МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра высшей математики

Выпускная квалификационная работа

МОДЕЛИ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ В ТЕХНИКЕ ОРИГАМИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

Работу выполнила:
студентка 151 группы
направления подготовки 44.03.05
«Педагогическое образование»
(с двумя профилями подготовки),
профили «Математика и
Информатика»,
Нечаева Василиса Владимировна

____
Подпись

«Допущена к защите в ГЭК»
Зав. кафедрой

____
подпись

«____» __________ 2018 г.

Руководитель:
канд. пед. наук, доцент
кафедры высшей математики
Шеремет Галина Геннадьевна

____
Подпись

ПЕРМЬ
2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Возникновение интереса к математике у значительного числа учащихся зависит от методики ее преподавания, от того, насколько умело будет построена учебная работа. Необходимость включения каждого ученика в деятельность обеспечивает формирование и развитие познавательных мотивов. Это особенно важно в подростковом возрасте, когда еще формируются, а иногда и только определяются постоянные интересы и склонности к тому или иному предмету.

Оторванность геометрии от практической деятельности – основной недостаток преподавания математики в традиционной школе, что является существенной причиной отчуждения школьников от данного предмета и проявляется в потере их интереса к геометрии. Одним из механизмов развития геометрического мышления и поддержания интереса к геометрии может стать совместное изучение геометрии и оригами. Это и определяет актуальность нашего исследования.

Объектом исследования является процесс обучения геометрии, предметом исследования – возможность использования оригами в преподавании геометрии.

Гипотеза исследования: модели правильных многогранников, выполненные в технике оригами, могут являться одним из эффективных средств обучения геометрии.

Цель работы: исследовать возможность применения моделей правильных многогранников, выполненных в технике оригами, в преподавании геометрии.

В связи с этим необходимо было решить следующие задачи:

– изучить теорию многогранников;

– рассмотреть различные виды моделирования и выбрать наиболее удобный;

– рассмотреть описание техники оригами и ее основные направления и выбрать наиболее удобное для построения;

– исследовать возможность построения моделей для каждого из правильных многогранников в технике оригами;

– выделить планиметрические задачи, связанные с построением каждой из моделей;

– представить алгоритм построения моделей вписанных друг в друга правильных многогранников;

– разработать задания для возможного использования моделей правильных многогранников при изучении некоторых тем планиметрии и организации внеклассных занятий;

– сделать вывод по каждой главе дипломного исследования, подтвердить или опровергнуть гипотезу, подвести итог о достижении цели исследования.

Для решения поставленных задач и проверки исходного предположения были использованы следующие методы исследования:

– изучение и анализ психолого-педагогической, методической и специальной литературы по проблематике исследования.

Научная новизна и теоретическая значимость исследования состоит в том, что модели правильных многогранников, выполненные в технике оригами, нашли свое применение в примерных заданиях, разработанных для изучения некоторых тем планиметрии. Обоснована целесообразность включения моделей правильных многогранников при изучении геометрии.

Практическая значимость результатов исследования состоит в том, что разработанные материалы могут быть использованы учителями математики при изучении геометрии.

Структура работы состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы, состоящего из 30 наименований. Работа содержит 39 иллюстраций и 3 таблицы.

Во введении обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цель и гипотеза исследования, определены объект, предмет, задачи и методы исследования, раскрыты научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы.

Первая глава – «Построение моделей правильных многогранников в технике оригами», – состоит из четырех параграфов.

Первый параграф посвящен моделям многогранников. В нем рассматриваются следующие вопросы: определение многогранников, классификация многогранников, определение и виды моделирования, где отмечаем, что в дальнейшей работе будем рассматривать только правильные многогранники, а моделирование – предметное.

Во втором параграфе рассматривается определение оригами и его основные направления с последующим выводом о том, что работать будем с модульным оригами.

Оформленные схемы складывания модулей для построения моделей правильных многогранников в программе «Живая геометрия», анализ каждой модели и вывод о точности их построений представлены в третьем параграфе.

Четвертый параграф представляет собой описание алгоритма моделирования вписанных друг в друга правильных многогранников.

Вторая глава – «Применение моделей правильных многогранников, выполненных в технике оригами, при изучении планиметрии», – содержит два параграфа.

В первом параграфе представлены примеры заданий для пяти разделов планиметрии. В данных заданиях используются модели правильных многогранников, построенных в технике оригами.

Во втором параграфе рассматриваются примеры внеклассных занятий. Представленные занятия показывают варианты применения моделей правильных многогранников при изучении геометрии во внеклассные часы.

В заключении сформулированы основные выводы и результаты проведенного исследования.

В приложении приведены результаты анкетирования, которые подтверждают гипотезу.

ГЛАВА 1. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ В ТЕХНИКЕ ОРИГАМИ

Первые геометрические понятия возникли в доисторические времена. Разные формы материальных тел наблюдал человек в природе: формы растений и животных, гор и извилин рек, круга и серпа Луны и т. п. Однако он не только пассивно наблюдал природу, но осваивал и использовал ее богатства. В процессе практической деятельности накапливались геометрические сведения.

Начало геометрии было положено в древности при решении чисто практических задач. Со временем, когда накопилось большое количество геометрических фактов, у людей появилось потребность обобщения, уяснения зависимости одних элементов от других, установления логических связей и доказательств. Постепенно создавалась геометрическая наука.

Геометрические знания примерно в объеме современного курса средней школы были изложены еще 2200 лет назад в «Началах» Евклида. Конечно, изложенная в «Началах» наука геометрия не могла быть создана одним ученым. Известно, что Евклид в своей работе опирался на труды десятков предшественников, среди которых были Фалес и Пифагор, Демокрит и Гиппократ, Архит, Теэте.

В своей книге Евклид дал полное математическое описание правильных многогранников. Он описывает структуру тетраэдра, октаэдра, куба, икосаэдра додекаэдра в данном порядке.

Многогранники имеют красивые формы, например, правильные, полуправильные и звездчатые многогранники. Они обладают богатой историей, которая связана с именами таких ученых, как Пифагор, Евклид, Архимед. С древнейших времен представления о красоте связаны с симметрией. Наверное, этим объясняется интерес человека к многогранникам удивительным символам симметрии, привлекавшим внимание выдающихся мыслителей. Мы можем наблюдать, что многогранники встречаются и окружают нас повсюду.

1.1. Многогранники и их модели

Многогранники – это часть пространства, ограниченная совокупностью конечного числа плоских многоугольников, соединенных таким образом, что каждая сторона любого многоугольника является стороной ровно одного другого многоугольника (называемого смежным), причем, вокруг каждой вершины существует ровно один цикл многоугольников. Эти многоугольники называются гранями, их стороны – ребрами, а вершины – вершинами многогранника [5].

В зависимости от правильности граней, от числа сторон и углов, многогранники делятся на:

1) правильные:

– тетраэдр,

– октаэдр,

– икосаэдр,

– куб,

– додекаэдр

2) полуправильные:

– призмы,

– фигуры, полученные из правильных многогранников с помощью операции «усечение»

3) звездчатые,

4) кристаллы.

В дальнейшей работе будем использовать правильные многогранники. Определим это понятие: выпуклый многогранник называется правильным, если его гранями являются равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

Исследуя объекты окружающего мира, в частности геометрические фигуры, мы отображаем результаты исследования для того, чтобы, с одной стороны, представить их в виде, удобном для анализа, а с другой для их хранения и передачи в пространстве или времени. Проектируя, создавая что-то новое, мы первоначально формируем некоторый образ этого нового. В связи с этим, в познавательной и практической деятельности человека большую, если не ведущую, роль играют модели и моделирование.

Моделирование - это построение, совершенствование, изучение и применение моделей реально существующих или проектируемых объектов.

Модель - это подобие объекта, которое воспроизводит интересующие нас свойства и характеристики объекта-оригинала или объекта проектирования.

Все модели, применяемые в познании, делят на два больших класса: материальные (природные объекты) и идеальные (зафиксированные в знаковой форме).

По применяемым моделям различают виды моделирования, представленные в таблице 1 [2].

Таблица 1

Виды моделирования

Вид моделирования	**Назначения, особенности**	**Примеры**
Предметное	Воспроизводит изучаемые геометрические характеристики объекта, наглядность	Макет моста, плотины, крылья самолета, модели многогранников

Продолжение таблицы 1

Вид моделирования		**Назначения, особенности**	**Примеры**
Натурное		Объект находится в естественных условиях и не изменяется исследователем	Производственный, педагогический эксперимент
Физическое		Воспроизводит, изучаемые физические характеристики, природу объекта: выполняется на специальных установках	Лабораторный эксперимент
Мысленное	символическое, знаковое	Упорядочена запись объекта в виде условных знаков, отображающих структурные или функциональные связи объекта	Схемы, графы, выкройки, чертежи
	наглядные	Модели приобретают наглядный характер	Объемные макеты, трафареты, фотокопия
Аналогово-цифровое	аналоговое	Не сохраняется природа объекта, модель и оригинал описываются одним математическим соотношением, уравнением	Электрические модели, математические
	цифровое	Применяются элементы, производящие математические операции дискретно; обладают большой степенью точности и способностью храниться в памяти информации	Кодированная информация для ЭВМ
	гибридное (смешанное)	Сочетает наглядность и простоту модели с точностью цифровой	Блок-схемы для составления алгоритма решения задачи на ЭВМ
	функциональное, кибернетическое	Раскрывает структуру объекта без анализа внутренних связей; описывается функцией	Модель описания входных и выходных параметров

Рассмотрев все виды моделирования, а так же их назначения и особенности (таб. 1), можем заметить, что для построения геометрических фигур, а именно правильных многогранников, первоначально удобнее использовать предметные модели, потому что они позволяют рассмотреть предмет исследования в полной мере.

Предметные модели можно конструировать из различных материалов и различными методами, например, существуют: метод оригами с использованием бумаги, метод развертки с использованием бумаги или картона, так же можно использовать железо, пластмасс или другие материалы, применяя при этом самые различные методы моделирования.

Из-за целого ряда положительных для нас свойств: доступные материалы; легко переносить, не подвергая искажению модель; наглядность как внешней, так и внутренней частей модели, выбираем для работы с правильными многогранниками метод оригами.

1.2. Оригами

Оригами – это искусство складывания из листа бумаги. В классическом оригами складывание выполняется из одного квадратного листа белой бумаги без помощи ножниц и клея. Отказ от одного из требований приводит к появлению различных направлений оригами (рис.1) [18].

– Если отказаться от квадратной формы листа бумаги, то появится возможность складывания из листа различных форм, например: листы формата *А*4, денежная форма, форма правильных многоугольников.

– Если разрешить использование количества листов бумаги больше одного, то это может быть либо *многослойным* складыванием, которое используется при складывании бумажных цветов, либо *модульным* оригами, когда каждый модуль складывается из отдельного листа бумаги.

– Если в модульном оригами все модули одинаковые, то оно является *мономодульным*, в противном случае, *гетеромодульным.*

– *Декоративным* оригами называется в том случае, если отказались от белого цвета бумаги.

– Разрешение применения ножниц, для выполнения некоторых разрезов, характеризует *кирикоми* оригами.

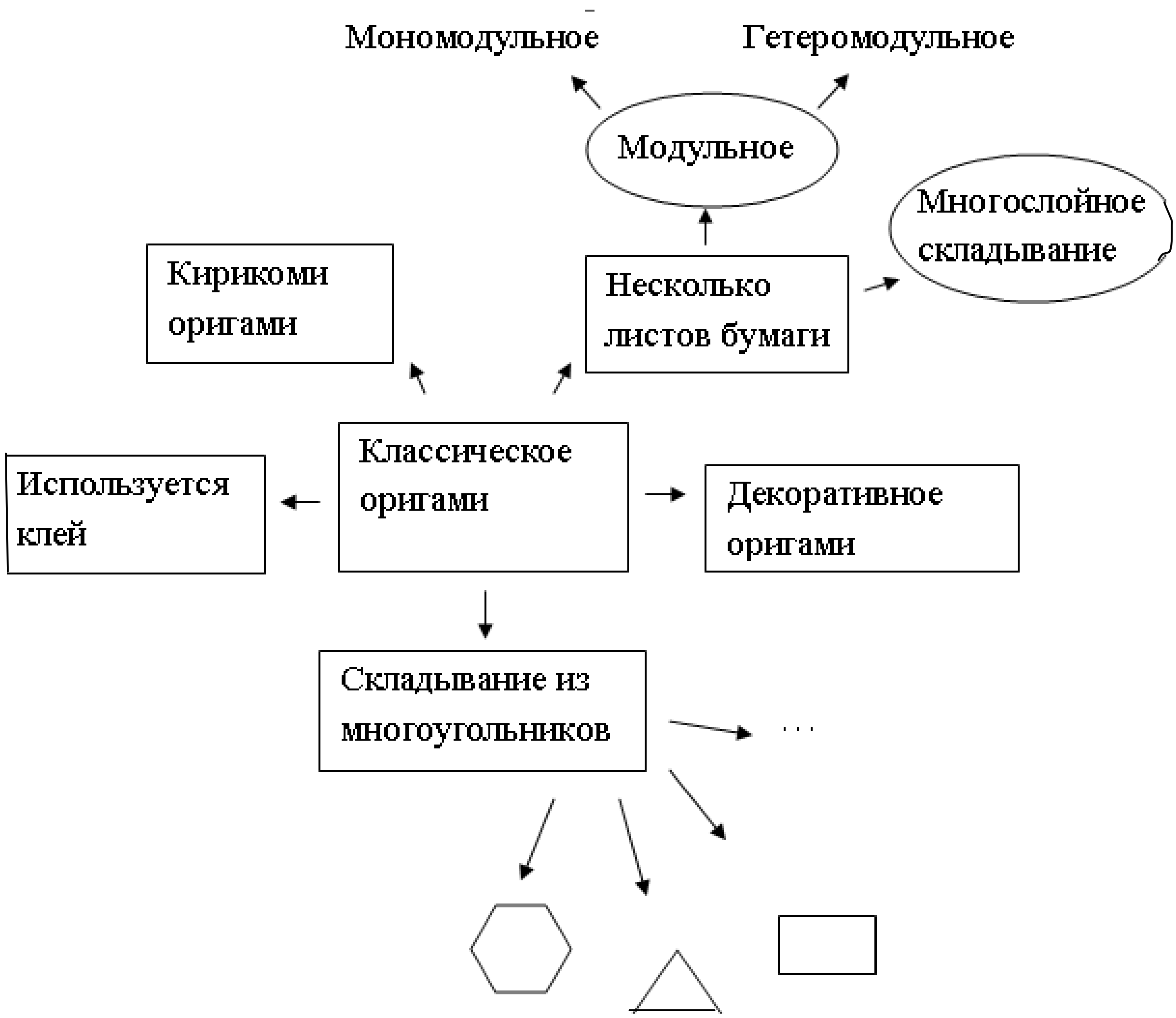


*Рис.*1.Направления оригами

Из всего множества направлений оригами выберем модульное, так как, во-первых, эти модели легко собираются и разбираются, во-вторых, менее сложные, чем модели классического оригами.

1.3. Построение моделей многогранников методом оригами

1.3.1. Модели тетраэдра

Тетраэдр – это простейший многогранник, гранями которого являются четыре треугольника. У тетраэдра 4 грани, 4 вершины и 6 рёбер.

Тетраэдр, у которого все грани – равносторонние треугольники, называется правильным [6].

Реберная модель тетраэдра

На рисунке 2 изображена реберная модель тетраэдра [5].

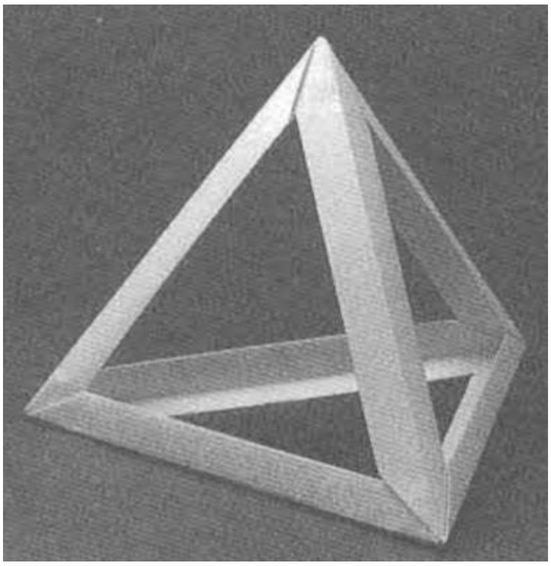


*Рис.*2.Реберная модель тетраэдра

Схема складывания реберной модели тетраэдра

На рисунке 3 изображена схема складывания модуля для реберной модели тетраэдра [30].

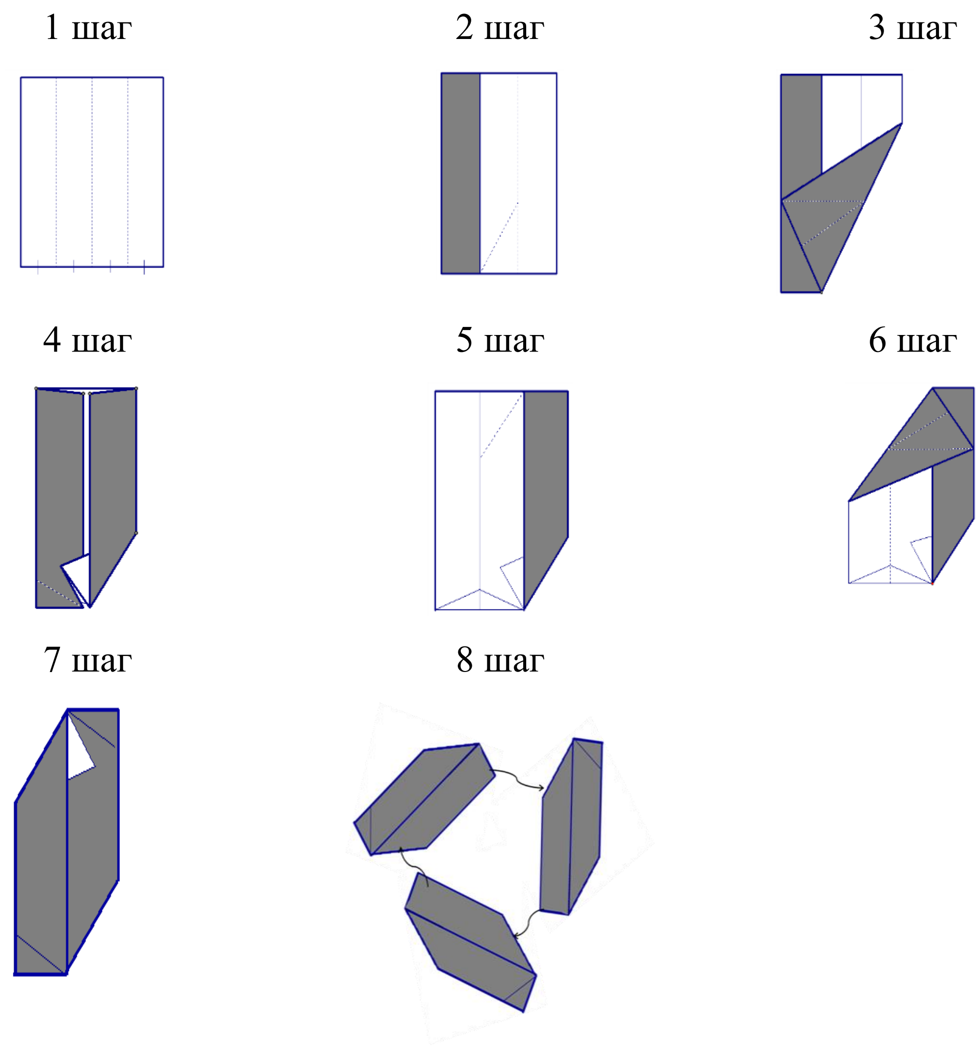


*Рис.*3. Схема складывания реберной модели тетраэдра

Анализ схемы складывания модуля

Докажем, что с помощью построенного модуля (рис.4), можно строить многоугольники, у которых грани - правильные треугольники (угол, между соединяющимися ребрами равен 60°).

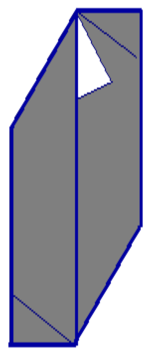


*Рис.*4. Модуль реберной модели

Сначала исследуем треугольник, который получается на втором шаге. Проанализируем результат, полученный на третьем шаге. Для этого введем обозначения ключевых точек, как показано на рисунке (рис.5).

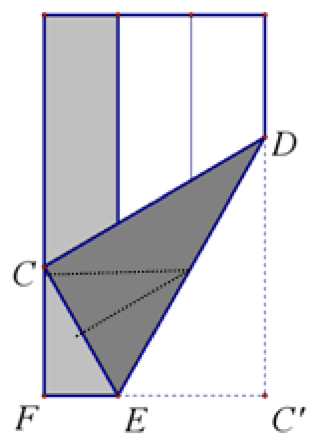


*Рис.*5. Модуль фигуры на втором шаге складывания

Доказательство:

Обозначим верхнюю сторону прямоугольника буквой a, тогда:

$EC = EC' = \dfrac{a}{2}$ (по построению),

$FE = \dfrac{a}{4}$,

$\angle CFE = 90°$ (по построению).

ΔCFE - прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза в два раза больше катета, т. е. $CE = 2FE$, тогда $\angle FEC = 60°$.

$\angle CEC' = 180° - 60° = 120°$,

т.к. $\angle CED = \angle C'ED$, то $C'ED = 60°$,

тогда $\angle DEF = 180° - 60° = 120°$.

Линии, которые строим на третьем шаге, образуют ΔCGE - равносторонний, т.к. $\Delta CGE = 60°$ (ранее доказывали).

$CG \parallel EF$, GH - биссектриса, высота и медиана.

$\angle DCG = 30°$,он же будет равен половине угла между ребрами.

Искомый угол равен $2 \cdot \angle DCG = 2 \cdot 30° = 60°$.

Выясним, как размер пустого пространства между ребрами тетраэдра зависит от соотношения сторон в исходном прямоугольном листе бумаги, из которого моделируем ребро.

Пусть малая сторона прямоугольника равна a, большая сторона равна b (рис.6)

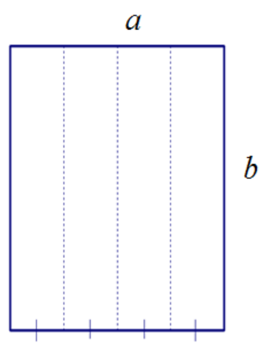


*Рис.*6. Исходный прямоугольный лист бумаги

Из схемы складывания модуля видно, что длина ребра равна b, а ширина его равна $\frac{a}{4}$, m - медиана грани тетраэдра равна $\frac{b\sqrt{3}}{2}$ (рис.7)

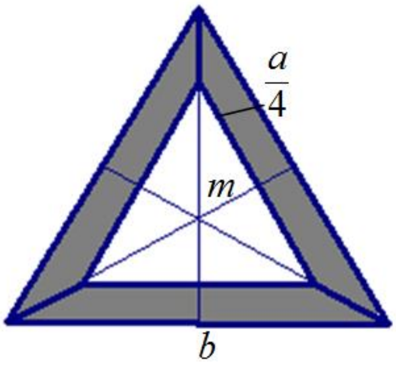


*Рис.*7. Грань тетраэдра

Найдем, при каком отношении $\frac{a}{b}$:

– треугольник выродится в точку;

– возможно построение модуля.

Пусть треугольник выродился в точку (рис.8).

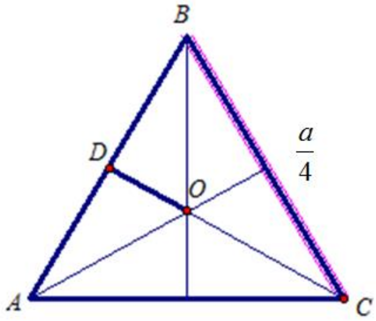


*Рис.*8. Треугольник вырожденный в точку

$OD=\dfrac{a}{4}$ - малая сторона исходного прямоугольника;

$CD=\dfrac{b\sqrt{3}}{2}$ – медиана грани тетраэдра;

$DO:OC=1:2$, отсюда следует, что $OD=\dfrac{1}{3}DC$,

$\dfrac{a}{4}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{b\sqrt{3}}{2}$, $a=\dfrac{2b\sqrt{3}}{3}$ - отношение сторон, при котором не будет существовать пустоты между ребрами, т.е. треугольник выродится в точку.

Построение модуля возможно.

Из приведенных выше вычислений следует, что построение возможно только при $a\le\dfrac{2b\sqrt{3}}{3}$. Чем меньше будет сторона a, тем больше будет размер «окна» между ребрами.

Сплошная модель тетраэдра

Схема складывания модуля для сплошной модели тетраэдра

На рисунке 9 изображена схема складывания модуля для сплошной модели тетраэдра [1].

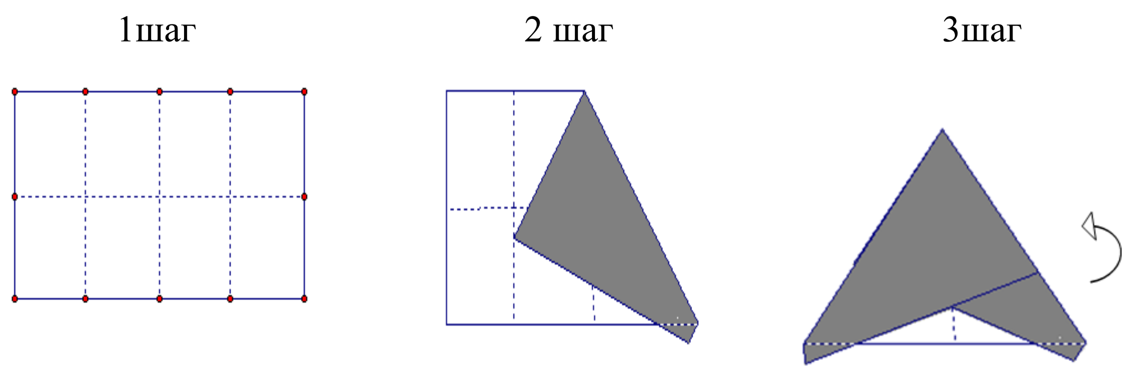


*Рис.*9.Схема складывания модуля для сплошной модели тетраэдра

4 шаг 5 шаг 6 шаг

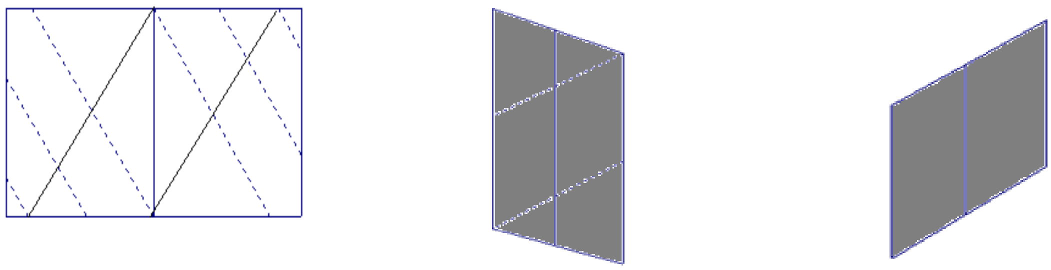


*Рис.*9.Схема складывания модуля для сплошной модели тетраэдра

Анализ схемы складывания модуля

Докажем, что треугольник *PBR*, полученный на четвертом шаге построения модуля, является равносторонним (рис.10).

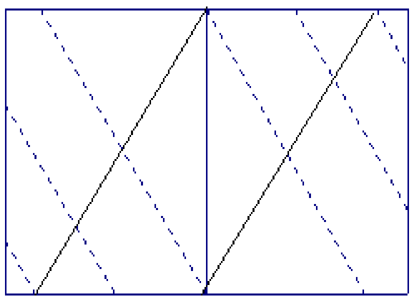


*Рис.*10. Второй шаг построения модуля для сплошной модели тетраэдра

$PB = BR$ - следует из симметричности построений;

Покажем, что $\angle PBR = 60°$:

Рассмотрим второй шаг схемы складывания (рис.11)

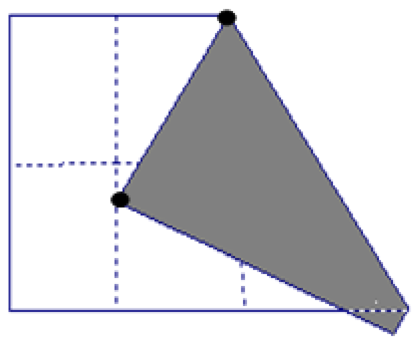


*Рис.*11. Второй шаг схемы складывания модуля

$CB = \frac{1}{4}$ - часть большей стороны, $AB = \frac{1}{2}$ - часть большей стороны, $\angle C = 90°$, отсюда следует, что $\angle CBA = 60° = \angle DBP$;

$\angle DBP = \angle RBA$, так как при наложении совпадают;

$\angle DBA = 180°$,поэтому $\angle PBR = 60°$.

Треугольник, угол которого равен $60°$ - равносторонний, что нам и требовалось доказать.

Выясним, чему равно ребро построенного тетраэдра, в зависимости от исходного листа бумаги. Для построения используем листы формата $A4$.

Из схемы складывания можно заметить, что длины сторон треугольника BMN равны длинам ребер тетраэдра (рис.12)

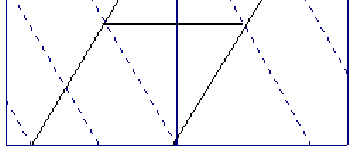


*Рис.*12.Схема складывания в развернутом виде

Обозначим стороны треугольника за x;

Пусть малая сторона листа бумаги будет равна a, а большая равна $a\sqrt{2}$.

$h = \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}$ - длина высоты треугольника BMN;

$x\sqrt{3} = a$, $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ - длина ребра, в зависимости от малой стороны листа бумаги, что нам и требовалось выяснить.

1.3.2. Модели октаэдра и икосаэдра

Октаэдр – это правильный многогранник, у которого 8 треугольных граней, 12 рёбер, 6 вершин, в каждой его вершине сходятся 4 ребра [10].

Икосаэдр – это правильный выпуклый многогранник, двадцатигранник, у которого каждая из 20 граней представляет собой равносторонний треугольник. Число ребер равно 30, число вершин - 12 [19].

Сплошные и реберные модели октаэдра (рис.13) [27], а так же икосаэдра (рис.14) можно собирать из тех же модулей, что и тетраэдр. Число модулей для сборки самих моделей зависит от числа ребер многогранника.

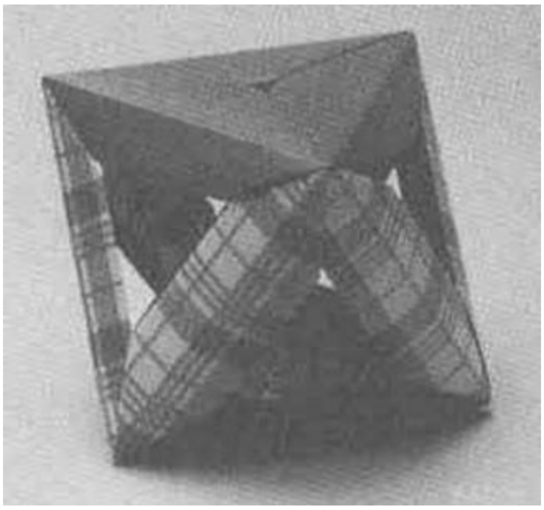


*Рис.*13. Реберная модель октаэдра

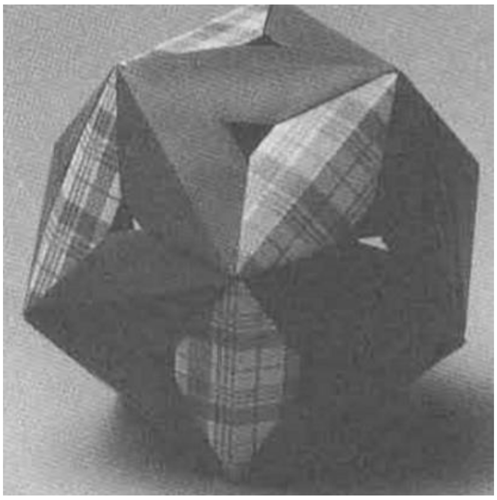


*Рис.*14.Реберная модель икосаэдра

1.3.3. Модели додекаэдра

Додекаэдр – это правильный многогранник, состоящий из 12 правильных пятиугольников, являющихся его гранями. Каждая вершина додекаэдра является вершиной трёх правильных пятиугольников. Таким образом, додекаэдр имеет 12 граней (пятиугольных), 30 рёбер и 20 вершин (в каждой сходятся 3 ребра) [9].

Сплошная модель додекаэдра

Схема складывания модуля для сплошной модели додекаэдр

На рисунке 15 изображена схема складывания для сплошной модели додекаэдра [9].

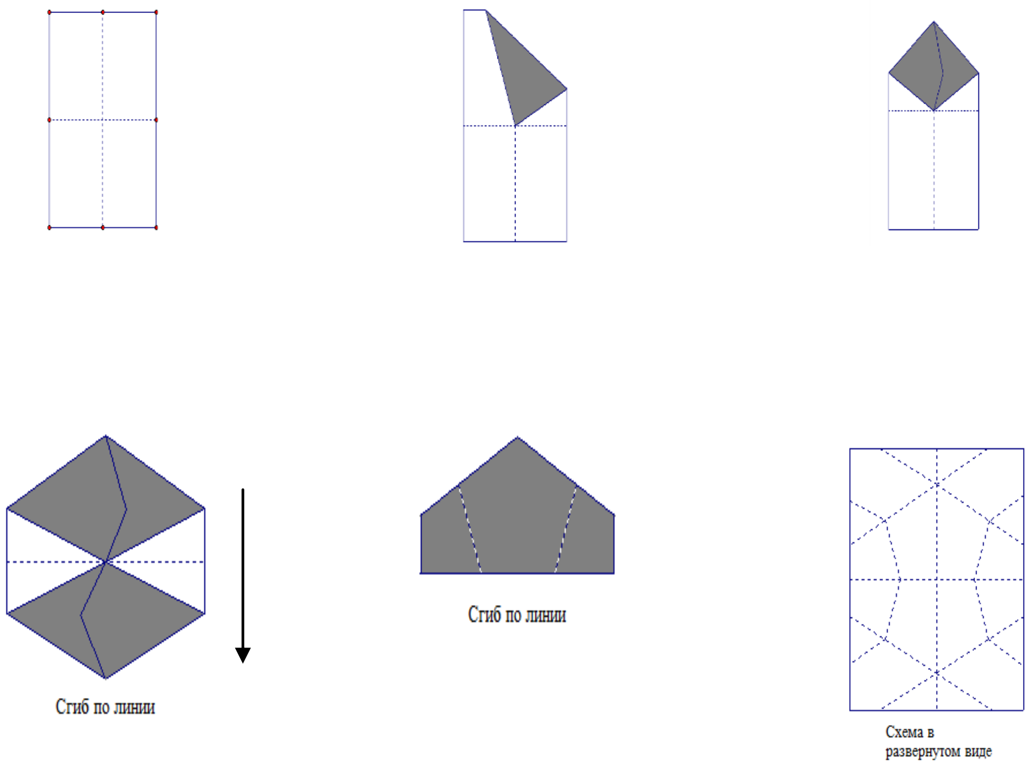


*Рис.*15. Схема сборки модуля для сплошной модели додекаэдра

Анализ схемы складывания модуля

Выясним, чему равен угол, полученный на втором шаге складывания модуля. Рассмотрим схему складывания в развернутом виде (рис.16)

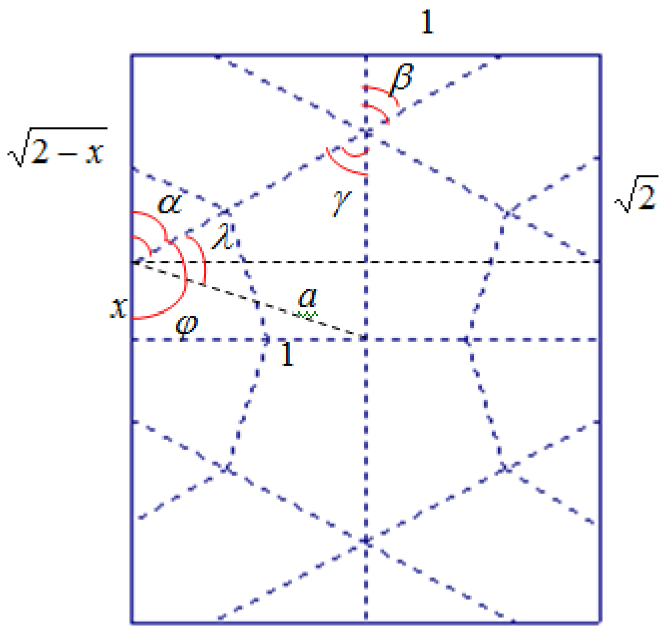


*Рис.*16. Схема модуля в развернутом виде

Введем обозначения (рис. 16): пусть малая сторона исходного прямоугольного листа бумаги равна 2, большая сторона равна $2\sqrt{2}$, тогда половины этих сторон будут равны 1 и $\sqrt{2}$ (рис. 16).

$\angle\alpha$ - искомый угол,

$\angle\beta, \angle\gamma, \angle\varphi, \angle\lambda$ - понадобятся для нахождения $\angle\alpha$,

x- меньшая часть середины большей стороны прямоугольника,

$\sqrt{2-x}$ - большая часть середины большей стороны прямоугольника,

a – прямая, совпадающая при наложении со стороной, которая равна $\sqrt{2-x}$.

Решение:

$\angle\beta = \angle\gamma$ - так как они накрест лежащие;

$\angle\beta = \angle\alpha$ - соответственные углы, при которых две параллельные прямые пересечены секущей;

$\angle\alpha = \angle\lambda$ - так как они совпадают при наложении друг на друга.

Найдем меньшую часть половины большей стороны прямоугольника

$(\sqrt{2}-x)^2 = 1^2 + x^2$,

$2 - 2\sqrt{2}x + x^2 = 1 + x^2$,

$2\sqrt{2}x = 1$,

$x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Найдем $\angle\lambda = \angle\alpha$:

$ctg\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\angle\varphi \approx 70{,}5°$

$2 \cdot \angle\lambda + \angle\varphi = 180°$, $\angle\lambda \approx 54{,}74°$;

$\angle\lambda = \angle\alpha \approx 54{,}74°$ - искомый угол, что и требовалось выяснить.

Опираясь на выше представленные вычисления, найдем градусную меру угла грани в сплошной модели додекаэдра.

Рассмотрим схему складывания в развернутом виде (рис.17).

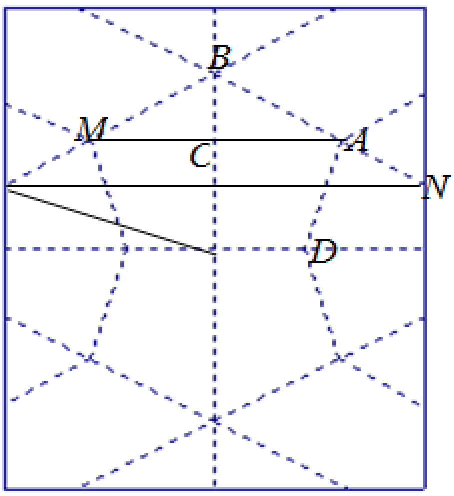


*Рис.*17.Схема складывания модуля для сплошной модели додекаэдра

Введем обозначения (рис.18):

$\angle BAD$ - искомый,

AD - биссектриса угла MAN .

В прямоугольном треугольнике ABC : $\angle C = 90°$, $\angle B \approx 54{,}74°$ - ранее доказывали, следовательно $\angle A \approx 35{,}26°$.

Так как $\angle BAN = 180°$ - развернутый угол, то $\angle MAN = 180° - 35{,}26° \approx 144{,}74°$;

Биссектриса AD делит наполовину угол $\angle MAN$, поэтому $\angle MAD \approx 72{,}37°$;

$\angle BAD \approx 107{,}63°$ - искомый угол.

Из теории о правильных многоугольниках мы знаем, что в правильном пятиугольнике все углы равны $108°$. Угол, меру которого мы находили, близок по значению с углом в правильной фигуре. Таким образом, пользуясь этой схемой сложения модели додекаэдра, мы получим лишь приблизительно правильную фигуру.

Реберная модель додекаэдра

На рисунке 18 изображена реберная модель додекаэдра [5].

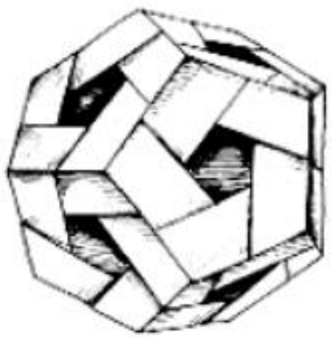


*Рис.*18.Реберная модель додекаэдра

Схема складывания реберной модели додекаэдра

На рисунке 19 изображена схема складывания модуля для реберной модели додекаэдра [9].

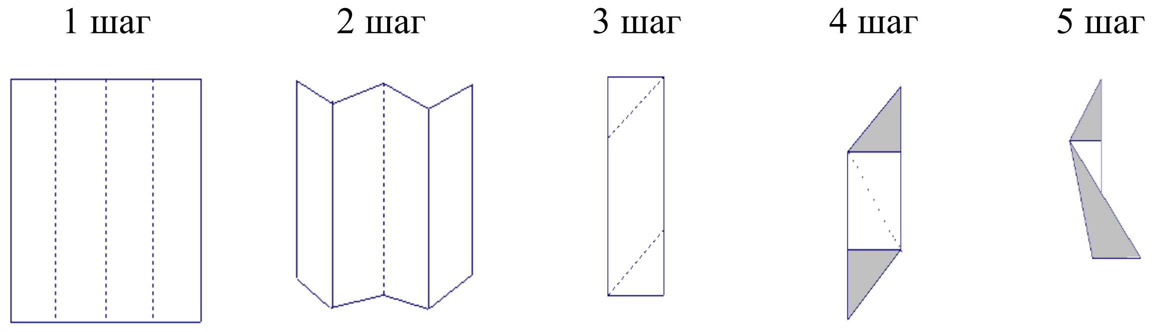


*Рис.*19.Схема складывания реберной модели додекаэдра

Анализ схемы складывания модуля

Найдем, чему равна мера угла между двумя ребрами в модели додекаэдра, нами сложенной. Так как мы работаем с правильными фигурами, то угол в додекаэдре должен быть равен $108°$.

Рассмотрим схему складывания в развернутом виде (рис.20). Введем обозначения, как показано на рисунке 20:

a - сторона квадрата (исходный лист бумаги),

φ - угол, равный искомому.

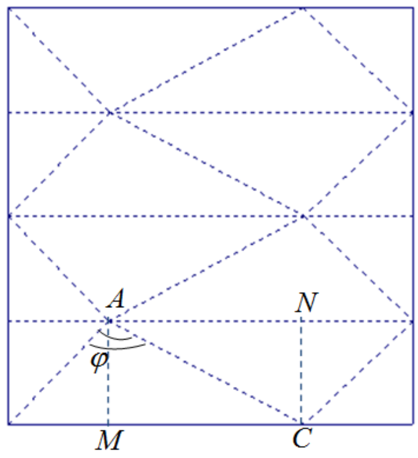


*Рис.*20.Схема модуля реберной модели додекаэдра в развернутом виде

Решение:

$\angle BAM = 45°$;

Из треугольника AMC: $AM = \frac{a}{4}$, $MC = \frac{a}{2}, tg\angle MAC = \frac{a}{2} \cdot \frac{4}{a} = 2$, следовательно, $\angle MAC = arctg\, 2 \approx 63{,}43°$;

$\varphi = \angle BAM + \angle MAC \approx 108{,}43°$ - искомый угол.

Так как угол между ребрами, нами рассматриваемой модели додекаэдра, не равен $108°$, а только, мера его, близка этому значению, то можно сделать вывод о том, что реберная модель додекаэдра, так же как сплошная, не является правильной. Исходя из того, что угол, нами найденный, все же близок по значению углу в правильном додекаэдре, то есть погрешность невелика, из-за объемности, построенная по схеме модель, (рис.19) схожа с правильной фигурой.

Правильную модель фигуры строить сложнее, поскольку, при складывании присутствует много сгибов.

1.3.4. Модели куба

Куб – правильный многогранник, каждая грань которого представляет собой квадрат. Все ребра куба равны [10].

Сплошная модель куба

Схема складывания модуля для сплошной модели куба

На рисунке 21 изображена схема складывания модуля для куба [8].

1 шаг 2 шаг 3 шаг

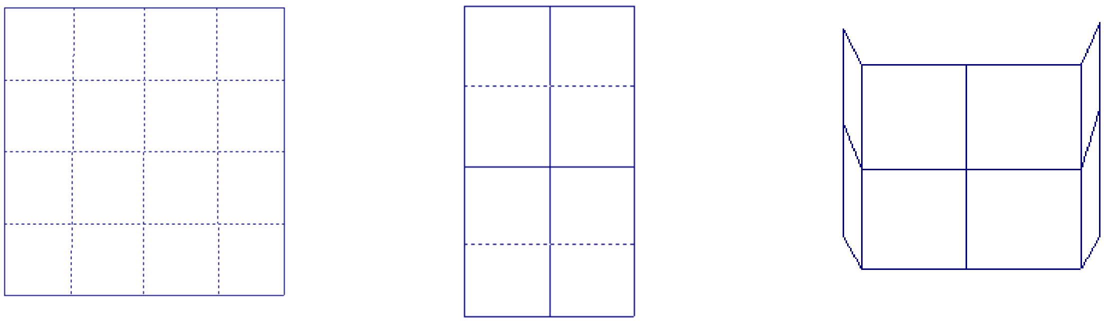


*Рис.*21.Схема складывания модуля для сплошной модели куба

Анализ схемы складывания

Модель куба, по сравнению с остальными правильными моделями многогранников, собирается легко. Модуль для модели так же в построении достаточно прост.

Из схемы складывания (рис.21) видно (очевидно), что грань куба в два раза меньше, чем исходный лист бумаги.

Реберная модель куба

Схема построения ребра для реберной модели куба

На рисунке 22 изображена схема складывания ребра для реберной модели куба [6].

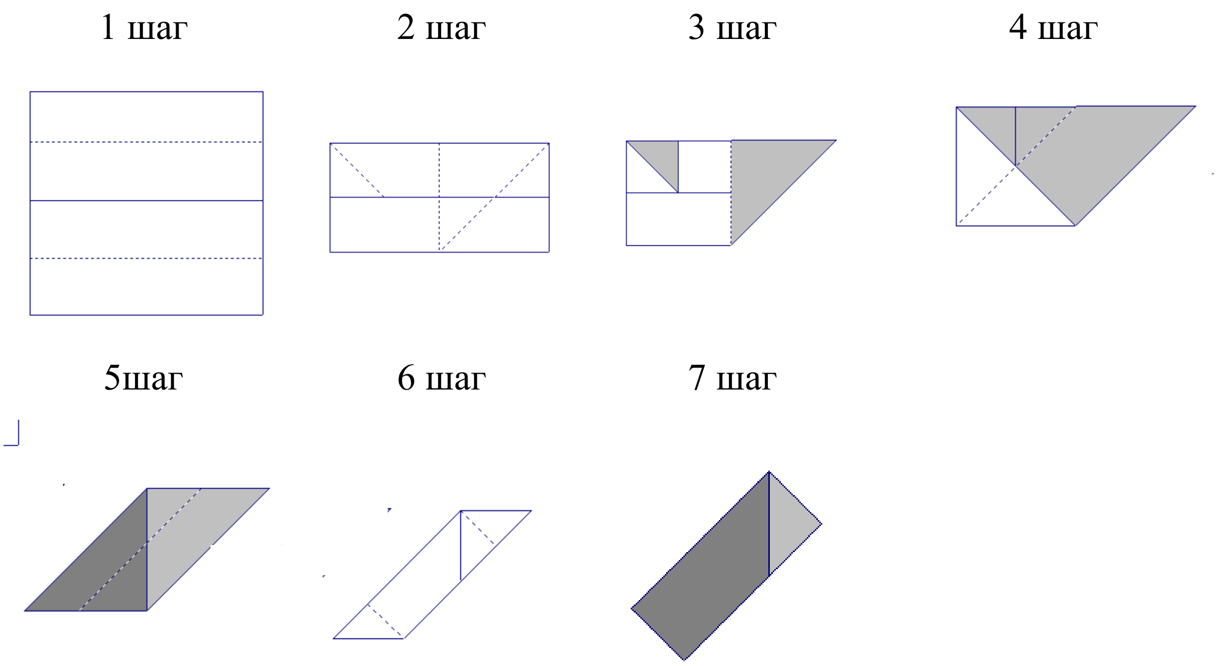


*Рис.*22.Схема складывания ребра для модели куба

Анализ схемы построения ребра

Чтобы модель получилась правильной необходимо, чтобы угол, полученный на шестом шаге (острый угол), был равен $45°$, и мера одного из углов, получившихся на последнем шаге складывания, равна $90°$.

Докажем, что острый угол, полученный на втором шаге равен $45°$: рассмотрим схему складывания в развернутом виде до пятого шага, только с обратной стороны (рис.23).

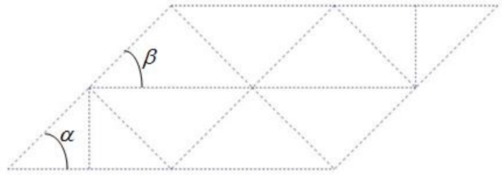


Рис.23. Схема в развернутом виде на пятом шаге

Введем обозначения, как показано на рисунке 24:

$\angle\alpha$ - угол, меру которого нужно доказать;

$\angle\beta$ - угол, мера которого равна мере угла α (две параллельные прямые пересечены одной секущей).

$\angle\beta = 45°$, так как он является той половиной угла, которая получилась при делении угла квадрата диагональю (квадрат и диагональ получились из линий сгиба) (рис.23).

$\angle\alpha = \angle\beta = 45°$, что и требовалось доказать.

Далее докажем, что угол, полученный на последнем шаге складывания (рис.23), равен $90°$.

Для доказательства рассмотрим шестой шаг схемы складывания.

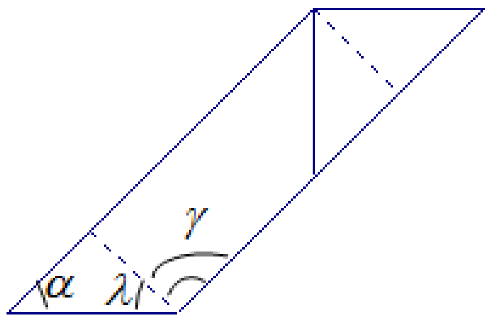


*Рис.*24. Шестой шаг схемы складывания

Введем обозначения, как показано на рисунке:

пусть $\angle\gamma$ - угол, меру которого нужно доказать;

$\angle\lambda = \angle\alpha = 45°$ - углы при основании равнобедренного треугольника (видно из схемы складывания).

$180° - \angle\lambda - \angle\alpha = \angle\gamma$;

$\angle\gamma = 180° - 45° - 45° = 90°$, что и нужно было доказать.

Так как мы доказали условия, которые должны выполнятся в построении реберной модели куба, то эта модель действительно правильная.

На рисунке 25 изображена реберная модель куба [6].

*Рис.*25. Реберная модель куба

Таким образом, рассмотрели для каждого Платонового тела реберную и сплошную модели, собранные методом оригами; для каждой модели рассмотрели ее схему складывания; провели геометрический анализ моделей, сделали вывод, на основе геометрического анализа, что модели получаются правильными.

1.4. Моделирование вписанных друг в друга правильных многогранников

В различных науках, которые хоть как-то связаны с геометрией часто встречаются задачи на взаимное расположение многогранников, вписанный многогранник в другой многогранник является частным случаем.

Для того, чтобы строить модели данного взаимного расположения, имея при этом небольшую погрешность в построениях, необходимо придерживаться определенного алгоритма действий.

Алгоритм построения моделей многогранников, вписанных друг в друга

– выбрать подходящую бумагу для моделирования;

– определиться с размером листов бумаги, из которой получим модули для построения внешней модели;

– высчитать, какой должна быть длина ребер внутренней модели, чтобы ее можно было вписать во внешнюю фигуру, исходя из длины ребер внешней модели, которую получим из построенных модулей. Расчеты выполнять согласно вычислениям, выполненным в данной теме;

– найти, каким должен быть размер листа, для построения модуля внутренней модели;

– построить внутреннюю модель;

– построить внешнюю модель;

– вписать одну построенную модель в другую.

Алгоритм можно применять в другом порядке (относительно моделей), если построение начинать с внутренней модели.

Рассмотрим алгоритм на примере октаэдра вписанного в куб.

Для наглядности построений, нужно выполнить модель внешнего многогранника реберной, но при этом сделать крепеж, чтобы внутренняя фигура могла «держаться» на гранях внешней модели, а также можно сделать ее из прозрачной бумаги, а внутреннюю модель желательно сделать сплошной. Поэтому, модель куба будет реберной или сплошной, но из прозрачной бумаги, а октаэдра – сплошной [9, 11].

1. Октаэдр можно вписать в куб так, чтобы все его вершины лежали в точках пересечения диагоналей граней куба (рис. 26) [10].

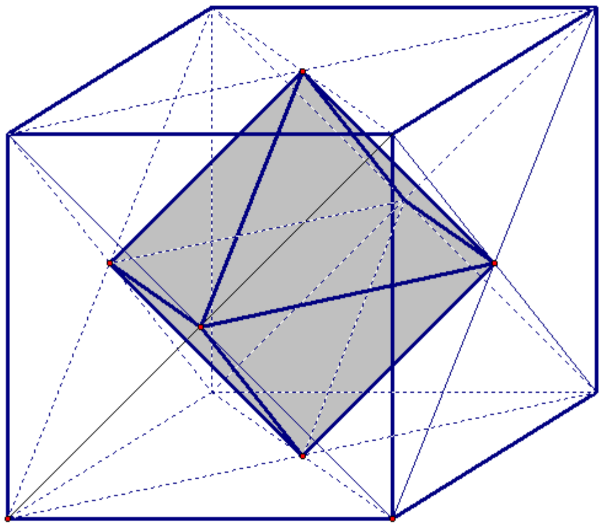


Рис. 26. Октаэдр, вписанный в куб, где все его вершины лежат в точках пересечения диагоналей граней куба

Выясним отношение длин ребер куба и октаэдра.

Пусть длина ребра куба равна a, тогда из треугольника $ABC: \angle A = 90°, AB = \frac{a}{2}$, $AC = \frac{a}{2}$, получаем $BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ - длина ребра октаэдра (рис. 27)

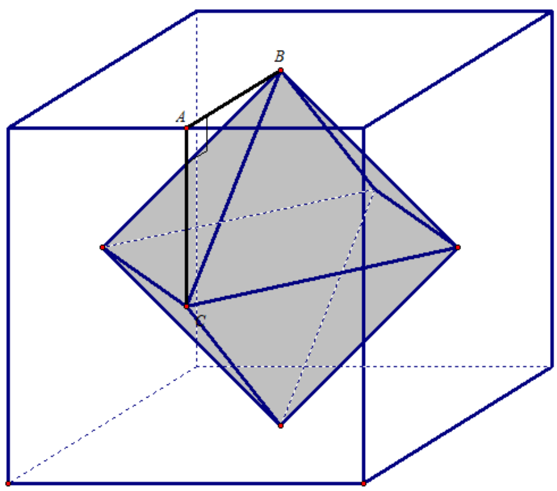


*Рис.*27. Треугольник *ABC*

Для построения используем листы формата $A4$, где малая сторона листа бумаги равна m, а большая равна $m\sqrt{2}$.

Из схемы складывания модуля для октаэдра можно заметить, что длины сторон треугольника BMN равны длинам ребер октаэдра (рис. 28)

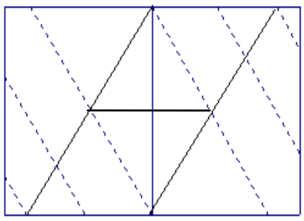


*Рис.*28.Схема складывания модуля для октаэдра в развернутом виде

Обозначим стороны треугольника за x;

$h = \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{m}{2}$ - длина высоты треугольника BMN;

$x\sqrt{3} = m$, $x = \frac{m\sqrt{3}}{3}$ - длина ребра, в зависимости от малой стороны листа бумаги. Т.е. $\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{m\sqrt{3}}{3}$ - длина ребра октаэдра.

Получаем, что длина ребра куба равна $a = \frac{m\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{m\sqrt{6}}{3}$.

2. Октаэдр можно вписать в куб так, чтобы его вершины лежали на ребрах куба (рис. 29) [10].

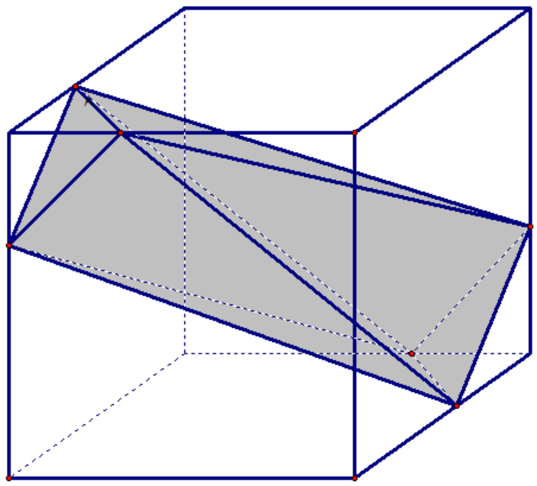


*Рис.*29. Октаэдр, вписанный в куб так, что его вершины лежат на ребрах куба

Выясним, в каком отношении будут делить вершины октаэдра ребра куба.

Пусть ребро куба равно *a*, ребро октаэдра – *x*.

Обозначим отношение частей ребра куба, полученных при делении вершиной октаэдра, $n:(a-n)$ (рис. 5). Тогда из треугольника ABC (рис. 30) получаем: $\angle C = 90°$, $CB = a - n$, $AC = \sqrt{a^2 + (a-n)^2}$, отсюда $AB = \sqrt{a^2 + 2(a-n)^2} = x$.

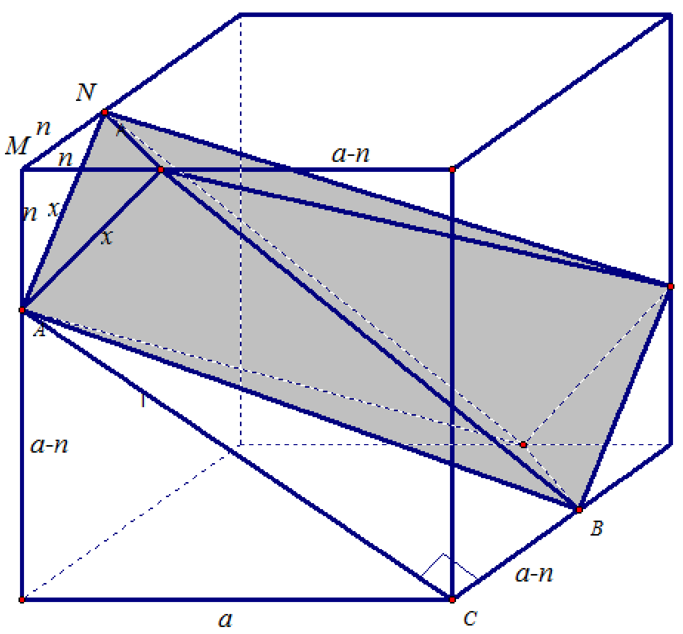


*Рис.*30. Октаэдр, вписанный в куб так, что его вершины лежат на ребрах куба. Обозначения.

Из треугольника *AMN* (рис.) находим, что $x = n\sqrt{2}$.

Получаем, что $\sqrt{a^2 + 2(a-n)^2} = n\sqrt{2}$,

$2n^2 = a^2 + 2(a-n)^2$,

$2n^2 = a^2 + 2a^2 - 4an + 2n^2$,

$4an = 3a^2$,

$4n = 3a$,

$n = \frac{3a}{4}$ - первая часть ребра.

Найдем втору часть ребра:

$a - \frac{3a}{4} = \frac{a}{4}$ - вторая часть ребра.

Таким образом, нашли отношение частей ребра куба, полученных при делении вершиной октаэдра: $\frac{3a}{4} : \frac{a}{4}$.

Алгоритм моделирования октаэдра, вписанного в куб:

– выбрать подходящую бумагу для моделирования;

– определиться с размером листов бумаги, из которой получим модули для построения куба – внешней модели;

– высчитать, какой должна быть длина ребер октаэдра, чтобы его можно было вписать в куб, исходя из длины ребер куба, которую получим из построенных модулей. Расчеты выполнять согласно вычислениям, выполненным в данной теме;

– найти, каким должен быть размер листа, для построения модуля октаэдра;

– построить модель октаэдра;

– построить модель куба;

– вписать модель октаэдр в модель куба.

Алгоритм можно применять в обратном порядке, если построение начинать с внутренней модели.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что, выполняя определенный алгоритм действий, можно выполнить моделирование взаимного расположения любых правильных многогранников.

ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ, ВЫПОЛНЕННЫХ В ТЕХНИКЕ ОРИГАМИ, ПРИ ИЗУЧЕНИИ ПЛАНИМЕТРИИ

Абстрактный характер геометрии и сложность материала приводит к тому, что решение геометрических задач уже на самом первом этапе часто вызывает трудности. Нужно обладать хорошо развитым геометрическим воображением, чтобы представить себе соответствующую пространственную картину. Вместе с тем изобразить на листе бумаги данные фигуры не просто, так как, геометрическое мышление, которое формирует геометрия, имеет две составляющие – наглядно-образную и логическую, и что геометрия согласует обе эти составляющие. При этом на начальном этапе изучения геометрии, акцент делается на наглядно-образной составляющей, которая является основой, и только по мере развития геометрического мышления, возрастает значение его логической составляющей.

Геометрия нуждается в особом представлении. Сухое, академически строгое изложение здесь не подходит. Здесь и пригождаются модели фигур, сделанные методом оригами, которые наглядно показывают, что мы живем в мире, который является объемным. Они способствуют развитию наглядно-образного мышления. Ученику трудно осознать темы. Значит, необходимо стремиться к тому, чтобы как можно больше информации передавалось ученику через наглядность. Дети охотно складывают изделия. Активное использование оригами позволяет разнообразить учебную деятельность, что способствует развитию у детей не только памяти, но и внимания, восприятия, воображения, разных форм мышления.

2.1. Применение моделей правильных многогранников, выполненных в технике оригами, при изучении некоторых тем планиметрии

При изучении планиметрии, в некоторых из тем, для лучшего их понимания, хорошо использовать модели правильных фигур, в нашем случае правильных многогранников, поскольку работа с моделями подготавливает воображение и абстрактное мышление к изучению стереометрии, а так же это небесполезно по той причине, что почти каждая стереометрическая задача сводится к планиметрической.

При изучении некоторых тем планиметрии возможно использование не только готовых моделей фигур, но и процесса их построения. На каждом этапе построения модели, на листе бумаги, посредством сгибания и складывания листа, образуются фигуры, изучаемые в курсе планиметрии, с помощью которых можно отрабатывать теоретический материал.

Рассмотрим некоторые темы планиметрии, при изучении которых возможно использовать модели правильных многогранников, выполненных методом оригами (применяя на уроках модели правильных многогранников, учитель должен заранее познакомить учащихся с данными фигурами) [3].

Глава 1. Начальные геометрические сведения

Параграф 3. Сравнение отрезков и углов

При изучении этой темы можно брать для построения любую из моделей правильных многогранников, процесс построения этих моделей поможет отработать, например, такие понятия как «равные отрезки», «равные углы», «середина отрезка», «биссектриса» и другие. Моделируя модель правильного многогранника, важно знать, такие понятия, ведь только так модель может получиться правильной. Сформированность теоретических знаний будет видна на получившейся модели.

Пример задания:

Собрать модель куба, выполняя порядок действий и опираясь на схему (с 3 – 9 шаг), 3 – 9 шаги указаны на рисунке 31:

1 *шаг*. Наметить середину у меньшей стороны листа бумаги и согнуть лист пополам в этой точке.

-*Если вы получили две части листа, разделенные линией сгиба, то приступайте к следующему шагу*.

2 *шаг*. Далее вам нужно сделать так, чтобы исходная меньшая сторона листа была разделена на четыре равных отрезка. А, следовательно, получить четыре равных части, разделенные линиями сгиба (вдоль листа).

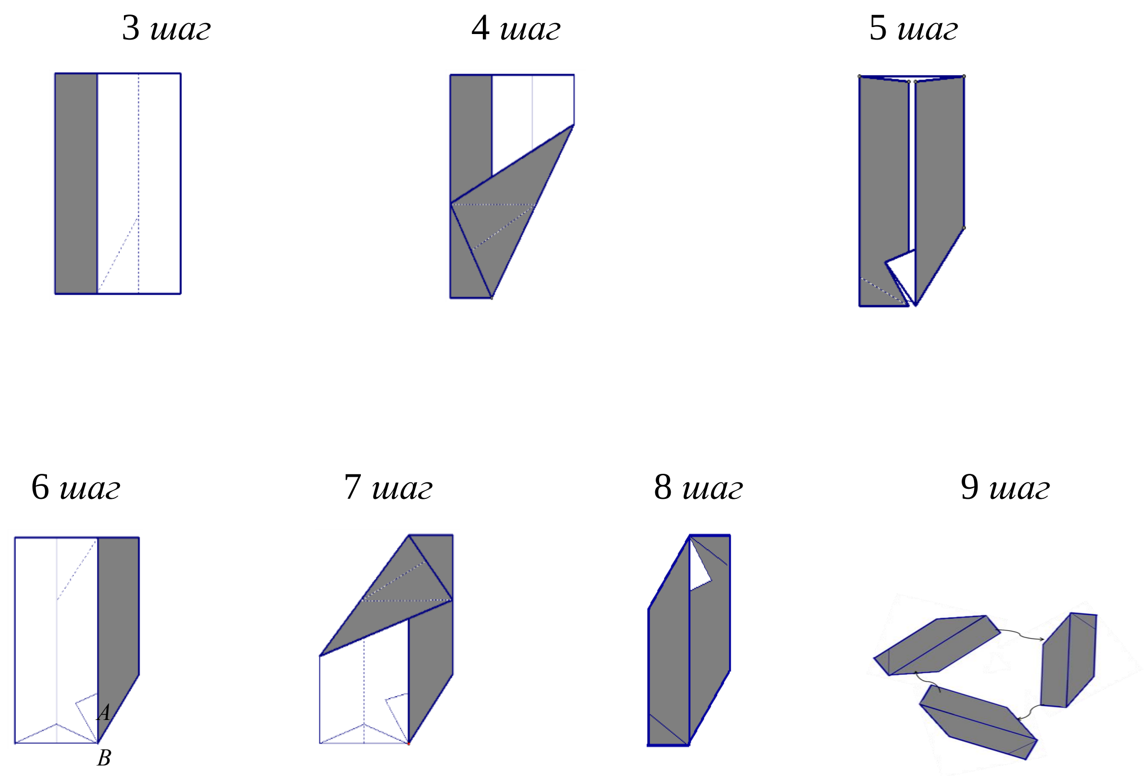


Рис 31. 3 – 9 шаги задания

Дополнительные вопросы:

1) чем является отрезок *AB*, получившийся на 6 шаге сборки модели?

2) что называется серединой отрезка?

Параграф 5. Измерение углов

Данный параграф предполагает, что учащиеся в результате его изучения, по меньшей мере, должны знать:

– что такое градус;

– что такое градусная мера угла;

– какие углы называются равными;

– вид углов (острый, тупой, прямой).

Одним из умений, формируемым в данном параграфе, является умение измерять углы.

Самое главное, учащиеся должны понимать, что эти знания и умения практически очень значимы. И чтобы ученики поняли, почему это необходимо знать, можно применить в обучении так же реальные модели правильных многогранников, причем это может быть любой из пяти видов.

Пример задания:

1) Построить модель додекаэдра по следующей схеме (рис. 32) (показана схема складвания одного модуля).

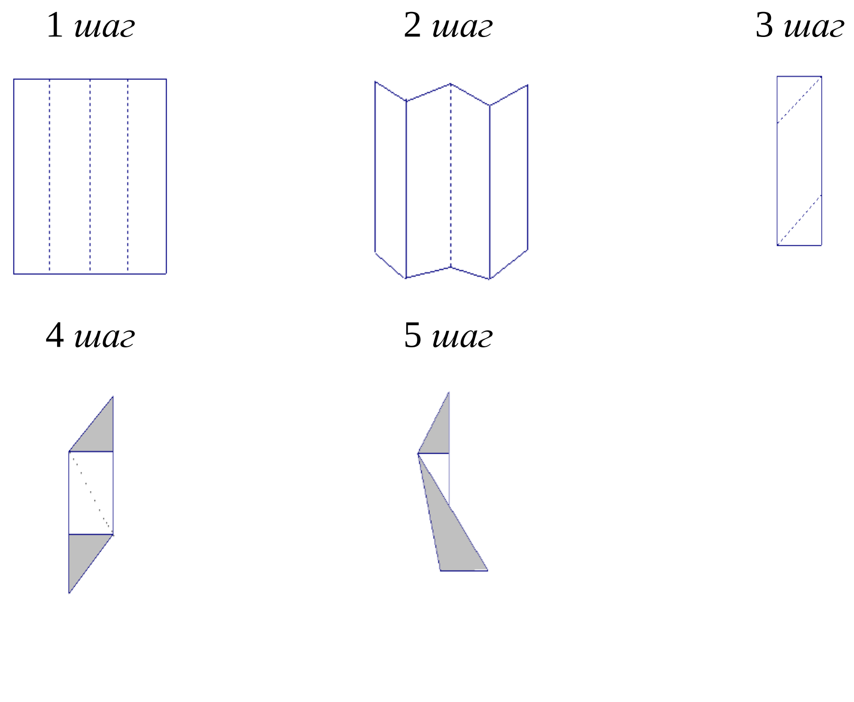


*Рис.*32. Схема складывания модуля для модели додекаэдра

2) Доказать, что у полученной модели, грани являются правильными многоугольниками.

Предполагается, что ученики измеряя транспортиром и линейкой углы и стороны, замечают, что углы имеют одинаковую градусную меру, а стороны равную длину.

Глава 2. Треугольники

В рассматриваемой главе, изучаются все признаки равенства треугольников, элементы треугольника (биссектриса, высота, медиана), рассматриваются задачи на построение. Все изучаемые теоретические вопросы данной главы, можно отрабатывать в процессе построения моделей правильных многогранников методом оригами. С помощью моделей учащиеся должны понять, что процесс изготовления чего - либо очень важная и ответственная часть, где необходимо выполнять каждое действие с максимальной точностью, что требует знания теории. Ведь от точности построений зависит исходный результат.

Пример задания:

Построить модель куба по следующей схеме (рис.33)

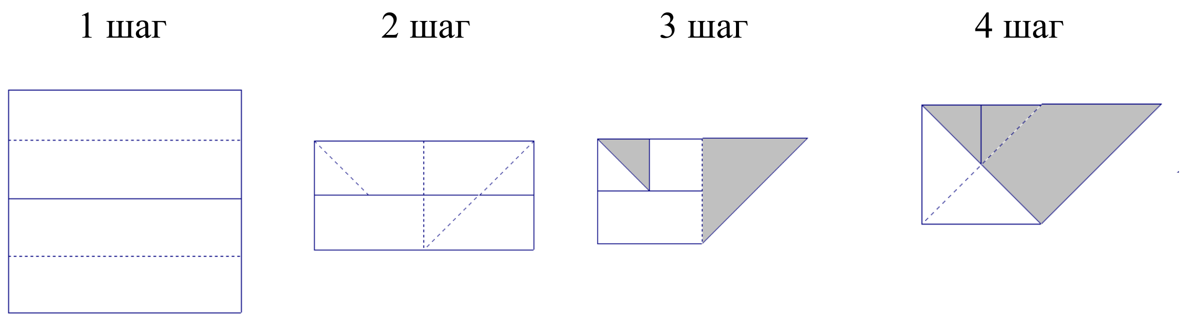


Рис. 33. Схема складывания модуля для модели куба

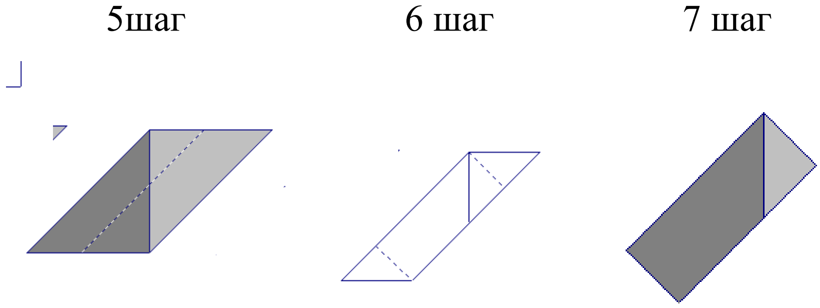


Рис. 33. Схема складывания модуля для модели куба

Модель получится правильной только в том случае, если:

- треугольники, получившиеся на втором шаге, будут равными (треугольники *ABC* и *ABD*) (рис.34);

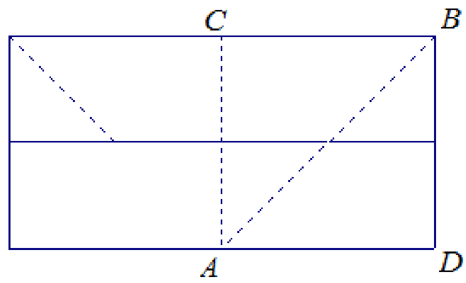


Рис. 34. Второй шаг схемы складывания модуля для модели куба

- треугольник, получившийся на шестом шаге складывания, является равнобедренным (треугольник *MNF*) (рис.35).

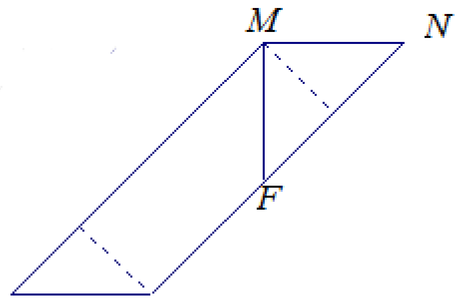


Рис. 34. Шестой шаг схемы складывания модуля для модели куба

Докажите, что полученная модель будет правильной.

Глава 4. Соотношение между сторонами и углами треугольника

Параграф 3. Прямоугольные треугольники

Многие стереометрические задачи сводятся к решению прямоугольных треугольников. Зная различные свойства и признаки прямоугольных треугольников, можно решить самые сложные стереометрические задачи. Рассмотрим пример задания с использованием модели правильного многогранника, требующее знания свойств таких треугольников.

Пример задания:

Найдите градусную меру угла *FEC* (рис. 36), полученного на третьем шаге складывания модуля для реберной модели тетраэдра, опираясь на схему построения этой модели (рис. 35).

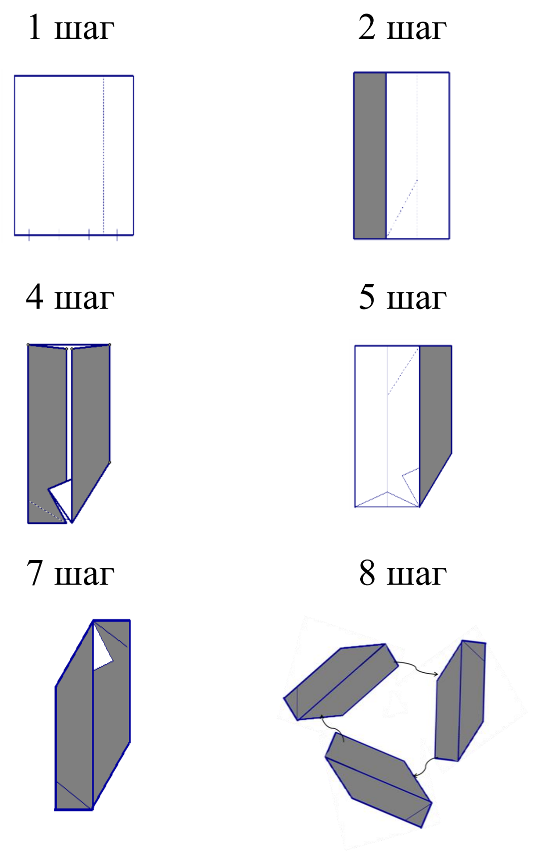


Рис. 35. Третий шаг схемы складывания модуля для реберной модели тетраэдра

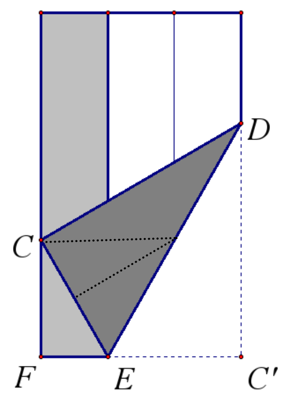


*Рис.*36. Модуль фигуры на третьем шаге складывания

Глава 14. Начальные сведения из стереометрии

Данная глава изучается последней в девятом классе и является введением в стереометрию. В представленной главе знакомят учащихся с некоторыми пространственными фигурами и формулами для вычисления их объемов и площадей поверхностей. Среди рассматриваемых пространственных фигур, также есть правильные фигуры (куб, тетраэдр, октаэдр) [3]. С помощью моделей сделанных методом оригами можно дать представление о правильных многогранниках, учащимся будет проще воспринимать объемнее фигуры на реальных моделях, а процесс построения поможет усвоить свойства этих фигур.

Пример задания:

На рисунке показаны схемы построения одного модуля для куба (рис. 38), тетраэдра, октаэдра (рис. 37).

- Определите, сколько нужно соответствующих модулей для каждой модели фигур;
- обоснуйте выбор количества модулей;
- соберите нужное количество модулей;
- постройте модели куба, тетраэдра, октаэдра.

Задание выполняется по группам.

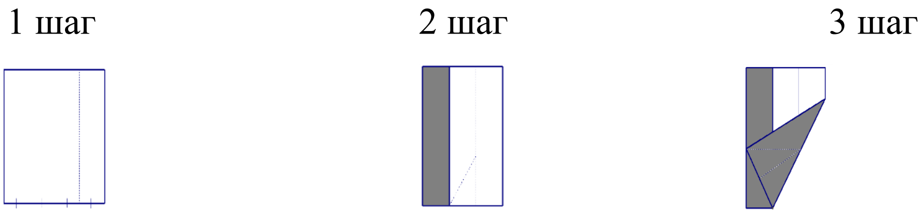


Рис. 37. Схема складывания модуля для реберных моделей тетраэдра и октаэдра

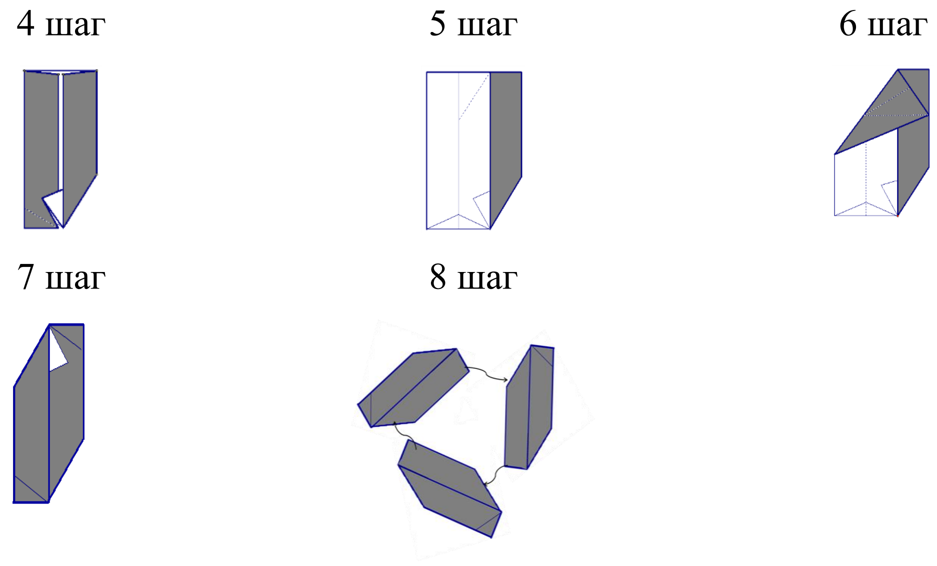


Рис. 37. Схема складывания модуля для реберных моделей тетраэдра и октаэдра

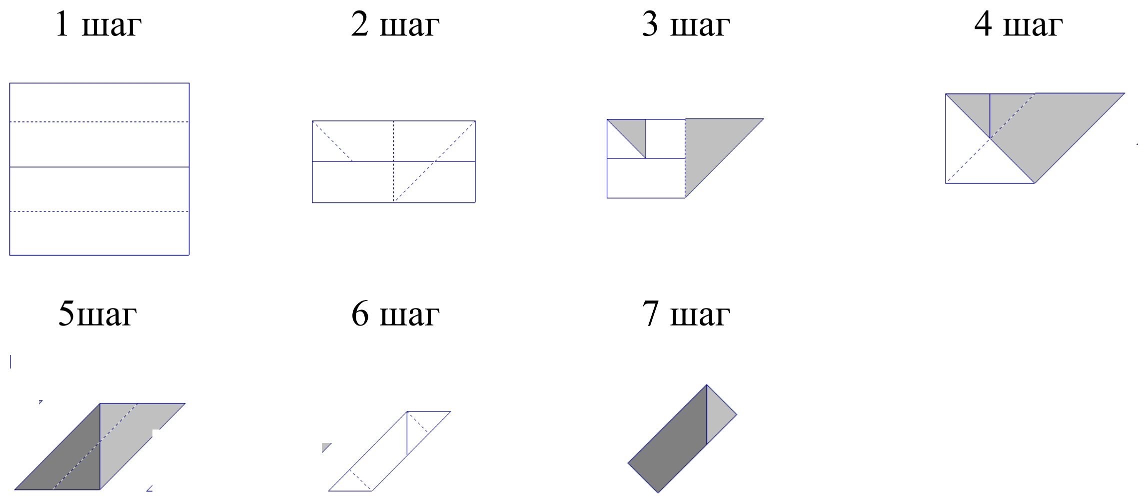


Рис. 38. Схема складывания модуля для реберной модели куба

2.2. Применение моделей правильных многогранников, выполненных в технике оригами, при изучении планиметрии на внеклассных часах

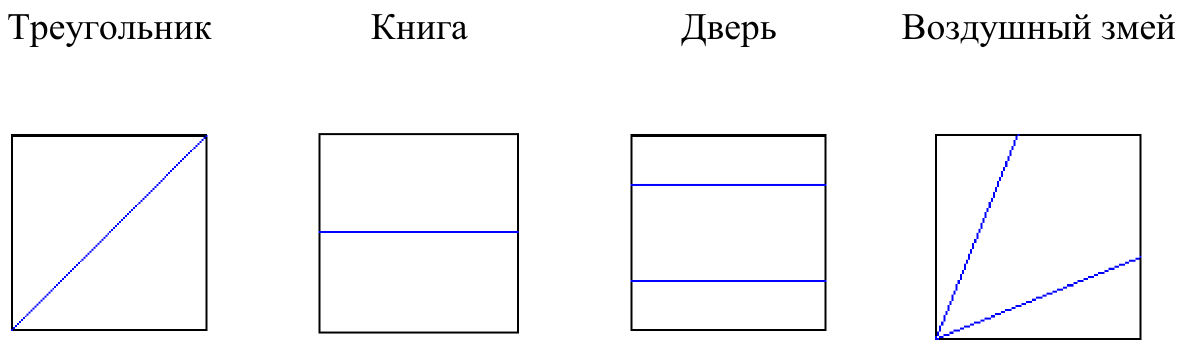
Геометрию, в частности планиметрию, можно изучать не только в классные часы. Ее изучением также интересно заниматься внеурочно.

Для того чтобы время, отведенное на занятие внеклассной геометрии, прошло интересно и с большей пользой, неплохо использовать на занятиях технику оригами.

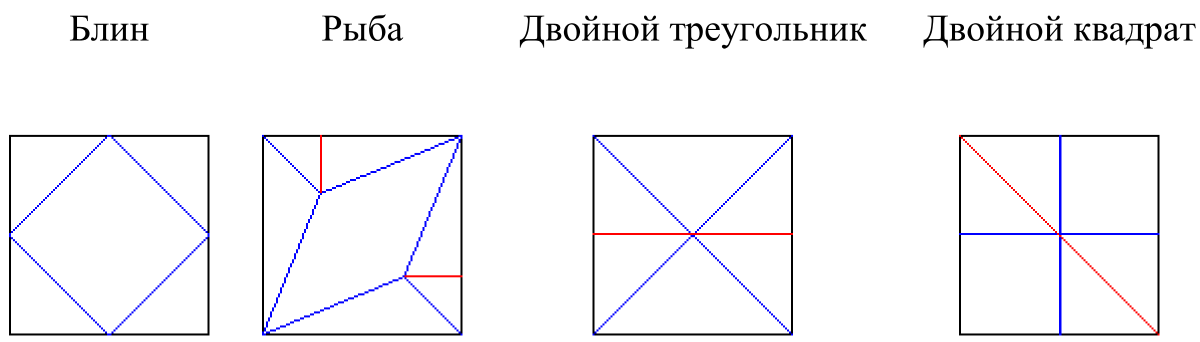
В ходе изучения геометрии, на внеклассных мероприятиях, с использованием оригами, можно повторять основные геометрические фигуры (треугольник, прямоугольник, квадрат, ромб, четырехугольник), понятия (сторона, угол, вершина угла, диагональ, центр фигуры), а также их свойства, при этом узнавая технику оригами.

Работа по схемам, процесс складывания плоскостных фигур направлены на развитие восприятия, которое связано с различными операциями мышления. Складывая их в различных комбинациях, можно получить многогранники. Здесь особое место занимает метод решения задач на построение без помощи циркуля и линейки. Особая ценность этого метода в том, что он позволяет построить правильные многоугольники, построение которых с помощью циркуля и линейки затруднительно, а в некоторых случаях невозможно.

На рисунке 39 изображены простые и средние базовые формы из техники оригами [28].



Простые базовые формы



Средние базовые формы

Рис. 39. Простые и средние базовые формы в технике оригами

Глядя на эти формы, видно, что при помощи оригами можно повторить, например, следующие понятия:

– горизонтальные, вертикальные, наклонные линии;

– сложи квадрат разными способами, покажи смежные стороны, диагональ;

– квадраты;

– все виды треугольников и т.д.

Рассмотрим пример внеклассного занятия, где используется модель одного из правильных многогранников (таб. 2). Представленное занятие можно проводить в 7 – 9 классах.

Внеклассное занятие №1.
«Многогранники»

Ход занятия (таб. 2)***:***

1. Организационный момент (2 мин)
2. Занятие:
   А) Ознакомление (6 мин);
   Б) Мини-Викторина (10-12 мин);
   В) Моделирование фигуры (30 мин);
3. Рефлексия (2 мин).

Оборудование: доска, проектор

Таблица 2

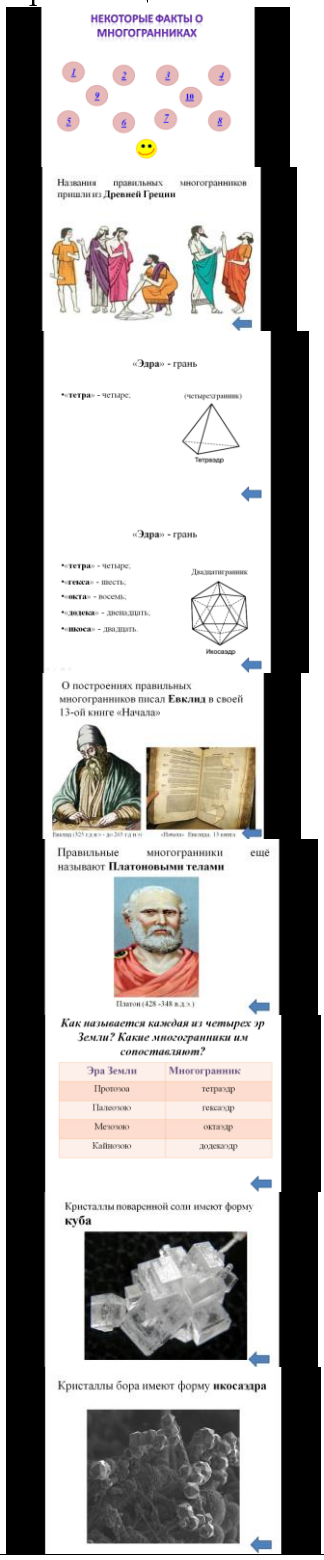
Этапы	**Деятельность учителя**	**Деятельность учащихся**	**Средства**
1.Организационный момент (15.00-15.02)	Здравствуйте, ребята. Присаживайтесь! Все ли подготовились к сегодняшнему занятию? Вам был предоставлен список вопросов, ответы на которые вы должны были найти и прочитать (эта информация интересная, она расширяет ваш кругозор).	Приветствие.	Раздаточный материал (список вопросов раздается заранее).

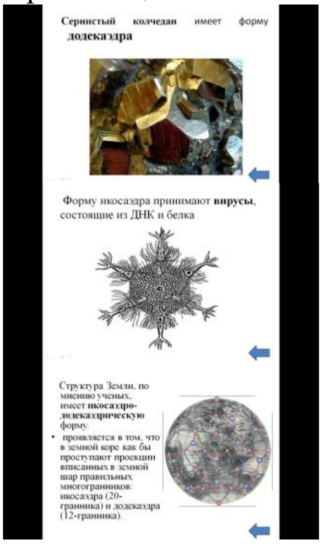
Продолжение таблицы 2

Этапы	**Деятельность учителя**	**Деятельность учащихся**	**Средства**
А) Ознакомление (15.02-15.08);	Сегодня мы поговорим о том, как искусство оригами можно связать с математикой. -Скажите, ребята, кто-то из вас знает, что такое оригами? -Что это такое? -Как вы думаете, как оригами может быть связано с математикой? -Оригами может помочь вам в изучении геометрии, особенно, в стереометрии (этот раздел вы будете изучать в старших классах). Модели, сконструированные с помощью оригами, легко представлять, что позволяет изучать многогранные фигуры с большим интересом, а так же, гораздо проще решать сложные задачи стереометрии. - Знаете ли вы, что такое многогранники?	- Да, мы все знаем. -Учащиеся: Искусство складывания из листа бумаги. - разные геометрические фигуры можно складывать -Учащиеся: Многогранником называется геометрическое тело, поверхность	

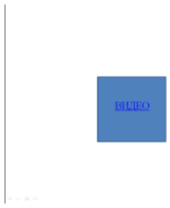
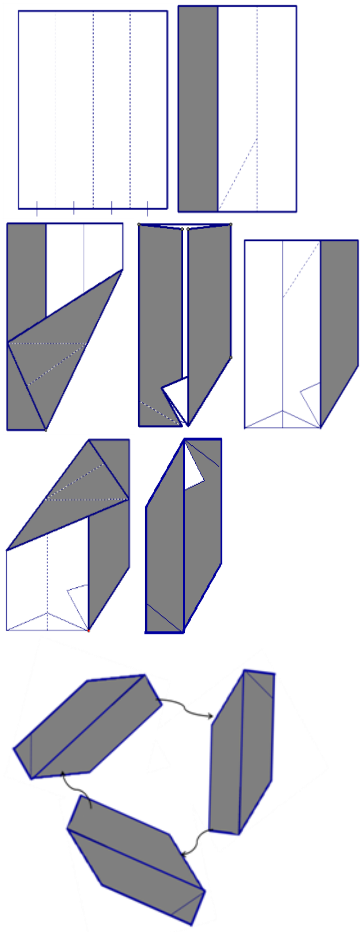
Продолжение таблицы 2

Этапы	Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Средства
А) Ознакомление (15.02-15.08);	- А что такое правильные многогранники? -Сколько существует правильных многогранников? - Сегодня мы постараемся собрать модель одного из правильных многогранников с помощью оригами. Для этого вам нужно разделится на четыре группы.	которого состоит из конечного числа плоских многоугольников. -Учащиеся: Многогранники, у которых грани - правильные многоугольники. - пять	Презентация: 

Этапы	**Деятельность учителя**	**Деятельность учащихся**	**Средства**
Б) Мини-Викторина (15.08-15.20);	- Перед тем, как собрать модель фигуры поговорим об интересных фактах, связанных с правильными многогранниками. Викторина «Некоторые факты о многогранниках». 1. Откуда пришли названия правильных многогранников? 2. О чем говорят названия многогранников?	 - Учащиеся: Из Древней Греции -Учащиеся: о числе граней в фигуре	Презентация: 

Этапы	**Деятельность учителя**	**Деятельность учащихся**	**Средства**
Б) Мини-Викторина (15.08-15.20);	3. Откуда пришли названия правильных многогранников?	- Учащиеся: Из Древней Греции	Презентация: 
	4. О чем говорят названия многогранников?	-Учащиеся: о числе граней в фигуре	
	5. Кто в своей 13-ой книге писал о построении правильных многогранников?	-Учащиеся: Евклид	
	6. Как ещё называют правильные многогранники?	- Учащиеся: Платоновы тела	
	7. Ученые полагают, что четырем геологическим Эрам Земли соответствуют четыре силовых каркаса правильных многогранников. Что это за Эры, и какие многогранники им соответствуют?	-Учащиеся: называют эры земли и соответствующие им многогранники	
	8. Какую форму имеют кристаллы поваренной соли?	-Учащиеся: кристаллы поваренной соли имеют форму куба	
	9. Какую форму имеют кристаллы бора?	- Учащиеся: Кристаллы бора имеют форму икосаэдра.	

Этапы	**Деятельность учителя**	**Деятельность учащихся**	**Средства**
Б) Мини-Викторина (15.08-15.20);	10. Кристаллы каких ещё химических элементов имеют форму правильных многогранников? 11. Что напоминает ученым биологам форма икосаэдра? 12. Н.Ф.Гончаров и В.С.Морозов считают, что структура земли именно такая. Какая она? Это всего лишь малая часть интересного о многогранниках. Если вам интересно узнать о них больше, то вы можете сами узнавать в различных источниках.	-Учащиеся: учащиеся предлагают варианты -Учащиеся: Ученым биологам форма икосаэдра напоминает форму вирусов -Учащиеся: Икосаэдро-додекаэдрическая	

Этапы	**Деятельность учителя**	**Деятельность учащихся**	**Средства**
В) Моделирование фигуры (15.20-15.50);	- Вот мы и добрались до этого момента! - Модель какого многогранника вы хотели бы собрать? - Я предлагаю смоделировать тетраэдр. - Сколько граней у тетраэдра? Сколько ребер? -Что собой представляют грани этого многогранника? Какую форму они имеют? -Начнем моделировать! -Вам понадобится столько квадратных листов бумаги, сколько ребер у тетраэдра. Сколько? - Вашему вниманию представлено видео сборки. Я буду комментировать там, где вам будет непонятно. -Ребята, кто складывает быстро, помогайте своему соседу или другим ребятам.	- высказывают свои предложения -Учащиеся: 4 грани и 6 ребер. - Учащиеся: грани-равносторонние треугольники -Учащиеся: 6 ребер	Презентация: видео в презентации  Схема сборки 

Этапы	**Деятельность учителя**	**Деятельность учащихся**	**Средства**
В) Моделирование фигуры (15.20-15.50);	-Ну что, у всех получилась модель тетраэдра? -Если кому–то интересно знать, как складывать остальные правильные многогранники, можете подходить на перемене, я скажу, где можно найти схему складывания.	- Да.	
3. Рефлексия (15.50-15.52);	-Вот и подошло к концу наше занятие. - Что нового вы узнали на сегодняшнем занятии? -Кому не понравилось занятие? -Что вам хотелось бы добавить?	- Узнали, как складывать модель. И др. ответы	

Внеклассное занятие №2.
«Модели правильных многогранников»

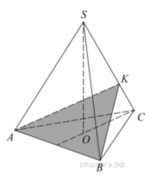
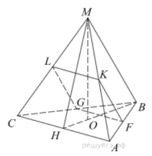
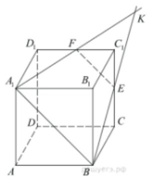
Ход занятия (таб. 3)***:***

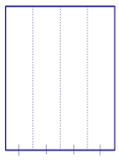
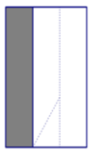
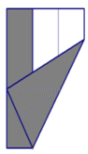
1. Организационный момент
2. Беседа
3. Действие
4. Рефлексия

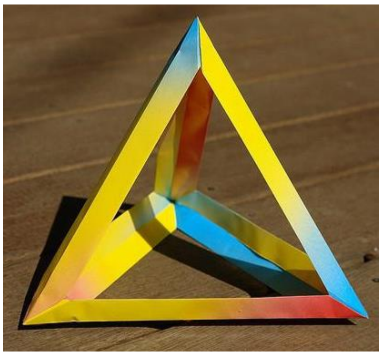
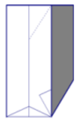
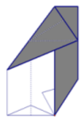
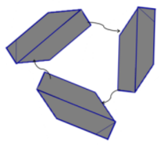
Оборудование: доска, проектор

Таблица 3

Этапы	**Деятельность учителя**	**Деятельность учащихся**	**Средства**
Организационный момент	Здравствуйте, ребята! Присаживайтесь.		
Беседа	- Ребята, сегодня мы с вами поговорим об объемных телах, а если быть точнее, то о правильных многогранниках. - кто знает, что такое многогранник? - А что же тогда называется правильным многогранником? -Хорошо. Многогранник называется правильным, если: – он выпуклый; – все его грани – равные друг другу правильные многоугольники; – в каждой его вершине сходится одинаковое число ребер; – все его двугранные углы равны.	-Ответы учащихся -Ответы - -Различные ответы, в том числе «в геометрии»	

Этапы	**Деятельность учителя**	**Деятельность учащихся**	**Средства**
Беседа	- Какие многогранники вы знаете? - Где вы можете встретить правильные многогранники? - Да, действительно, ещё вы их встретите в 10 -11 классах в геометрии, раздел геометрии, в котором изучают пространственные фигуры, называется стереометрией. - Легко ли вам представить высоту треугольника? Или квадрата? Или диагональ квадрата? - Сейчас попробуйте представить, как в реальности будут выглядеть следующие рисунки, посмотрите на слайд. - Сложно было представить? А с этой «красотой» будут связаны математические задачи. - Чтобы изучение стереометрии вам не показалось сложным и непонятным явлением, а, напротив, увлекательным занятием, можно использовать реальные модели многогранников. Модель можно покрутить, посмотреть с каждой ее стороны, так же на модели можно проверить правильность решенной задачи. А ещё проще представить модель и не только модель, а различные ее	-Да (учащиеся легко могут представить объекты плоских фигур) Стараются представить рисунки на слайде - У некоторых, возможно, возникнут затруднения с представлением объемных фигур и их объектов	Сопровождающая презентация:    Презентация моделей правильных многогранников. (Уже собранных)

Этапы	**Деятельность учителя**	**Деятельность учащихся**	**Средства**
	сечения и другие объекты, если модель разбирается и можно заглянуть внутрь модели. - Как вы думаете, из чего можно получить такую модель? Получить такую модель можно методом модульного оригами Кто знает, что это такое? (При построении используется несколько деталей). - Сегодня вы сами поймете, как это просто представить то, что вам нужно, а самое интересное, что это увлекательно.	- Ответы - Ответы	
Действие (40 мин)	- Нам предстоит построить один из видов многогранников. Я хочу вам предложить смоделировать тетраэдр или правильную треугольную пирамиду. (Раздаю листы бумаги) - Схема построения представлена на слайде. Построенная модель будет реберной. - Посмотрите внимательно на схему. Отличается ли длина большей стороны исходного листа бумаги от длины получившегося модуля, а то есть длины ребра тетраэдра? - Тогда вам нужно построить тетраэдр с ребром 10 см. - Позже вы узнаете, верен ли был ваш ответ.	(Ножницы принесли с собой) - Нет Моделируют тетраэдр, глядя на схему	Презентация: *Схема складывания модели тетраэдра* 1 шаг.  2 шаг.  3 шаг. 

Этапы	**Деятельность учителя**	**Деятельность учащихся**	**Средства**
Действие (40 мин)	- Я буду помогать вам в построении, если что-то будет непонятно. - Чему равна другая сторона вашего прямоугольника? - Посмотрите внимательно на схему складывания и скажите, чему будет равна ширина ребра модели тетраэдра? -Запомните длину меньшей стороны. Позже проверите, чему равна ширина ребра модели тетраэдра. И узнаете, правильно ли вы ответили. (Помогаю собирать модели). Должна получиться модель следующая:  -Собирая модель по схеме, ваше воображение и абстрактное мышление тоже развивается. -У всех получилось собрать модель?	Отвечают. У всех она, возможно, разная. -Она в 4 раза меньше исходной ширины. Обращаются за помощью, советуются, показывают готовую модель. -Ответы	4шаг.  5 шаг.  6 шаг.  7 шаг.  8 шаг. 

Продолжение таблицы 3

Этапы	Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Средства
Рефлексия	-Что нового вы узнали на сегодняшнем занятии? -Какие возникли трудности? -После построения ваших моделей, можете ли вы ответить на ранее поставленные вопросы? -Верно ли вы ответили в начале занятия? Помогли ли вам модели? В чем, если помогли? Спасибо за занятие!	-Отвечают на вопросы	

Таким образом, в данной главе были представлены примерные практические задания, связанные с моделями правильных многогранников, которые выполнены в технике оригами. Представленные задания можно использовать на уроках геометрии в разделе «планиметрия», задания разработаны с помощью учебника по геометрии [3]. В данной главе также рассмотрены два примера внеклассных занятий по геометрии, где применены модели правильных многогранников и процесс их построения, тем самым показано, что модели Платоновых тел возможно применять в обучении геометрии, как наглядное средство обучения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе исследования достигли следующих результатов:

– из теории правильных многогранников, приведено определение многогранников, рассмотрены их виды, сделан акцент на то, что основные многогранники в работе – правильные многогранники;

– так как, исследование проводится на моделях правильных многогранников, то дано определение моделирования, приведены виды моделирования и сделан вывод о том, что основным видом в работе будет предметный;

– поскольку, предметные модели выполнены методом оригами, то приведено описание техники оригами и ее направления, из всех направлений выбрано модульное;

– для каждого из правильных многогранников рассмотрен пример построения реберной и сплошной моделей, для каждой модели построены соответствующие схемы в программе «Живая геометрия» и сделан их геометрический анализ, на основе которых можно формулировать различные геометрические задачи на доказательство и вычисление;

– представлен алгоритм моделирования вписанных друг в друга правильных многогранников, алгоритм выполняется для всех правильных многогранников. Алгоритм представлен на примере октаэдра вписанного в куб;

– представлено 5 разделов планиметрии [3], при изучении которых возможно применение моделей, сделанных методом оригами, и разработаны примерные задания;

– представлены примеры внеклассных занятий, где применяются модели правильных многогранников.

Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод, что все поставленные задачи, которые были поставлены перед началом работы, выполнены, на этом основании предполагаем, что цель исследования достигнута. Модели правильных многогранников, выполненные методом оригами, можно использовать в преподавании геометрии.

Основные положения проведенного исследования излагались в виде докладов и выступлений на конференциях:

– Модель тетраэдра как источник геометрических задач // Весенняя научная сессия математического факультета (г. Пермь, ПГГПУ, 07.04.2015 – 24.04.2015);

– Фундаментальные и прикладные проблемы математики, механики, информатики // Всероссийская научно-практическая конференция молодых ученых с международным участием (г. Пермь, ПГГПУ, 26.05.2015 – 28.05. 2015);

– Моделирование вписанных многогранников // Осенняя научная сессия математического факультета, ноябрь (г. Пермь, ПГГПУ, ноябрь 2015 года);

– Моделирование куба, вписанного в додекаэдр // Весенняя научная сессия математического факультета (г. Пермь, ПГГПУ, апрель 2016 года);

– О разработанных материалах для учебного пособия к факультативному курсу «Оригами» // Весенняя научная сессия математического факультета (г. Пермь, ПГГПУ, апрель 2017 года);

– Геометрические принципы в оригами // XV Международный научный форум «Человек, общество, культура, современные и исторические измерения» (г. Пермь, исторический факультет ПГГПУ, 10.04.2017 – 14.04.2017.

Тезисы по теме исследования были напечатаны в следующих сборниках:

– Модель тетраэдра как источник геометрических задач // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. межрегион. науч. – практ. конф. студентов матем. фак-тов / ред. кол.: Ю.В. Корзнякова, И.В. Косолапова; под общ. ред. Ю.В. Корзняковой; Перм. Гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2015. – Вып. 8. –С.;

– Модель тетраэдра как источник геометрических задач // Фундаментальные и прикладные проблемы механики, математики, информатики [Электронный ресурс]: сб. докл. всеросс. науч.-практ. конф. с междунар. участием (г. Пермь, 26–28 мая 2015 г.) / гл. ред. А. П. Шкарапута; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – 9 Мб. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). - С. 280 – 285.

Результаты исследования были также апробированы при проведении мастер-классов и участии в выставках:

- Мастер-класс «Оригами» в рамках Весенней научной сессии математического факультета для студентов 141 группы,14.04.2017 года;

- Мастер-класс «Применение моделей правильных многогранников, сделанных методом оригами, на уроках геометрии » на курсах повышения квалификации учителей по дополнительной профессиональной программе, 30.09.2015 года, г. Пермь, ПГГПУ («Технологии обучения математике в основной школе: внедрение ФГОС»;

- Выставка работ, выполненных методом оригами, «Легенда о горе Нара», Центральный выставочный зал, 16.05.2017-22.05.2017, г. Пермь.

Разработан дидактический материал для учебного пособия «Оригами и геометрия» [25], предназначенного для дисциплины «Оригами».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акрушенко А.В.* Психология развития и возрастная психология: учеб. пособие [Электронный ресурс] / А.В. Акрушенко, О.А. Ларина, Т.В. Катарьян. -- Электрон. дан. – Саратов : Научная книга, 2012. - 127 с. - Режим доступа : http://www.iprbookshop.ru/6328.html. - ЭБС «IPRbooks» (дата обращения: 19.04.2018).

2. *Ананьева М.С.* Основы исследований в физико-математическом образовании: учебное пособие / Ананьева М.С., Власова И.Н.. - Пермь : Изд-во «Типография купца Тарасова», 2009. – 131 с.

3. *Атанасян Л.С.* Геометрия. 7 - 9 классы / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.; под ред. Н.И. Тихонова. - 2-е изд. - М. : Просвещение, 2014. - 383 с.

4. *Белим С. Н.* Задачи по геометрии, решаемые методами складывания (оригами) / С.Н. Белим. – М. : Аким, 1998. – 124 с.

5. *Березин В*. Квант / В. Березин // Правильные многогранники. – М: 1973. – № 5. - С. 26 - 28.

6. *Весновская О.В*. Оригами: орнаменты, кусудамы, многогранники / О.В. Весновская. – М. : Руссика, 2003. – 65 с.

7. *Вопросы* математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. межрегион. науч. – практ. конф. студентов матем. фак-тов / ред. кол.: Ю.В. Корзнякова, И.В. Косолапова; под общ. ред. Ю.В. Корзняковой; Перм. Гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2015. – Вып. 8. – 95 с.

8. *Змановская Е.А.* Звездчатые многогранники [Электронный ресурс] / Е.А. Змановская, С.У. Пазилова. – Уфа : Омега сайнс, 2015. –

352 с. Режим доступа: http://cyberleninka.ru/article/n/zvezdchatye. - mnogogranniki. (дата обращения: 13 мая 2016 г.).

9. *Кадзуо Х.* Оригамика. Математические опыты со складыванием бумаги / Х. Кадзуо, И. Масами, И.Р. Высоцкий. – М. : Изд-во МЦНМО, 2012. – 23 с.

10. *Карасев П. А.* Элементы наглядной геометрии в школе / П. А. Каган. – М. : Гос. уч.-пед. изд-во Министерства Просвещения РСФСР, 1955. – 206 с.

11. *Книжный* онлайн-магазин MoreBooks [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – URL: https://www.morebooks.de/ (дата обращения: 24.05.2017).

12. *Конспект* урока по наглядной геометрии [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – URL: https://multiurok.ru/files/konspiekt-uroka-po-naghliadnoi-ghieomietrii-tanghram.html (дата обращения: 27.04.2017).

13. *Краткий* словарь философских терминов [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – URL: http://nenuda.ru/%D0%%BE%D0%B2.html (дата обращения: 27.04.2017).

14. *Математика* и междисциплинарные исследования – 2017: материалы Всерос. науч.-практ. конф. молодых ученых с междунар. Участием (г. Пермь, 15-20 мая 2017 г.): в 2 т. / гл. ред. А. П. Шкарапута; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2017. Т. 1. – 236 с.

15. *Модуль* реберного куба оригами [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – URL: http://www.youtube.com/watch?v=hOWovRx7s3Q (Дата обращения: 7 июня 2015 г.).

16. *Наука,* технология, техника: перспективные исследования и разработки: сборник научных трудов по материалам I Международной научно-практической конференции студентов, магистрантов и аспирантов 30 ноября 2016 г. Калининград: НОО «Профессиональная наука», 2016. – 793 с.

17. *Ожегов С. И.* Толковый словарь русского языка: ок. 100000 слов, терминов и фразеологических выражений / С. И. Ожегов; под ред. Проф. Л. И. Скворцова. – 28-е изд., перераб. – М. : Оникс. 2012. – 1376 с.

18. *Оригами* [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – URL: http://origamik.ru (дата обращения: 6 июня 2015 г).

19. *Оригами* ресурс [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – URL: http://www.origami-resource-center.com/support-files/dodeca4.pdf (Дата обращения: 7 мая 2015).

20. *Першина Л.А.* Возрастная психология: учеб. пособие [Электронный ресурс] / Першина Л.А. – Электрон. дан. – М. : Академический Проект, Альма Матер, 2016. – 256 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/60021.html (дата обращения: 20.04.2017).

21. *Самыгин С. И.* Психология развития, возрастная психология для студентов вузов [Электронный ресурс] / С.И. Самыгин [и др.]. – Электрон. дан. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2013. – 222 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/58990.html (дата обращения: 10.04.2017).

22. *Университетская* Библиотека Онлайн [Электронный ресурс] / Костин В.И. Основания геометрии. / В.И. Костин. – Электрон. дан. – М. : Гос. уч.-пед.изд-во, 1948. – 306 с. – Режим доступа : http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=222516 (дата обращения: 09.07.2015).

23. *Ушаков Д. Н.* Толковый словарь современного русского языка / Д. Н. Ушаков. – М. : Аделант, 2013. – 800 с.

24. *Фундаментальные* и прикладные проблемы механики, математики, информатики [Электронный ресурс]: сб. докл. всеросс. науч.-практ. конф. с междунар. участием (г. Пермь, 26–28 мая 2015 г.) / гл. ред. А. П. Шкарапута; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2015. – 9 Мб. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM);

25. *Шеремет Г.Г.* Оригами и геометрия / Г.Г. Шеремет, В.В. Гуляева, А.В. Курбанова; Перм. Гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2017. – 100 с.: ил.

26. *IPRbooks* [Электронный ресурс] / Батюта М.Б. Возрастная психология: учеб. пособие / М.Б. Батюта, Т.Н. Князева - Электрон. дан. - М. : Логос, 2013. - 306 с. - Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/51628.html (дата обращения: 24.02.2017).

27. *IPRbooks* [Электронный ресурс] / Зайцев В.Б. Оригами / В.Б. Зайцев – Электрон. дан. – М.: РИПОЛ классик, 2012. – 16 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/38634.html (дата обращения: 27.01.2018).

28. *IPRbooks* [Электронный ресурс] / Ильина Н.К. Оригами. Необычные модели для развития фантазии / Н.К. Ильина. – Электрон. дан. – М. : РИПОЛ классик, 2012. – 263 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/38636.html (дата обращения: 2.03.2017).

29. *IPRbooks* [Электронный ресурс] / Кулагина И.Ю. Психология развития и возрастная психология. Полный жизненный цикл развития человека: учебное пособие для вузов/ И.Ю. Кулагина, В.Н. Колюцкий. – Электрон. дан. – М. : Академический проект, 2015. - 421 с. - Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/36766.html (дата обращения: 27.0.2017).

30. *J,Lang R.* Origami and Geometric Constructions / R. J,Lang. – Tokyo : Gallery Origami House, 2010. – 125 c.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Анкетирование обучающихся в рамках проведения внеклассного занятия по геометрии для учащихся 9 класса МБОУ «Дмитриевской СОШ» проводилось в два этапа: перед началом проведения занятия и после занятия.

Вопросы первой анкеты:

1) Оцените по десятибалльной шкале ваш интерес к изучению геометрии в школе (1 – совершенно не интересно, 4 – не очень интересно, 6 – скорее интересно, 10 – очень интересно).

2) Оцените по десятибалльной шкале, какова для вас практическая значимость изучения геометрии (1 – совершенно не значима, 4 – не очень значима, 6 – скорее значима, 10 – очень значима)?

3) Знакомы ли вы с искусством оригами? Если да, то считаете ли вы его связанным с математикой?

Вопросы второй анкеты:

1) Оцените по десятибалльной шкале ваш интерес к изучению геометрии в школе (1 – совершенно не интересно, 4 – не очень интересно, 6 – скорее интересно, 10 – очень интересно).

2) Оцените по десятибалльной шкале, какова для вас практическая значимость изучения геометрии (1 – совершенно не значима, 4 – не очень значима, 6 – скорее значима, 10 – очень значима)?

3) Какие факты геометрии вы вспомнили в процессе складывания фигур оригами?

4) С какими новыми фактами вы познакомились в результате построения моделей?

5) Стоит ли использовать модели правильных многогранников, выполненные методом оригами, при изучении геометрии? Почему?

6) Какие положительные стороны применения моделей правильных многогранников, выполненные методом оригами, в изучении геометрии вы выделите?

Занятие состояло в обсуждении Платоновых тел, в обсуждении значимости моделей правильных многогранников, сделанных методом оригами, складывании обучающимися тетраэдра, работа со схемой построения модели.

Анкетирование было проведено при помощи раздаточного материала.

Анализ ответов *первого анкетирования* позволяет сделать следующие выводы:

– большинство обучающихся не проявляет особого интереса к геометрии, так как 33,3% обучающихся высказали нейтральную позицию (между «не очень интересно» и «скорее интересно»), 49,9% обучающихся ответили, что им не интересна геометрия, и только 16,6% обучающихся интересуются геометрией.

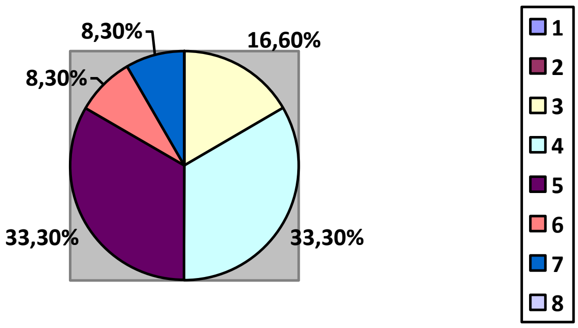


Рис. 27. Диаграмма ответов.

– среди опрошенных преобладает число обучающихся, которые высказывают нейтральную позицию относительно практической значимости геометрии (41,5%), 33,3% обучающихся не находят геометрию практически значимой, оставшаяся часть обучающихся высказывается о геометрии, как о практической науке.

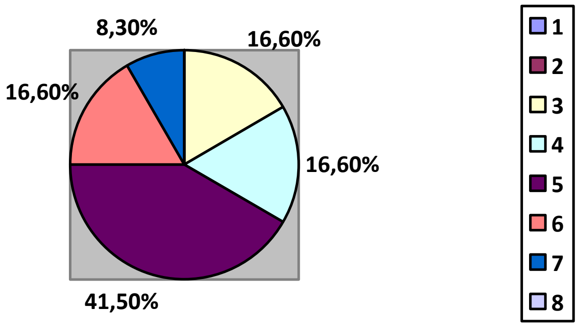


Рис. 28. Диаграмма ответов.

– большинство обучающихся (91,3%) знакомы с оригами и только 33,2% от общего числа опрошенных связывает оригами с геометрией.

Анализ ответов *второго анкетирования* позволяет сделать следующие выводы:

– замечено небольшое изменение ответов обучающихся: число безразличных сократилось вдвое, не интересна геометрия стала для 41,5% опрошенных, а число обучающихся, для которых геометрия интересна (в разной степени), повысилось до 49,9%.

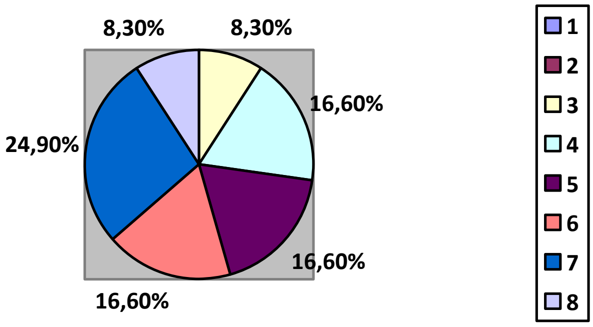


Рис. 29. Диаграмма ответов.

– также замечено изменение ответов обучающихся: среди опрошенных число обучающихся, которые высказывают нейтральную позицию относительно практической значимости геометрии снизилось до 26,9%, также 26,9% обучающихся не находят геометрию практически значимой, однако, число обучающихся высказывающихся о геометрии, как о практической науке повысилось до 53,8%.

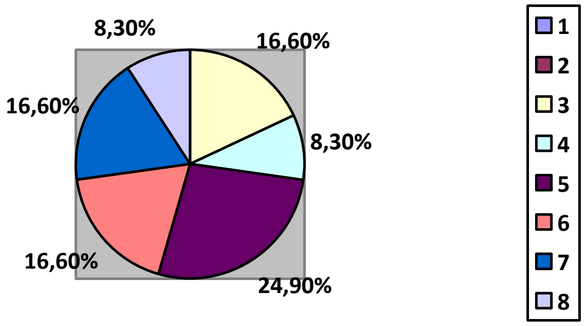


Рис. 30. Диаграмма ответов.

– в процессе складывания фигур оригами, согласно ответам учащихся, следующие факты геометрии были озвучены: середина отрезка, квадрат, прямоугольник, их свойства, биссектриса угла, параллельные и перпендикулярные прямые, высота треугольника, правильный треугольник, правильный пятиугольник и др.;

– новыми для обучающихся были следующие факты: какие многогранники называют Платоновыми телами, октаэдр, додекаэдр, их свойства, и др.;

– обучающиеся единогласно ответили, что модели правильных многогранников стоит использовать при изучении геометрии. Аргументы в пользу этого были следующие: получается интересное занятие, можно многое вспомнить из изученного, получаются наглядные модели, которые в дальнейшем можно использовать и др.

Таким образом, благодаря анализу проведенного анкетирования можно сделать вывод о том, что гипотеза, согласно которой модели правильных многогранников, выполненные в технике оригами, являются эффективным средством обучения, подтверждена.