

Объясните геометрический смысл основного свойства первообразной.

Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)$ и напишите ту первообразную, график которой проходит через точку A:

а) $f(x)=-x^3+2,\ \ A(1;-3)$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x},\ \ A\left(\dfrac{5\pi}{4};-4\right)$.

2.4. Тема «Определенный интеграл»

2.4.1. Вопросы к зачету по теме «Определенный интеграл»

1. Понятие криволинейной трапеции.
2. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
3. Понятие определенного интеграла.
4. Геометрический и физический смысл определенного интеграла.
5. Формула Ньютона-Лейбница.

2.4.2. Текущий контроль. Самостоятельную работу можно дать в начале урока по теме «Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла».

<u>Вариант 1.</u>

1. Задача о площади криволинейной трапеции.
2. Вычислите определенный интеграл:

а) $\int_1^2 (3-2x)^2\,dx$; б) $\int_0^\pi (1+\sin^2 x)dx$.

<u>Вариант 2.</u>

1. Задача о перемещении точки.
2. Вычислите определенный интеграл:

а) $\int_2^3 (5-2x)^2\,dx$; б) $\int_0^\pi (2-\cos^2 x)\,dx$.

2.4.3. Вопросы для проверки домашнего задания.

1. Что называется первообразной?
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Как обозначается неопределенный интеграл? Как читается обозначение?
4. Что такое интегрирование?
5. Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.

6. Допишите на продолжение формул:

- $\int x dx =$
- $\int dx =$
- $\int x^2 dx =$
- $\int \frac{dx}{x} =$
- $\int \frac{dx}{x^2} =$
- $\int \sqrt{x} dx =$
- $\int \sin x dx =$
- $\int \cos x dx =$
- $e^x dx =$

7. Перечислите основные методы интегрирования.

8. Что такое определенный интеграл?

9. Как обозначается определенный интеграл? Как читается обозначение?

10. Сформулируйте свойства определенного интеграла.

11. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?

12. Запишите формулу Ньютона–Лейбница.

Задания для продвинутых учащихся:

13. Решите задачи. Вычислите площадь закрашенной фигуры (рис. 1), используя свойства определенного интеграла. (Ответ: 6)

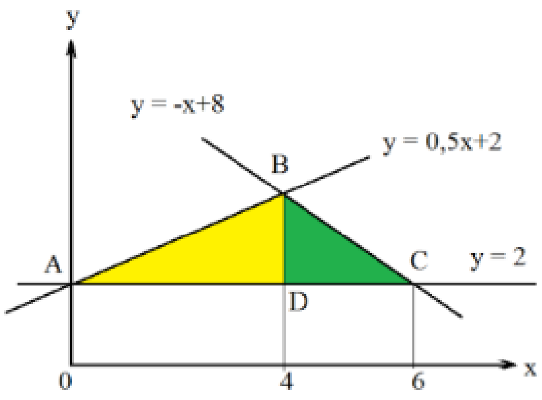


Рис. 1. К заданию 13

14. *Решите задачи. Вычислите площадь закрашенной фигуры (рис. 2), используя свойства определенного интеграла. (Ответ: 2 2/3)

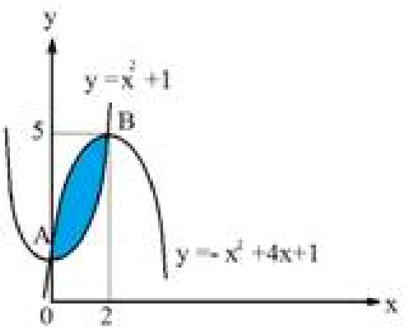


Рис. 2. К заданию 14

15. *Решите задачи. Вычислите площадь закрашенной фигуры (рис. 3), используя свойства определенного интеграла. (Ответ: 4,5)

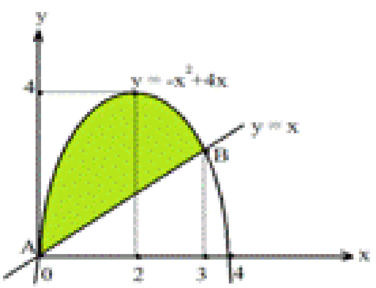


Рис. 3. К заданию 15

16. *Решите задачи. Вычислите площадь закрашенной фигуры (рис. 4), используя свойства определенного интеграла. (Ответ: 9)

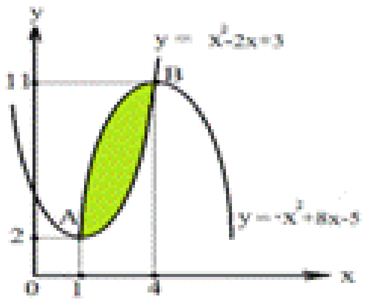


Рис. 4. К заданию 16

2.5. Итоговый контроль по теме «Первообразная и интеграл»

2.5.1. Контрольная работа.

Вариант 1

1. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x\, dx$ б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{x^3 + 3x^2}{x+3} dx$

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 4 - x^2;\ y = 0$ б) $y = 3\cos 2x,\ y = 0,\quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

3. Найдите общий вид первообразных для функции

$$f(x) = (3x-2)^3 - 2\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой

$v(t) = t^2 - 3t + 2$.

Напишите формулы зависимости ее ускорения *a* и координаты *x* от времени *t*, если в начальный момент времени (t=0) координата $x = -5$.

<u>Вариант 2</u>

1. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$; б) $\int\limits_{3}^{4} \frac{x^3 - 2x^2}{x-2} dx$

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 9 - x^2;\ y = 0$ б) $y = 4\sin 3x,\ y = 0,\quad 0 \le x \le \frac{\pi}{3}$.

3. Найдите общий вид первообразных для функции

$f(x) = (5x-3)^2 + 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

4. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой

$v(t) = t^2 + 4t + 3$.

Напишите формулы зависимости ее ускорения *a* и координаты *x* от времени *t*, если в начальный момент времени (t=0) координата $x = -2$.

<u>Вариант 3</u>

1. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}\right) dx$; б) $\int\limits_{1}^{4} \frac{x^2 + x\sqrt{x} + x}{\sqrt{x}} dx$

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = \sin^2 x \cos x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$;

б) $y = x^2,\ y = 5x - 4$

3. Найдите все первообразные функции $f_1(x) = x^2$, графики которых касаются параболы $f_2(x) = x^2 + 1$.

4. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой

$$\upsilon(t) = 5\sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right).$$

Напишите формулы зависимости его ускорения а и координаты x от времени t, если при $t = \frac{\pi}{2}$ координата $x = \frac{9}{4}$. В этот момент времени найдите a и υ.

Вариант 4

1. Вычислите интеграл:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}\right)dx;$ б) $\int_1^4\frac{2x^2+3x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}dx;$

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = \cos^2 x\sin x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2};$

б) $y = x^2, y = 3x - 2$

3. Найдите все первообразные функции $f_1(x) = -x^2$, графики которых касаются параболы $f_2(x) = x^2 - 3$.

4. Скорость прямолинейно движущегося тела задана формулой

$$\upsilon(t) = 4\cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right).$$

Напишите формулы зависимости его ускорения a и координаты x от времени $t = \frac{\pi}{3}$ координата $x = \frac{5}{3}$. В этот момент времени найдите a и υ.

Вариант 5

1. Вычислите интеграл:

а) $\int_0^2\left(\sqrt[3]{1+x}+3+2x\right)dx;$ б) $\int_1^{\frac{\pi}{6}}\sin 2x\cos x\,dx;$

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = \begin{cases} 1-|x| & при \ -1 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ \cos\dfrac{2\pi}{3}x & при \ \dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{3}{4}, \end{cases} \qquad y = 0$

б) $y = \sin^4 x, y = 0,\ 0 \le x \le \pi.$

3. Для функции $f(x) = (x^2+5x+6)^{-1}$ найдите общий вид первообразных.

4. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $A(1;2)$, у которой тангенс угла наклона касательной в каждой точке в три раза больше квадрата абсциссы этой точки.

2.5.2. Зачетная работа по теме «Первообразная и интеграл».

<u>Вариант 1.</u>

<u>Часть А.</u>

1.Докажите, что функция $F(x) = 3+4\sin 2x$ является первообразной для функции $f(x) = 8\cos 2x$ при $x \in R$.

2. Для функции $f(x) = \sqrt{5x-1}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $A(2;4)$. Постройте график этой функции.

3. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x) = 2(3x+1)^5$; б) $f(x) = 3\cos 5x - \dfrac{4}{\sin^2 2x}$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = x^3 + 2,\ y = 0,\ x = -1,\ x = 2$

5. Найдите площадь криволинейной фигуры – луночки, ограниченной синусоидами

$y = 3\sin x$ и $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$.

6. Точка движется по прямой со скоростью $v(t)=4+\sin(\pi t)$. Найдите путь, пройденный точкой за время от $t_1=1$ до $t_2=5$.

Часть B.

7. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y=8\cos x$, $x=0$, $0\le x\le\dfrac{\pi}{3}$.

8. Найдите неопределенные интегралы (первообразные):

а) $\int \sin^2 3x \cos 5x\,dx$; б) $\dfrac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-4}}$.

9. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)=x^3-3x$ и касательной к этому графику, проведенной в точке $a=-1$.

Часть C.

10. Найдите $\int\dfrac{5x+1}{x^2+x-2}dx$.

11. Из геометрический соображений вычислите интеграл

$$\int_{-2}^{2}\left(5+\sqrt{4-x^2}\right)dx.$$

12. Из точки $O(0;c)$ проведены касательные к параболе $f(x)=1-x^2$. При каком значении c площадь фигуры, ограниченной этими касательными и параболой равна 18?

Вариант 2.

Часть A.

1. Докажите, что функция $F(x)=7+5\cos 3x$ является первообразной для функции $f(x)=-15\sin 3x$ при $x\in R$.

2. Для функции $f(x)=\sqrt{7x-3}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $A(1;2)$. Постройте график этой функции.

3. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=3(4x+5)^6$; б) $f(x)=2\cos 3x-\frac{6}{\sin^2 5x}$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$y=x^3+4,\ y=0,\ x=-1,\ x=2$

5. Найдите площадь криволинейной фигуры – луночки, ограниченной линиями $y=4\cos x$ и $y=\cos x$, $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

6. Точка движется по прямой со скоростью $v(t)=6t-2\sin \pi t$. Найдите путь, пройденный точкой за время от $t_1=3$ до $t_2=5$.

<u>Часть В.</u>

7. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$y=\frac{1}{\sin^2 x}$, $y=8\sin x$, $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

8. Найдите неопределенные интегралы (первообразные):

а) $\int \cos^2 3x \sin 7x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}}$.

9. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+5$ и касательной к этому графику, проведенной в точке $a=-1$.

<u>Часть С.</u>

10. Найдите $\int \frac{5x}{x^2-x-6}dx$.

11. Из геометрический соображений вычислите интеграл

$\int_{-3}^{3}\left(6-\sqrt{9-x^2}\right)dx$.

12. Из точки $O(0;c)$ проведены касательные к параболе $f(x)=3-x^2$. При каком значении c площадь фигуры, ограниченной этими касательными и параболой, равна 144?

2.6. Задания по теме «Первообразная и интеграл» в государственной итоговой аттестации обучающихся

Контрольно-измерительные материалы для проведения итоговой аттестации в 11 классе содержат задания по теме «Первообразная и интеграл» [4].

В кодификаторе элементов [5] содержания для составления контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена по математике (рис. 5) перечислено следующее:

Тема: Первообразная и интеграл

Код контролируемого элемента и элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы:

4.3.1. Первообразные элементарных функций.

4.3.2. Примеры применения интеграла в физике и геометрии.


«УТВЕРЖДАЮ»
Директор
ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
О.А. Решетникова
« » 2017 г.

«СОГЛАСОВАНО»
Председатель
Научно-методического совета
ФГБНУ «ФИПИ» по математи
А.Л. Семенов
«10» ноября 2017 г.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Кодификатор
элементов содержания по МАТЕМАТИКЕ
для составления контрольных измерительных материалов для
проведения единого государственного экзамена

Рис. 5. Кодификатор элементов содержания КИМ

В кодификаторе требований [5] приведено умение выпускника (рис. 6): Код 3.2. Вычислять производные и первообразные элементарных функций

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор
ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
О.А. Решетникова
«10» ноября 2017 г.

«СОГЛАСОВАНО»
Председатель
Научно-методического совета
ФГБНУ «ФИПИ» по математике
А.Л. Семенов
«10» ноября 2017 г.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

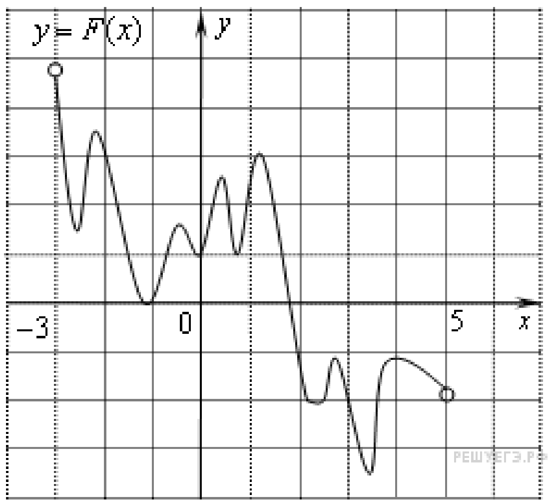
Кодификатор
требований к уровню подготовки выпускников
образовательных организаций для проведения
единого государственного экзамена
по математике

Рис. 6. Кодификатор требований

В тест, в первую часть, включены два задания из математического анализа: № 7 и № 12, из которых первый – по теме «Первообразная и интеграл».

Приведем несколько типичных заданий № 7 из открытого банка ЕГЭ 2014–2018 гг. [4, 5]:

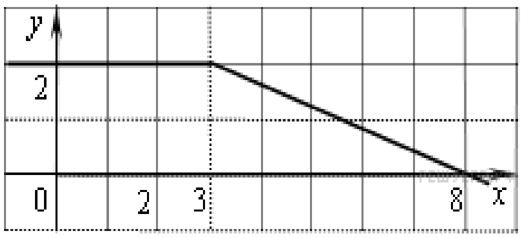
Задание 1. На рисунке изображен график функции $y = F(x)$ – одной из первообразных функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3;\ 5)$. Найдите количество решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[-2;\ 4]$.



Ответ: 10 (точки перегиба на $x\in[-2;4]$).

Задание 2. На рисунке изображён график некоторой функции $F(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8)-F(2)$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.

*Решение***.** $S=\frac{1}{2}\cdot(6+1)\cdot 2=7$.

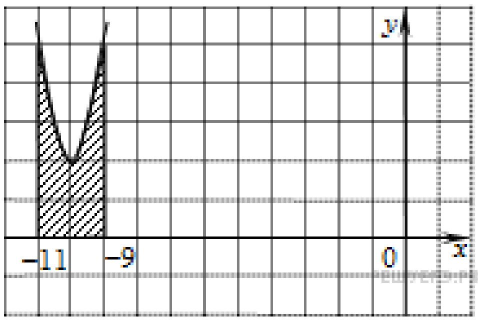


Ответ: 7.

Задание 3. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Функция

$$F(x)=x^3+30x^2+302x-\frac{15}{8}$$

– одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Решение. Площадь выделенной фигуры равна разности значений первообразных, вычисленных в точках –9 и –11. Имеем:

$$F(-9)=(-9)^3+30\cdot(-9)^2+302\cdot(-9)-\frac{15}{8}=-729+2430-2718-\frac{15}{8}=-1018\frac{7}{8}.$$

$$F(-11)=(-11)^3+30\cdot(-11)^2+302\cdot(-11)-\frac{15}{8}=-1331+3630-3322-\frac{15}{8}=-1024\frac{7}{8}.$$

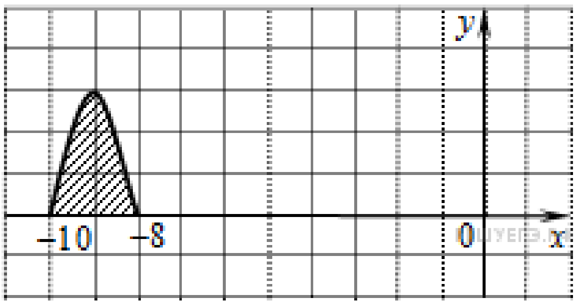
$$F(-9)-F(-11)=-1018\frac{7}{8}+1024\frac{7}{8}=6.$$

Ответ: 6.

Задание 4. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция

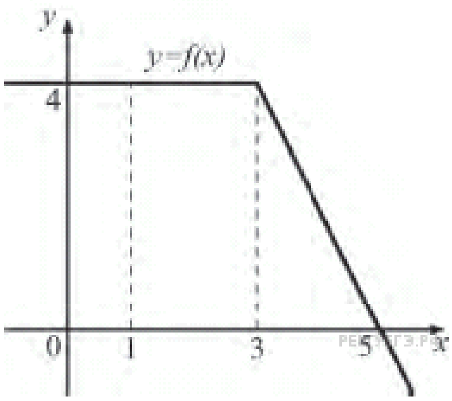
$F(x) = -x^3 - 27x^2 - 240x - 8$

одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Ответ: 4.

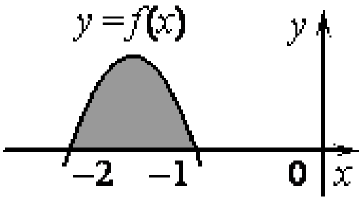
Задание 5. На рисунке изображен график некоторой функции. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл.



Ответ: 10.

Задание 6. На рисунке изображён график некоторой функции. Функция $F(x) = x^3 + 9x^2 + 26x$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Решение.

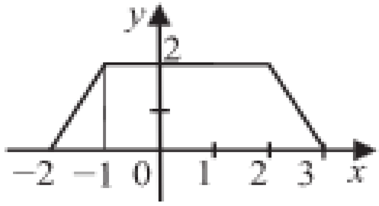


Ответ:

Задание 7.. На рисунке изображён график функции

$y = f(x) = 5|x+1| - |x-2|$.

Пользуясь рисунком, вычислите определённый интеграл $\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

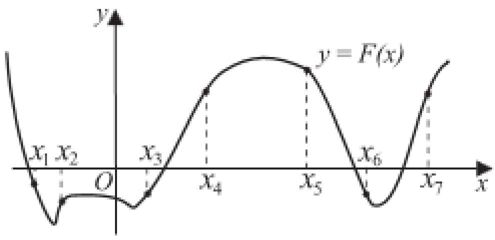


Решение. $S=\frac{1}{2}\cdot(3+4)\cdot 2=7$

Ответ: 7.

Задание 8. На рисунке изображен график функции $y=F(x)$, где $F(x)$ - первообразная функции $y=f(x)$. Найдите среди точек $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ те, в которых функция $f(x)$ положительна. В ответе запишите количество найденных точек.

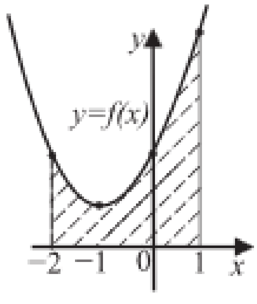
Решение. Производная $F'(x)=f(x)$ положительна там, где функция $F(x)$ возрастает. Такими точками являются x_2, x_3, x_4, x_7.



Ответ: 4.

Задание 9. На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна $F(x)=\frac{2x^3}{3}+2x^2+3x$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

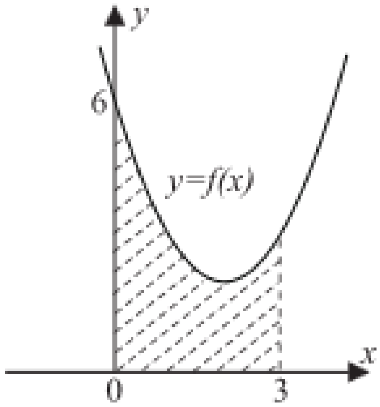
Решение. Воспользуемся формулой Ньютона–Лейбница для нахождения площади криволинейной трапеции.



$S = \left(\frac{[illegible]^3}{3} [illegible]\right) - \left(\frac{[illegible]^3}{3} [illegible]\right)$

Ответ: S=9.

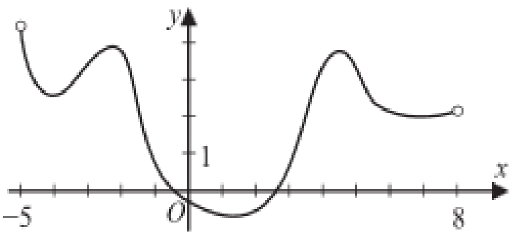
Задание 10. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - 4$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



Решение. $S = \int_0^3 f(x)dx = \left(\frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 - 4\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 2 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 - 4\right)$

Ответ: S=9.

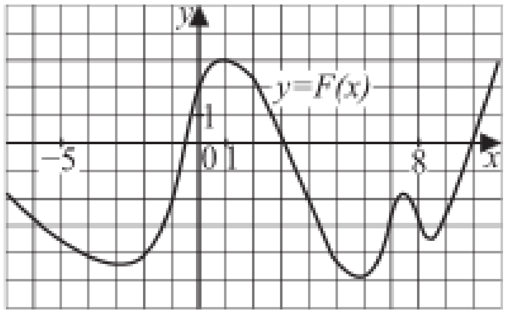
Задание 11. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5;8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции F(x), которая является первообразной для функции $y = f(x)$, параллельна прямой y=3x+8 или совпадает с ней.



Решение. Дан график производной. По графику производной можно определить знаки производной (+-+). Значит, функция возрастает на двух промежутках, а следовательно, количество точек в которых касательная к графику функции параллельна или совпадает равно двум.

Ответ: 2.

Задание 12. На рисунке изображён график функции $y = F(x)$, где $F(x)$ - первообразная функции $y = f(x)$. Найдите количество точек на промежутке [−5;8], в которых функция $f(x)$ равна нулю.



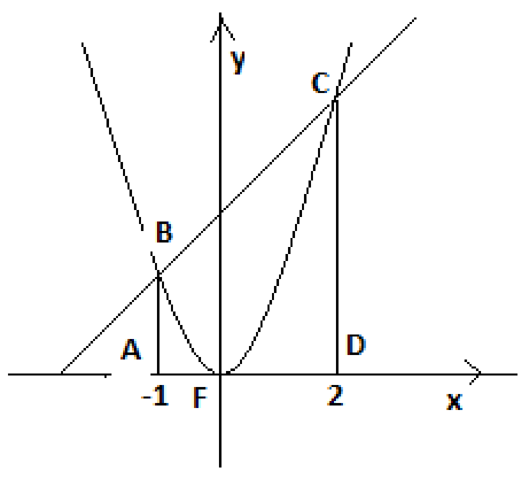
Решение. На промежутках убывания производная имеет отрицательный знак, на промежутках возрастания производная имеет положительный знак. Значит, производная равна нулю в четырех точках.

Ответ: 4.

Задание 13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$, $y = x + 2$.

Решение. Найдем абсциссы точки пересечения графиков: –1 и 2.

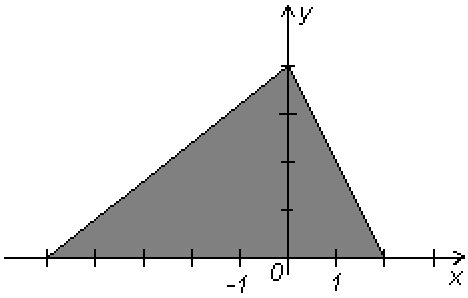
$$S = S_{BCDA} - S_{ABF} - S_{FCD}$$



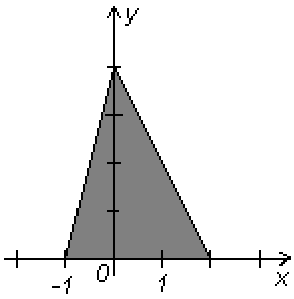
Задание 14. Найдите объем тела, полученного от вращения вокруг оси *Ox* трапеции, образованной прямыми $y = \frac{x}{2}$, $x = 4$, $x = 6$ и осью абсцисс.

Задание 15. Найдите объем тела, полученного от вращения вокруг оси *Oy* трапеции, образованной прямыми $y = 3x$, $y = 2$, $y = 4$ и осью ординат.

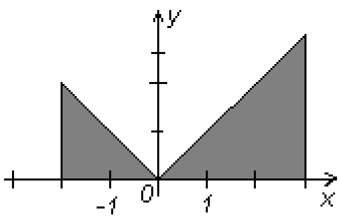
Задание 17. Найдите площадь закрашенной фигуры



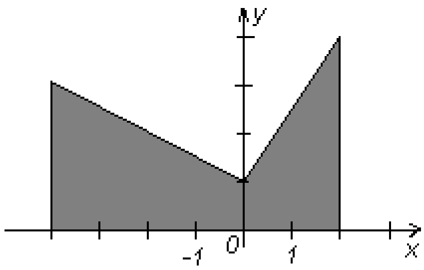
Задание 18. Найдите площадь закрашенной фигуры



Задание 19. Найдите площадь закрашенной фигуры



Задание 20. Найдите площадь закрашенной фигуры



Государственный выпускной экзамен (ГВЭ) в отличии от ЕГЭ не имеет стандартизированной формы, может быть устным и/или письменным, при его проведении могут использоваться билеты, тексты и различные типы заданий. Его сдают те учащиеся, кто по ряду причин не имеет возможности проходить ГИА в форме ЕГЭ (дети-инвалиды; пребывающие в местах лишения свободы и специальных учебных заведениях закрытого типа;

находящиеся за пределами территории Российской Федерации и т.п.). На экзамене проверяется сформированность представлений выпускников о математике как универсальном языке науки, об идеях и методах математики, овладение математическими знаниями и умениями, соответствующими базовому уровню Федерального компонента государственного стандарта общего образования (приказ Минобразования России от 05.03.2004 № 1089 «Об утверждении федерального компонента государственных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования»).

Теоретические вопросы билетов охватывают «Начала математического анализа» (тема «Производная»). От экзаменуемого требуется воспроизвести определение, формулировку теоремы и ее доказательство, привести необходимые иллюстрирующие примеры, найти наибольшее или наименьшее значение функции на отрезке, т.е. тема «Первообразная и интеграл» не контролируются. Формулировки и доказательства могут различаться в зависимости от учебников, по которым экзаменуемый обучался и готовился к экзамену.

Таким образом, анализируя сказанное выше, можно утверждать, что проверка знаний умений и навыков учащихся – сложный этап процесса обучения. Сложности вызывает у учителя и у учащихся. Для учителя он сложен в теоретическом, методическом и организационном отношении, а для школьников – в психологическом плане.

В одной разработке невозможно рассмотреть все вопросы, связанные с такой сложной и многогранной проблемой, как проверка знаний, умений и навыков школьников по математике. Были перечислены и разобраны лишь основные, наиболее существенные, на мой взгляд, виды проверки.

Поскольку каждый из вышеперечисленных способов проверки знаний учащихся имеет свои достоинства и недостатки и позволяет эффективно проверить лишь определенный круг знаний и умений, нельзя отдавать предпочтение какому-либо одному из них; целесообразно лишь оптимальное их сочетание.

В определении системы проверки и учета знаний, умений и навыков учащихся каждый учитель должен исходить из дидактических и методических требований к этой части процесса обучения, широко используя самые разнообразные ее формы и методы.

При особом психологическом подходе к организации контроля у учащихся появляется интерес к проверке их знаний, а сочетание разнообразных форм и методов контроля приводит к активизации умственной деятельности учащихся.

Применение разнообразных форм и методов обеспечивает интерес учащихся к процессу проверки их знаний и умений, способствует их целенаправленной деятельности, что в конечном итоге приводит к совершенствованию процесса обучения и воспитания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы были получены следующие результаты:

– проанализирована научно-методическая и учебная литература по теме исследования: Виленкин Н.Я. Математический анализ. Интегральное исчисление: учеб. пособие для студентов-заочников II курса, Гурина Л.В. Лекции по методике преподавания математики, Кабардин О.Ф. Задания для итогового контроля учащихся по математике в 7–11 классах средней школы, Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа, Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. Ч. I: учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений и другие.

– рассмотрены различные типы, виды, методы и формы контроля;

– рассмотрена последовательность изложения материала раздела «Интегральное исчисление» в действующих учебниках для школ;

– приведено несколько видов контрольно-измерительных заданий для текущего контроля по темам раздела и итогового контроля по разделу;

– проанализировано содержание кодификаторов и задания Единого государственного экзамена по математике: Единого государственного экзамена по математике и Государственного выпускного экзамена (письменная и устная части).

На основе перечисленных результатов нами сформулированы следующие выводы.

1. Контроль знаний учащихся – необходимая составляющая процесса обучения математике, что отмечают все составители разнообразных средств контроля, в том числе заданий ЕГЭ по математике.

2. При обучении математике могут использоваться различные виды, формы и методы контроля. Применение разнообразных форм и методов обеспечивает реализацию дифференцированного подхода к оцениванию результатов обучающихся, повышает интерес учащихся к процессу проверки

их знаний и умений, способствует их целенаправленной деятельности, совершенствуя процесса обучения и воспитания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугаев А.И. Методика преподавания математики в средней школе / А.И. Бугаев. – М.: Просвещение, 1981.
2. Виленкин Н.Я. Математический анализ. Интегральное исчисление: учеб. пособие для студентов-заочников II курса физ.-матем. фак. пед. ин-тов / Н.Я. Виленкин, Е.С. Куницкая, А.Г. Мордкович. – М.: Просвещение, 1979.
3. Гурина Р.В. Лекции по методике преподавания математики / Р.В, Гурвина. – Ульяновск, 2013.
4. Денищева Л.О. Тематические тесты и зачеты для общеобразовательных учреждений // Алгебра и начала анализа. 10–11 кл. / Л.О. Денищева, Т.А. Корешкова; под ред. А.Г.Мордковича. – 2-е изд. –М.: Мнемозина, 2015.
5. ЕГЭ и ГВЭ-11 [Электронный ресурс] // Федеральный институт педагогических измерений. – Электрон. дан. – Режим доступа http://www.fipi.ru/ege-i-gve-11/demoveRsii-sPeciFikacii-kodiFikatoRy (дата обращения 30.04.2018).
6. Задачник по курсу математического анализа: учеб. пособие для студ. заоч. отд. физ.- матем. ф-тов пед. ин-тов. Ч. I / под ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1971.
7. Кабардин О.Ф. Физика. Тесты. 10–11 классы: учеб.-мет. пос. / О.Ф. Кабардин, В.А. Орлов. – М.: Дрофа, 1997.
8. Кабардин О.Ф. Задания для итогового контроля учащихся по математике в 7–11 классах средней школы / О.Ф. Кабардин, С.И. Кабардина, В.А. Орлов. – М.: Просвещение, 1994.
9. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 1998.
10. Кривошапова Р.Ф. Контроль знаний учащихся по физике/ Р.Ф. Кривошапова, В.Г. Разумовский, Н.А. Родина. – М.: Просвещение, 1982.

11. Кривошапова Р.Ф., Силютина О.Ф. Функции проверки и оценки в учебном процессе//Советская педагогика. – 1980. – №11.

12. Мокрова И.И. Математика. 10 класс. Поурочные планы по учебнику Г.Я. Мякишева и др.: В трех частях. – Волгоград: Учитель–АСТ, 2004.

13. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. Ч. I: учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2003.

14. Насибуллина Э.Ф. Некоторые методические особенности изучения темы «Интеграл» в школьном курсе математики [Электронный ресурс] / Э.Ф. Насибуллина, З.В. Шилова // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – Электрон. дан. – 2011. – Режим доступа: http://e-koncept.ru/2011/11204.htm (дата обращения 19.01.2018).

15. Покровский В.П. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия: учеб.-метод. пособие / В.П. Покровский. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2014.

16. Рурукин А.Н., Масленникова И.А., Мишина Т.Г. Поурочные разработки по алгебре и началам анализа. - М.: ВАКО, 2011.

17. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (10–11 кл.) [Электронный ресурс] // Сайт Министерства образования и науки РФ. – утв. приказом Минобрнауки России от 17 мая 2012 г. № 413. – Электрон. дан. – Режим доступа: https://минобр.рф/документы/2365 (дата обращения 19.01.2018).

18. Яндович О.А. Методическая разработка открытого урока. Обобщающее занятие по теме «Неопределенный и определенный интегралы» [Электронный ресурс] // Информио. . – Электрон. дан. – Режим доступа: http://www.informio.ru/publications (дата обращения 19.01.2018).

Приложение 1.

Краткие теоретические сведения

по теме «Первообразная и интеграл»

1. Неопределенный интеграл

Интегрирование – операция, обратная к дифференцированию.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Если функция имеет первообразную, то она имеет их бесконечно много, все они содержатся в выражении $F(x)+C$., где C – произвольная постоянная.

Определение 2. *Неопределенным интегралом* функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных:

$$\int f(x)dx = F(x) + C\,, \qquad (1)$$

где $\int$ – символ интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция,

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x – переменное интегрирования,

dx – дифференциал переменного.

Операция отыскания первообразной (интеграла) называется *интегрированием*.

Пример 1. Покажем, что функция $F(x)=x^2+11$ является первообразной функции $f(x)=2x$.

Решение. По определению первообразной $F'(x) = f(x)$. Тогда $F'(x)=(x^2+11)'=2x$.

Свойства неопределенного интеграла. Правила интегрирования

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$	3) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$	4) $\int d(F(x)) = F(x) + C$
2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$	5) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int f_2(x)dx$	

Таблица основных интегралов

$\int x dx = x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \sqrt{x} dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

Основные методы интегрирования

1. *Непосредственное интегрирование* по свойствам, правилам и таблице интегралов.

Пример 2. Вычислим неопределенные интегралы:

а) $\int (x^3-3x^2+5x-4)dx=\frac{x^{3+1}}{3+1}-3\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1}+5\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1}-4x+C=\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{5x^2}{2}-4x+C$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\int x^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}+C=3x^{\frac{1}{3}}+C=3\sqrt[3]{x}+C$;

2. *Внесение под знак дифференциала* $\int d(F(x))=F(x)+C$.

Пример 3. Вычислим неопределенный интеграл:

а) $\boxed{}$. Заметим, что $d(x^2+5)=(x^2+5)'dx=2xdx$.

Тогда $\int (x^2+5)^7 2xdx=\int (x^2+5)^7 d(x^2+5)=\frac{(x^2+5)^{7+1}}{7+1}+C=\frac{(x^2+5)^8}{8}+C$.

б) $\int \frac{dx}{x-3}=\int \frac{d(x-3)}{x-3}=\ln|x-3|+C$.

$$\boxed{dx=d(x-a)}$$

3. *Замена переменных*: $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. (2)

Пример 4. Вычислим неопределенный интеграл:

а) $\int \sqrt{x^2+6}\cdot 2xdx$

Пусть $x^2+6=t$, тогда $dt=d(x^2+6)=(x^2+6)'dx=2x$.

$\int \sqrt{x^2+6}\cdot 2xdx=\int \sqrt{t}dt=\frac{2\sqrt{t^3}}{3}+C=\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+6)^3}+C$.

б) $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}\,x}dx$. Пусть $\sqrt[3]{x}=t$, тогда $dt=d(\sqrt[3]{x})=(\sqrt[3]{x})'dx=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$,

$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}\,x}dx=\int 3\sin\sqrt[3]{x}\,\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}\,x}=\int 3\sin t\,dt=-3\cos t+C=-3\cos\sqrt[3]{x}+C$.

в) $\int \frac{\ln x}{x}dx$. Пусть $\ln x=t$, тогда $dt=d(\ln x)=(\ln x)'dx=\frac{1}{x}dx$,

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \frac{dx}{x} = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2} \ln^2 x + C \cdot$$

г) $\int e^{5x+7} dx$. Пусть $5x+7=t$, тогда $dt = (5x+7)' dx = 5dx$,

$$\int e^{5x+7} dx = \int \frac{1}{5} e^{5x+7} \cdot 5dx = \frac{1}{5} \int t dt = \frac{1}{5} \cdot \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{10} e^{5x+7} + C.$$

д) $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$. Пусть $\sin x = t$, тогда $dt = (\sin x)' dx = \cos x\, dx$,

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$$

2. Определенный интеграл

Определение 3.

Криволинейная трапеция – фигура, ограниченная прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$ и кривой $y=f(x)$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Рассмотрим ***криволинейную трапецию*** – фигуру, ограниченную прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$ и кривой $y=f(x)$. Разделим отрезок $[a;b]$ на n частей. Площадь одного прямоугольника: $f(\xi_i)\Delta x_i$.

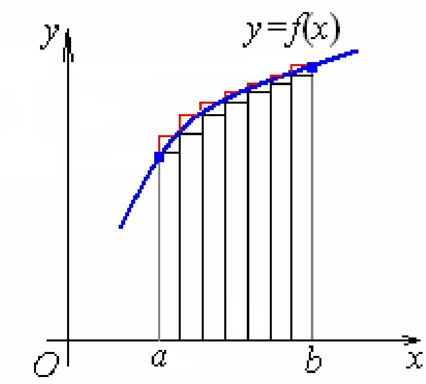


Рис. 7. Интегральная сумма

Определение 3.

Интегральной суммой для функции $f(x)$ называется сумма вида $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Предел интегральной суммы при условии, что наибольший из отрезков разбиения стремится к нулю, называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

$$I=\int_a^b f(x)dx,$$

где числа a и b – нижний и верхний пределы интегрирования.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Определение 3* (по учебнику А.Г. Мордковича) [12].

Определенным интегралом от функции $f(x)$. на отрезке $[a; b]$ называется разность первообразных на границах отрезка (a и b – нижний и верхний пределы интегрирования).

Формула Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Свойства определенного интеграла и правила интегрирования

1) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

2) $\int_b^a f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

5) $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

Основные методы интегрирования

1. *Непосредственное интегрирование* по таблице интегралов и формуле Ньютона-Лейбница.

Пример 5. Вычислить определенный интеграл:

а) $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1$;

в) $\int_1^2 (x^3-2)^2 x^2 dx = \int_1^2 \left(x^8 - 4x^5 + 4x^2\right)dx = \left[\frac{x^9}{9} - \frac{4x^6}{6} + \frac{4x^3}{3}\right]_1^2 =$

$= \left(\frac{2^9}{9} - \frac{4\cdot 2^6}{6} + \frac{4\cdot 2^3}{3}\right) - \left(\frac{1^9}{9} - \frac{4\cdot 1^6}{6} + \frac{4\cdot 1^3}{3}\right) = \frac{89}{3}$

2. *Замена переменной*: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\ \varphi'(t)\ dt$,

где $a = \varphi(t_1), b = \varphi(t_2)$.

Пример 6. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^2 (x^3-2)^2 x^2 dx$.

Замена: пусть $x^3 - 2 = t$,

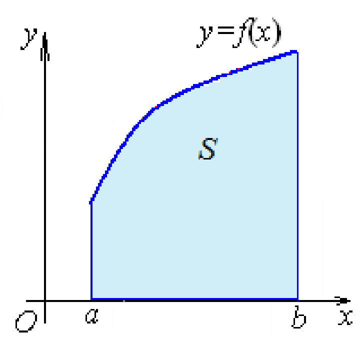
тогда $dt = d(x^3-2) = (x^3-2)' dx = 3x^2 dx$, $t_1 = 1^3 - 2 = -1$, $t_2 = 2^3 - 2 = 6$,

---

$$\int\limits_1^2 (x^3-2)^2 x^2 dx = \int\limits_1^2 \frac{1}{3}(x^3-2)^2 3x^2 dx = \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{6} t^2\, dt = \frac{t^3}{9}\Bigg|_{-1}^{6} = \frac{6^3}{9} - \frac{(-1)^3}{9} = \frac{89}{3}.$$

Геометрические приложения определенного интеграла

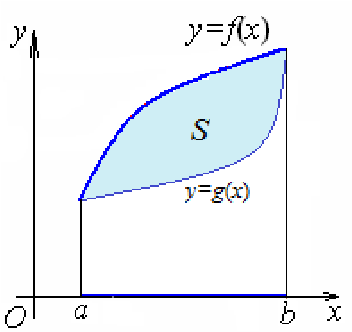
1. **Площадь криволинейной трапеции**. Линии: $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$



$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

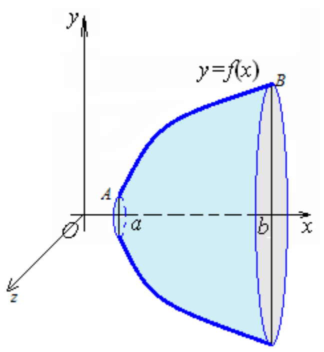
2. **Площадь плоской фигуры.**

- Линии: $y=f(x)$, $y=g(x)$



$$S=S_{f(x)}-S_{g(x)}=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$$

3. **Объем тела вращения**. Линии: $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, ось вращения – Ox



$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Приложение 2.

Ответы и решения контрольных заданий

Ответы к тестовому заданию (2.3.1) на этапе актуализации знаний по теме «Первообразная»

№	Функция	Производная	
1.	$y=7x–9$	*П*	$y'=7$
2.	$y=\sin 2x$	*Е*	$y'=2\cos 2x$
3.	$y=\cos 3x$	*Р*	$y'=-3\sin 3x$
4.	$y=x^3+2x^5$	*В*	$y'=3x^2+10x^4$
5.	$y=\sin x\cdot\cos x$	*О*	$y'=\cos 2x$
6.	$y=2\operatorname{tg}3x$	*О*	$y=\dfrac{6}{\cos^2 3x}$
7.	$y=e^{2x}$	*Б*	$y'=2e^{2x}$
8.	$y=log_2(4x+3)$	*Р*	$y'=4\cdot\dfrac{1}{(4x+3)\ln 2}$
9.	$y=2^{x+3}$	*А*	$y'=8\ln 2\cdot 2^x$
10.	$y=\operatorname{ctg} 2x$	*З*	$y'=-\dfrac{2}{\sin^2 2x}$
11.	$y=\left((x^2+3x)^5\right)$	*Н*	$y'=\left(x^2+3\mathrm{x}\right)^4\cdot(10x+15)$
12.	$y=\sin^2 x$	*А*	$y'=2\sin x\cdot\cos x$
13.	$y=\dfrac{x^3}{\cos 2x}$	*Я*	$y'=\dfrac{3x^2\cos 2x-2x^3\sin 2x}{\cos^2 2x}$

Ответы к самостоятельной работе (2.3.3. Текущий контроль) по теме «Таблица первообразных. Три правила нахождения первообразных» на 10–15 минут с проверкой по эталону [10].

Вариант 1.

1.Сформулируйте основное свойство первообразной.

1. Основное свойство первообразных. Теорема: Любая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f\ (x)$ на промежутке имеет вид $\Phi(x)=F(x)+c,$ где $F(x)$- одна из первообразных для функции $f(x)$ на этом промежутке, c-произвольная постоянная.

2.Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)$ и напишите ту первообразную, график которой проходит через точку A:

а) $f(x)=x^2+3,\ \ A\,(1;\,4)$

если $f(x)=x^2+3,$ то $F(x)=\frac{x^3}{3}+3x+c;A(1;4)$

$$4=\frac{1^3}{3}+3\cdot 1+c$$

$$4-\frac{1}{3}-3=c$$

$c=\frac{2}{3}$. Следовательно $F(x)=\frac{x^3}{3}+3x+\frac{2}{3}$.

Ответ: $F(x)=\frac{x^3}{3}+3x+c$ **;** $F(x)=\frac{x^3}{3}+3x+\frac{2}{3}$

б) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x},\ \ A\left(\frac{3\pi}{4};-2\right)$.

Если $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, то $F(x)=tgx+c$

$$-2=tg\frac{3\pi}{4}+c$$

$$-2=-1+c$$

$$-1=c$$

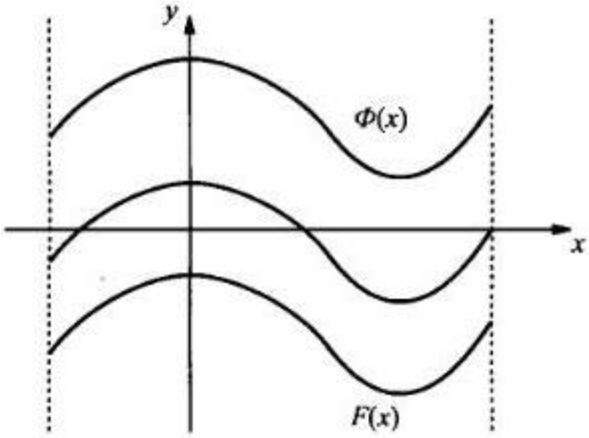
$c=-1$. Следовательно $F(x)=tgx-1$.

Ответ: $F(x)=tgx-1$.

Вариант 2.

1.Объясните геометрический смысл основного свойства первообразной.

Основное свойство первообразной имеет простой геометрический смысл: графики любых двух первообразных $\Phi(x)$ и $F(x)$ для функции $f(x)$ получают друг из друга параллельным переносом вдоль оси ординат.



2.Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)$ и напишите ту первообразную, график которой проходит через точку A:

а) $f(x) = -x^3 + 2,\ \ A\,(1;-3)$

если $f(x) = -x^3 + 2$, то $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x + c;$

$-3 = -\frac{1^4}{4} + 2 \cdot 1 + c$; $\quad -3 - 1\frac{3}{4} = c$; $\quad c = -4\frac{3}{4}$. Следовательно $F(x) = -\frac{x^4}{4} + 2x - 4\frac{3}{4}$.

Ответ: $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x + c;\quad F(x) = -\frac{x^4}{4} + 2x - 4\frac{3}{4}$.

б) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x},\ \ A\left(\frac{5\pi}{4};-4\right)$.

Если $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, то $F(x) = -ctgx + c$

$-4 = -ctg\,\frac{5\pi}{4} + c$; $\quad -4 = -1 + c$; $\quad c = -3$. Следовательно $F(x) = -ctgx - 3$.

Ответ: $F(x) = -ctgx - 3$.

Ответы к самостоятельной работе (2.4.2) по теме «Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла».

Вариант 1.

1. Задача о площади криволинейной трапеции.

2. Вычислите определенный интеграл:

а) $\int_1^2 (3-2x)^2\,dx$;

Решение. $\int_1^2 (3-2x)^2\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(3-2x)}{3}\Big|_1^2 = \frac{(3-2x)^3}{-6}\Big|_1^2 = \frac{(3-2\cdot 2)^3}{-6} - \frac{(3-2\cdot 1)^3}{-6} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

б) $\int_0^{\pi} (1+\sin^2 x)dx$.

Решение. Применим формулу понижения степени к $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Тогда $1+\sin^2 x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$.

$$\int_0^{\pi} (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)\,dx = (\frac{3}{2}x - \frac{1\sin 2x}{4})\Big|_0^{\pi} = \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4}\right) - \left(\frac{3\cdot 0}{2} - \frac{\sin 0}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{2}$.

Вариант 2.

1. Задача о перемещении точки.

2. Вычислите определенный интеграл:

а) $\int_2^3 (5-2x)^2\,dx$;

Решение. $\int_1^2 (5-2x)^2\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(5-2x)^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{(5-2x)^3}{-6}\Big|_2^3 = \frac{(5-2\cdot 3)^3}{-6} - \frac{(5-2\cdot 2)^3}{-6} = \frac{1}{3}$.

б) $\int\limits_0^{\pi}(2-\cos^2 x)\,dx$.

Решение. Применим формулу понижения степени к $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$. Тогда $1+\cos^2 x = \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x$. $\int\limits_0^{\pi}\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{\cos 2x}{2}\right)dx = \left(\dfrac{3x}{2}-\dfrac{\cos 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \left(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\cos 2\pi}{4}\right)-\left(\dfrac{0}{2}-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3\pi}{2}$.

Ответ: $\dfrac{3\pi}{2}$.

Ответы на вопросы для проверки домашнего задания (2.4.3., стр. 41)

1. Что называется первообразной?
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Как обозначается неопределенный интеграл? Как читается обозначение?
4. Что такое интегрирование?
5. Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.
6. Допишите на доске продолжение формул:

- $\int x dx = \dfrac{x^2}{2}+c$
- $\int dx = x+c$
- $\int x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3}+c$
- $\int \dfrac{dx}{x} = Ln|x|+c$
- $\int \dfrac{dx}{x^2} = Ln|x|+c$

- $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + c$
- $\int \sin x dx = \cos x + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$

7. Перечислите основные методы интегрирования.

8. Что такое определенный интеграл?

9. Как обозначается определенный интеграл? Как читается обозначение?

10. Сформулируйте свойства определенного интеграла.

11. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?

12. Запишите формулу Ньютона–Лейбница.

Задания для продвинутых учащихся:

13. Решите задачи. Вычислите площадь закрашенной фигуры (рис. 1), используя свойства определенного интеграла. (Ответ: 6)

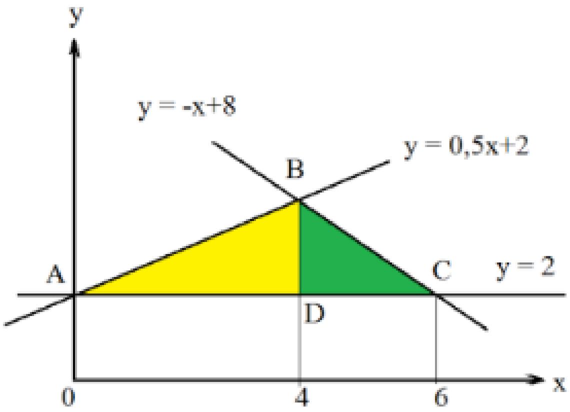


Рис. 1. К заданию 13

Решение. $-x+8=0{,}5+2$**;** $-1{,}5x=-6$

$x=4$**-** абсцисса точки пересечения прямых AB и BC.

$y=-4+8=4$- ордината точки пересечения прямых AB и BC.

$$S_{ABC}=S_{ABC}+S_{BDC}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=4+2=6.$$

Ответ: S = 6.

14. *Решите задачу. Вычислите площадь закрашенной фигуры (рис. 2), используя свойства определенного интеграла. (Ответ: $4\frac{2}{3}$)

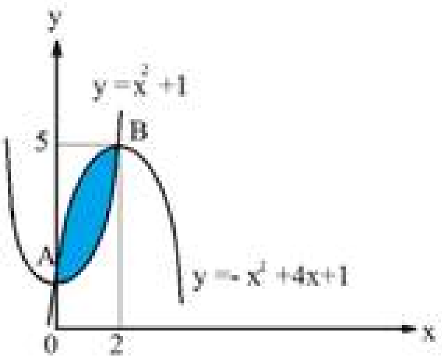


Рис. 2. К заданию 14

Решение. $S=\int\limits_0^2\left(-x^2+4x+1\right)dx-\int\limits_0^2\left(x^2+1\right)dx=7\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}=2\frac{2}{3}$.

$$\int_0^2 \left(-x^2+4x+1\right)dx = \left(\frac{-x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^2 = \left(-\frac{8}{3}+\frac{1}{2}+2\right)-\left(-\frac{0'}{3}+\frac{0}{2}+0\right) = -\frac{8}{3}+10 = -2\frac{2}{3}+10 = 7\frac{1}{3}$$

$$\int_0^2 \left(x^2+1\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}+2-\left(\frac{0}{3}+0\right) = 4\frac{2}{3}.$$

Ответ: $4\frac{2}{3}$**.**

15. *Решите задачу. Вычислите площадь закрашенной фигуры (рис. 3), используя свойства определенного интеграла. (Ответ: 4,5)

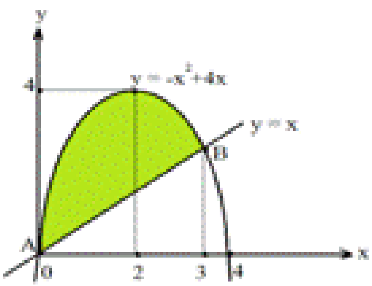


Рис. 3. К заданию 15

Решение. $S = \int_0^3 (-x^2+4x)dx - \int_0^3 xdx = 9-4{,}5 = 4{,}5.$

1) $\int_0^3 (-x^2+4x)dx = (-\frac{x^3}{3}+2x^2)\Big|_0^3 = (-9+18)-(-\frac{0^3}{3}+2\cdot 0^2) = 9;$

2) $\int_0^3 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{3^2}{2}-\frac{0^2}{2} = 4{,}5.$

Ответ: 4,5.

16. *Решите задачу. Вычислите площадь закрашенной фигуры (рис. 4), используя свойства определенного интеграла. (Ответ: 9)

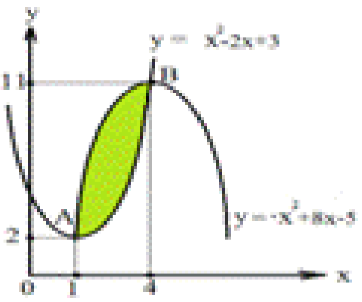


Рис. 4. К заданию 16

Решение.

$$S=\int_1^4(-x^2+8x-3)dx-\int_1^4\left(x^2-2x+3\right)dx=24-15=9.$$

1) $\int_1^4\left(-x^2+8x-3\right)dx=\left(\frac{-x^3}{3}+4x^2-3x\right)\Bigg|_1^4=\left(\frac{-4^3}{3}+4\cdot4^2-3\cdot4\right)-\left(\frac{-1^3}{3}+4\cdot1^2-3\cdot1\right)=24.$

2) $\int_1^4\left(x^2-2x+3\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\Bigg|_1^4=\left(\frac{4^3}{3}-4^2+3\cdot4\right)-\left(\frac{1^3}{3}-1^2+3\cdot1\right)=15.$

Ответ: 9.

Решения и ответы к контрольной работе по теме «Первообразная и интеграл» (2.5.1.)

Вариант 1

1. Вычислите интеграл: а) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}\sin 3x\,dx$; б) $\int_1^2\frac{x^3+3x^2}{x+3}dx$

Решение. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x\,dx = -\frac{\cos 3x}{3}\Bigg|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{3} - \left(\frac{-\cos\frac{\pi}{4}}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

б) $\int\limits_1^2 \frac{x^3+3x^2}{x+3}\,dx = \int\limits_1^2 \frac{x^2\cdot(x+3)}{x+3}dx = \int\limits_1^2 x^2 = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$

Ответ: а) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; б) $2\frac{1}{3}$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=4-x^2; y=0$ б) $y = 3\cos 2x,\ y = 0,\quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

Решение. а) $y = 4 - x^2;\ y = 0$. Найдем абсциссы точек пересечения с осью ох.

$4 - x^2 = 0;\quad x_1 = -2;\ x_2 = 2$.

$$S = \int\limits_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(4\cdot 2 - \frac{8}{3}\right) - \left(4\cdot(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right) = 10\frac{2}{3}.$$

Ответ: $S = 10\frac{2}{3}$.

б) $y = 3\cos 2x, y = 0 \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций: $3\cos 2x = 0$; $\cos 2x = 0$; $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, где $k \in Z$.

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 3\cos 2x dx = \frac{3}{2}\sin 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\sin 0 = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Ответ: $S = 1{,}5$.

3. Найдите общий вид первообразных для функции

$f(x) = (3x-2)^3 - 2\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Ответ: $F(x)=\frac{(3x\ \ -2)^4}{12}-\frac{2\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)}{5}+c$.

4. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой

$\upsilon(t)=t^2-3t+2$. Напишите формулы зависимости ее ускорения a и координаты x от времени t, если в начальный момент времени (t=0) координата x = –5.

Решение. Ускорение является производной скорости, поэтому $a(t)=\upsilon(t)=2t-3$. Координата наоборот, является первообразной скорости, поэтому она запишется так $x(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+2t+c$, где с – координата, определяющая начальную координату. Начальная координата равна -5 (т.к. $-5=\frac{0}{3}-\frac{3\cdot 0}{2}+2\cdot 0+c \Rightarrow c=-5.$). Значит $x(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+2t-5$.

Ответ: $x(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+2t-5$.

Вариант 2

1. Вычислите интеграл: а) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx$; б) $\int\limits_3^4 \frac{x^3-2x^2}{x-2}dx$

Решение. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx=\frac{\sin 2x}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}-\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

б) $\int\limits_3^4 \frac{x^3-2x^2}{x-2}dx=\int\limits_3^4 \frac{x^2\cdot(x-2)}{x-2}dx=\int\limits_3^4 x^2 dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_3^4=\frac{4^3}{3}-\frac{3^3}{3}=12\frac{1}{3}$;

Ответ: а) $\frac{1}{4}$; б) $12\frac{1}{3}$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=9-x^2; y=0$ б) y = 4sin3x, y = 0, $0\le x\le\frac{\pi}{3}$.

Решение.

а) Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций: $y = 9 - x^2; y = 0$:

$9 - x^2 = 0$; $x_1 = -3; x_2 = 3$.

$$S = \int_{-3}^{3} \left(9 - x^2\right) dx = \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{3} = \left(9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(9 \cdot (-3) - \frac{(-3)^3}{3}\right) = 36.$$

Ответ: $S = 36$.

б) Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций: $4\sin 3x = 0$;

$\sin 3x = 0$; $3x = 0 + \frac{\pi \cdot k}{3}$; $x = \frac{\pi \cdot k}{3}$, где $k \in Z$. Значит

$$S = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} 4\sin 3x = \frac{4(-\cos 3x)}{3}\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{3}} = \left(-\frac{4\cos\pi}{3}\right) - \left(-\frac{4\cos 0}{3}\right) = 2\frac{2}{3}.$$

Ответ: $S = 2\frac{2}{3}$.

3. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = (5x-3)^2 + 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

Ответ: $F(x) = \frac{(5x-3)^3}{15} - \frac{3cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}{2} + c$.

4. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой

$v(t) = t^2 + 4t + 3$. Напишите формулы зависимости ее ускорения a и координаты x от времени t, если в начальный момент времени (t=0) координата x = –2.

Решение. Ускорение является производной скорости, поэтому $a(t)=\upsilon^{/}(t)=-2t+4$. Координата наоборот, является первообразной скорости, поэтому она запишется так $x(t)=\frac{-t^3}{3}+\frac{4t^2}{2}+3t+c$, где с – координата, определяющая начальную координату. Так как x=-2, то с=-2, значит $x(t)=\frac{-t^3}{3}+2t^2+3t-2$.

Ответ: $a(t)=\upsilon^{/}(t)=-2t+4$; $x(t)=\frac{-t^3}{3}+2t^2+3t-2$.

Вариант 3

1. Вычислите интеграл: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}\right)dx$; б) $\int_1^4\frac{x^2+x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}dx$

Решение. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}\right)dx=\left(\frac{1}{2}\cdot\left(-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot 2+\frac{1}{3}\left(\sin\frac{x\pi}{3}\right)\cdot 3\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$

$$=\left(-\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(-\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}\right)-(-\cos o+\sin 0)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)-(-1+0)=\frac{3-\sqrt{2}}{2}.$$

б) $\int_1^4\frac{x^2+x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}dx=\int_1^4\left(\sqrt{x^3}+x+\sqrt{x}\right)dx=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^4=24\frac{17}{30}$.

Ответ: а) $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$; б) $24\frac{17}{30}$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\sin^2 x\cos x,\ y=0,\ x=0,\ x=\frac{\pi}{2}$; б) $y=x^2, y=5x-4$

Решение. а) первый способ: воспользуемся одним из методов интегрирования - заменой переменных. Пусть $\sin x = t$, тогда $dt = (\sin x)' dx = \cos x dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{1}{3}\sin^3 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}(\sin 0)^3 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}.$$

Второй способ: воспользуемся формулой понижения степени для $\sin^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Получим: $\frac{1+\cos 2x}{2}\cdot\cos x = \frac{\cos x + \cos 2x\cdot\cos x}{2} = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x\cdot\cos x$. Применим формулу преобразования произведений тригонометрических функций в суммы, получим: $\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\left(\frac{\cos 3x + \cos x}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x$.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x\right) = \frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{12}\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

б) Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций: $x^2 = 5x - 4.$; $x^2 - 5x + 4 = 0$; $D = 9$; $x_1 = 1, x_2 = 4$.

$$S = \int_1^4 x^2 dx - \int_1^4 (5x-4)dx = \left| \int_1^4 (x^2 - 5x + 4)dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x\right)\Big|_1^4 \right| = 4{,}5 .$$

Ответ: а) $\frac{1}{3}$, б) 4,5.

3. Найдите все первообразные функции $f_1(x) = x^2$, графики которых касаются параболы $f_2(x) = x^2 + 1$.

Решение.

В точке касания совпадают значения функций и значения их производных $(F_1'(x) = f_1(x))$.

$$\begin{cases} x^2 = 2x \\ \dfrac{x^3}{3} + C = x^2 + 1 \end{cases};$$ Первое уравнение дает два значения: $x = 0$ и $x = 2$.

$x = 0$ подставляем во второе уравнение: $\dfrac{0^3}{3} + C = 0^2 + 1;$ $C = 1$ следовательно

$F_1(x) = \dfrac{x^3}{3} + 1$

Аналогично, $x = 2$ подставляем во второе уравнение: $\dfrac{2^3}{3} + C = 2^2 + 1;$ $C = 2\dfrac{1}{3}$

следовательно $F_1(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $F_1(x) = \dfrac{x^3}{3} + 1$, $F_1(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2\dfrac{1}{3}$.

4. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой $\upsilon(t) = 5\sin\left(2t - \dfrac{\pi}{3}\right)$. Напишите формулы зависимости его ускорения а и координаты *x* от времени *t*, если при $t = \dfrac{\pi}{2}$ координата $x = \dfrac{9}{4}$. В этот момент времени найдите a и υ.

Решение.

Ускорение является производной скорости, поэтому $a(t) = \upsilon'(t) = 5 \cdot 2 \cdot \cos\left(2t - \dfrac{\pi}{3}\right)$; $a(t) = 10\cos\left(2t - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

$$a\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -5.$$

Координата, наоборот, является первообразной скорости, поэтому, она запишется так:

$x(t) = \dfrac{5}{2} \cdot \left(-\cos\left(2t - \dfrac{\pi}{3}\right)\right) + c = -\dfrac{5}{2}\cos\left(2t - \dfrac{\pi}{3}\right) + c \Rightarrow x(t) = \dfrac{5}{2} \cdot \left(-\cos\left(2t - \dfrac{\pi}{3}\right)\right) + 1$, где с – координата, определяющая начальную координату.

$$\frac{9}{4}=\frac{5}{2}\cdot\left(-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right)+c;\quad \frac{9}{4}=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}+c;\quad c=1.$$

Ответ: $a(t)=10\cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)$, $a\left(\frac{\pi}{2}\right)=-5$; $x(t)=-\frac{5}{2}\cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)+1$, $\upsilon\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Вариант 4

1. Вычислите интеграл: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}\right)dx$; б) $\int_1^4\frac{2x^2+3x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}dx$;

Решение.

$$\text{а)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x}{2}dx+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{x}{3}dx=\frac{1}{2}\cdot2\sin\frac{x}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}\cdot3\cos\frac{x}{3}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$\sin\frac{x}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos\frac{x}{3}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin0\right)-\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos0\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+2}{2}\left(ед^2\right)$$

б)

$$\int_1^4\frac{2x^2+3x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}dx=\int_1^4(2x\sqrt{x}+3x+\sqrt{x})dx=\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{3\cdot x^2}{2}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^4=\left(\frac{2\cdot\left(2^2\right)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{3\cdot2^2}{2}+\frac{2\cdot2^{\frac{3}{2}}}{3}\right)-$$

$$-\left(\frac{2\cdot1^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{3\cdot1^2}{2}+\frac{2\cdot1^{\frac{3}{2}}}{3}\right)=51\frac{29}{30}.$$

Ответ: а) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+2}{2}$; б) $51\frac{29}{30}$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\cos^2x\sin x,\ y=0,\ x=0,\ x=\frac{\pi}{2}$; б) $y=x^2, y=3x-2$

Решение.

а) $\int\left(\cos^2x\cdot\sin\right)dx$ Пусть $\cos x=t$, тогда $dt=(\cos)'\,dx=-\sin x dx$

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin x dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2dt=-\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{3}\cdot\cos^3 x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(-\frac{1}{3}(\cos\frac{\pi}{2})\right)-\left(-\frac{1}{3}(\cos 0)\right)=\frac{1}{3}\left(ед^2\right)$$

б) Найдем абсциссы точек пересечения графиков двух функций: $x^2=3x-2$.

$x^2-3x+2=0;\quad x_1=1,\ x_2=2$.

$$S=S_{f(x)}-S_{g(x)}=\left|\int_a^b[f(x)-g(x)]dx\right|$$

$$S=\left|\int_1^2\left[x^2-3x+2\right]dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_1^2\right|=\left|(\frac{2^3}{3}-\frac{3\cdot2^2}{2}+2\cdot2)-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{3\cdot1^2}{2}+2\cdot1\right)\right|=\frac{1}{6}.$$

Ответ: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{6}$.

3. Найдите все первообразные функции $f_1(x)=-x^2$, графики которых касаются параболы $f_2(x)=x^2-3$.

В точке касания совпадают значения функций и значения их производных $\left(F_1'(x)=f_1(x)\right)$.

$\begin{cases}-x^2=-2x\\-\frac{x^3}{3}+C=x^2-3\end{cases}$; Первое уравнение дает два значения: $x=0$ и $x=2$.

$x=0$ подставляем во второе уравнение: $-\frac{0^3}{3}+C=0^2-3;\quad C=-3$ следовательно

$$F_1(x)=-\frac{x^3}{3}-3$$

Аналогично $x=2$ подставляем во второе уравнение: $-\frac{2^3}{3}+C=2^2-3;\quad C=\frac{11}{3}$

следовательно $F_1(x)=-\frac{x^3}{3}+\frac{11}{3}$.

Ответ: $F_1(x)=-\frac{x^3}{3}-3$ и $F_1(x)=-\frac{x^3}{3}+\frac{11}{3}$.

4. Скорость прямолинейно движущегося тела задана формулой

$\upsilon(t) = 4\cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right).$

Напишите формулы зависимости его ускорения a и координаты x от времени $t = \frac{\pi}{3}$ координата $x = \frac{5}{3}$. В этот момент времени найдите a и υ.

Решение.

Ускорение является производной скорости, поэтому $a(t) = \upsilon'(t) = -4 \cdot 3 \cdot \sin\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)$; $a(t) = -12\sin\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)$;

$a\left(\frac{\pi}{3}\right) = -12\sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = -12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -6.$

Координата, наоборот, является первообразной скорости, поэтому, она запишется так:

$x(t) = \frac{4}{3} \cdot \left(\sin\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)\right) + c = \frac{4}{3}\sin\left(3t - \frac{\pi}{6}\right) + c \Rightarrow x(t) = \frac{4}{3} \cdot \left(\sin\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)\right) + 1,$ где с – координата, определяющая начальную координату.

$\frac{5}{3} = \frac{4}{3} \cdot \left(\sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)\right) + c$; $\frac{5}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + c$; $c = 1$.

Ответ: $a(t) = -12\sin\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)$, $a\left(\frac{\pi}{3}\right) = -6$; $x(t) = \frac{4}{3} \cdot \left(\sin\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)\right) + 1$, $\upsilon\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3}$.

<u>Вариант 5</u>

1. Вычислите интеграл:

а) $\int_0^2 \left(\sqrt[3]{1+1.x3+2x}\right)dx;$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cos x dx;$

а) $\int_0^2 \left(\sqrt[3]{1+13x}+2x\right)dx = \left(\frac{3(1+13x)^{\frac{4}{3}}}{52}+x^2\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{3\cdot(1+13\cdot 2)^{\frac{4}{3}}}{52}+2^2\right)-\left(\frac{3\cdot(1+13\cdot 0)^{\frac{4}{3}}}{52}+0^2\right) = 8\frac{8}{13}$

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x\cdot\cos x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sin x\cdot\cos x\cdot\cos x dx =$

$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x\cdot\sin x dx = 2\left(-\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} t^2 dt\right) = -2\left(\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^{\frac{\pi}{6}}\right) =$

Пусть $\cos x = t$ **,тогда** $dt = (\cos x)^1 dx = -\sin x dx$ **,**

$= -2\left(\frac{1}{3}\cdot\cos^3 x\Bigg|_1^{\frac{\pi}{6}}\right) = -2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}\right)^3 - \frac{1}{3}(\cos 0)^3 =$

$= -2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}(1^3)\right) = \frac{8-3\sqrt{3}}{12}$ **;**

Второй способ: разложим подынтегральную функцию в сумму функций:

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x\cos dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 3x+\sin x)dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 3x}{3}+\cos x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{3}+\cos\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 0}{3}+\cos 0\right)$

$= -\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{2}{3} = \frac{8-3\sqrt{3}}{12} = \frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}.$

Ответ: $\frac{8-3\sqrt{3}}{12}$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = \begin{cases} 1-|x| & \textit{при}\ \ -1\le x\le\frac{1}{2}, \\ \cos\frac{2\pi}{3}x & \textit{при}\ \ \frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{4}, \end{cases}$ $y = 0$

б) $y = \sin^4 x, y = 0,\ 0\le x\le\pi.$

Решение.

а) Раскроем знак модуля, построим график подынтегральной функции и вычислим площадь полученной фигуры.

$$y=\begin{cases} 1+x, x\in[-1;0] \\ 1-x; x\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right) \\ \cos\dfrac{2\pi}{3}x; x\in\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right] \end{cases}$$

$$S=\int_{-1}^{0}(1+x)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\cos\frac{2\pi}{3}xdx=\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{3}x\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}=\frac{7}{8}+\frac{3}{2\pi}-\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

б)Используем формулу понижения степени и преобразуем подынтегральную функцию:

$$\sin^4 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)=\frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)$$

Площадь искомой фигуры: $S=\int_0^{\pi}\sin^4 xdx=\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx$

$$\left(\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{3\pi}{8}.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{8}$.

3. Для функции $f(x)=(x^2+5x+6)^{-1}$ найдите общий вид первообразных.

$f(x)=(x^2+5\text{x}+6)^{-1}=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$. Разложим знаменатель на множители и запишем в виде суммы дробей:

$$\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{(x+3)-(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\frac{x+3}{(x+2)(x+3)}-\frac{x+2}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}.$$

Тогда $F(x)=\ln|x+2|-\ln|x+3|+c=\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|+c$.

Ответ: $F(x)=\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|+c$.

4. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $A(1;2)$, у которой тангенс угла наклона касательной в каждой точке в три раза больше квадрата абсциссы этой точки.

Решение.

Пусть дана функция $F(x)$. Тогда тангенс угла наклона касательной по условию задачи $tg\alpha = F^{/}(x)=3x^2$ в каждой точке x. Таким образом надо найти первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=3x^2$. Получаем: $F(x)=x^3+c$. Так как график этой первообразной проходит через точку $A(1;2)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению первообразной. Имеем равенство $2=1^3+c$. Значит с=1и уравнение заданной кривой: $F(x)=x^3+1$.

Ответ: $F(x)=x^3+1$.

Ответы и решения к зачетной работе по теме «Первообразная и интеграл» (2.5.2.)

Вариант 1.

Часть А.

1.Докажите, что функция $F(x)=3+4\sin 2x$ является первообразной для функции $f(x)=8\cos 2x$ при $x\in R$.

Решение. $F^{/}(x)=(3+4\sin 2x)'=(4\cos 2x)2=8\cos 2x$

Ответ: $F^{/}(x)=8\cos 2x$.

2. Для функции $f(x)=\sqrt{5x-1}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $A(2;4)$.

Решение.

$$F(x)=\frac{(5x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot 5}+C=\frac{2\cdot(5x-1)^{\frac{3}{2}}}{15}+C;\ \ 4=\frac{2\cdot(5\cdot 2-1)^{\frac{3}{2}}}{15}+C;\ C=0{,}4$$

$$F(x)=\frac{2}{15}(5x-1)^{\frac{3}{2}}+0{,}4$$

3. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=2(3x+1)^5$; б) $f(x)=3\cos 5x-\frac{4}{\sin^2 2x}$.

Решение.

а) $F(x)=2\frac{(3x+1)^6}{6\cdot 3}+C=\frac{(3x+1)^6}{9}+C$; б) $F(x)=\frac{3\sin 5x}{5}+\frac{4ctg\,2x}{2}+C$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$y=x^3+2x,\ y=0,\ x=1,\ x=2$

Решение.

$$S=\int_1^2\left(x^3+2x\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{2x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=\left(\frac{2^4}{4}+\frac{2\cdot 2^2}{2}\right)-\left(\frac{1^4}{4}+\frac{2\cdot 1^2}{2}\right)=(4+4)-\left(\frac{1}{4}+1\right)=8-1\frac{1}{4}=6\frac{3}{4}$$

5. Найдите площадь криволинейной фигуры – луночки, ограниченной синусоидами

$y=3\sin x$ и $y=\sin x$, $0\le x\le\pi$.

Ответ: 4.

6. Точка движется по прямой со скоростью $v(t)=4t+\sin(\pi t)$. Найдите путь, пройденный точкой за время от $t_1=1$ до $t_2=5$.

Ответ: 48.

<u>Часть В</u>.

7. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$y=\frac{1}{\cos^2 x}$, $y=8\cos x$, $x=0$, $0\le x\le\frac{\pi}{3}$.

Ответ: $3\sqrt{3}$

8. Найдите неопределенные интегралы (первообразные):

а) $\int \sin^2 3x\cos 5x dx$;   б) $\frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-4}}$.

а) Применим к $\sin^2 3x$ формулу понижения степени, получим $\frac{1-\cos 6x}{2}$. Применив формулу преобразования произведений тригонометрических функций в суммы, получим: $\frac{1-\cos 6x}{2}\cdot\cos 5x=\frac{1}{2}(\cos 5x-\cos 6x\cdot\cos 5x)=$

$$\frac{1}{2}\left(\cos 5x-\frac{\cos 11x+\cos x}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2\cos 5x-\cos 11x-\cos x}{2}\right)=\frac{1}{4}(2\cos 5x-\cos 11x-\cos x)$$

$$\int\ \frac{1}{4}(2\cos 5x-\cos 11x-\cos x)=\frac{1}{4}(\ \int 2\cos 5x-\int\cos 11x-\int\cos x\ )=$$

$$\frac{1}{10}\sin 5x-\frac{1}{44}\sin 11x-\frac{1}{4}\sin x+C$$

Ответ:

а) $\frac{1}{10}\sin 5x-\frac{1}{44}\sin 11x-\frac{1}{4}\sin x+C$;   б) $\frac{2}{9}\left[(x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-4)^{\frac{3}{2}}\right]+C$

9. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)=x^3-3x$ и касательной к этому графику, проведенной в точке $a=-1$.

Ответ: $6\frac{3}{4}$

Часть С.

10. Найдите $\int\frac{5x+1}{x^2+x-2}dx$.

Решение.

Знаменатель подынтегральной функции разложим на множители и запишем в виде $f(x)=\frac{5x+1}{(x-1)(x+2)}$ и представим функцию $f(x)$ в виде суммы двух дробей со знаменателями $x-1$ и $x+2$, числителями a и b.

$$f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}=\frac{ax+2a+bx-b}{(x-1)(x+2)}=\frac{(a+b)x+(2a-b)}{(x-1)(x+2)}=\frac{5x+1}{(x-1)(x+2)}\Rightarrow$$

$\begin{cases}5=a+b\\1=2a-b\end{cases}\Rightarrow a=2;b=3.$ Значит, функция имеет вид $f(x)=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+2}$

$$\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+2}\right)dx=2\ln|x-1|+3\ln|x+2|+C.$$

Ответ: $2\ln|x-1|+3\ln|x+2|+C$.

11. Из геометрический соображений вычислите интеграл:

$$\int_{-2}^{2}(5+\sqrt{4-x^2})dx.$$

Решение.

Построим график подынтегральной функции $y=5+\sqrt{4-x^2}$. Получим: $y-5=\sqrt{4-x^2}$

(где $y-5\geq 0$) или $x^2+(y-5)=2^2$. Это уравнение верхней полуокружности с центром в точке $A(0;5)$ и радиуса 2. Теперь легко вычислить площадь построенной фигуры, состоящей из прямоугольника (с размерами 4 и 5) и полукруга радиуса 2. Получим $S=4\cdot 5+\frac{1}{2}\pi\cdot 2^2=20+2\pi$.

12. Из точки $O(0;c)$ проведены касательные к параболе $f(x)=1-x^2$. (рис.). При каком значении c площадь фигуры, ограниченной этими касательными и параболой равна 18?

Решение.

Очевидно, что парабола $f(x)=1-x^2$ и касательные к ней симметричны относительно оси ординат. Поэтому достаточно вычислить площадь криволинейной трапеции ABC, которая по условию будет равна девяти. Предположим, что касание происходит в точке a. Получим уравнение касательной AC.

Найдем $f(x) = -2x$. Тогда уравнение касательной имеет вид $y = -2a(x-a) + (1-a^2) = -2ax + a^2 + 1$. Так как касательная проходит через точку $A(0;C)$, то $C = a^2 + 1$

Необходимо найти точку касания а. Для этого запишем площадь фигуры ABC: $S = \int_0^a ((-2ax + a^2 + 1) - (1 - x^2))dx = \int_0^a (x-a)^2 dx = \left.\frac{(x-a)^3}{3}\right|_0^a = \frac{a^3}{3}$. Получим уравнение $\frac{a^3}{3} = 9$, откуда $a = 3$. Значит, $c = a^2 + 1 = 3^2 + 1 = 10$.

Ответ: 10.