Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра высшей математики

Выпускная квалификационная работа

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ДВИЖЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ В ПАКЕТЕ «ЖИВАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

Работу выполнила:
студентка группы Z 151
направления подготовки
44.03.01 Педагогическое
образование, профиль
«Математика»
Гайфулина Ирина Рафаиловна
____
(*подпись*)

Руководитель:
канд. пед. наук, доцент
кафедры высшей математики
Шеремет Галина Геннадьевна
____
(*подпись*)

«Допущена к защите в ГЭК»
Зав. кафедрой
____
(*подпись*)

«____»_________ 20____г.

ПЕРМЬ
2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВЕДЕНИЕ

Геометрия является одной из самых сложных учебных дисциплин и вызывает у школьников определенные трудности. Геометрические преобразования представляют одну из содержательных линий школьного курса геометрии. Их изучение позволяет наиболее полно раскрыть практическую значимость, показать область применения геометрических знаний. При изучении темы «Геометрические преобразования» подавляющее большинство традиционно используемых заданий предполагает непосредственное выполнение некоторых построений в последовательности, строго заданной условиями задачи. Параллельный перенос осуществляется линейкой на листе бумаги, осевая симметрия - при помощи угольника и линейки и т.п. На начальных этапах изучения геометрических преобразований такие приемы работы учащихся, безусловно, необходимы и эффективны, т.к. способствуют правильному адекватному усвоению материала. Однако ограничивать учеников на протяжении изучения всего курса планиметрии только эффективными построениями нельзя. Необходимо предоставить школьникам возможность наглядно увидеть действие геометрических преобразований в динамике, научить их экспериментально исследовать свойства этих преобразований и обосновывать полученные результаты. Это возможно достичь, включив в работу программу «Живая геометрия».

Цель работы - исследование возможности применения программы «Живая геометрия» при изучении темы «Движение плоскости»

Объектом предпринятого исследования являются геометрические преобразования плоскости, предметом исследования - изучение движений плоскости с помощью программы «Живая геометрия».

Для реализации цели исследования поставлены следующие задачи:

- проанализировать методическую и учебную литературу;
- познакомиться с программой «Живая геометрия»;

- исследовать свойства геометрических преобразований с помощью программы «Живая геометрия»;
- рассмотреть возможности применения программы «Живая геометрия» при решении задач на построение;

Работа состоит из 57 станиц, которые включают в себя введение, две главы, заключение, список литературы из 28 наименований.

Во введении формулируется актуальность темы, объект и предмет, цель и задачи исследования, дается краткая характеристика каждой структурной части работы.

В первой главе рассматриваются методические вопросы по теме «Движение плоскости» и поводится анализ содержания данной темы в современных учебниках геометрии основной школы.

Вторая глава – практическая. В ней описываются возможности применения программы «Живая геометрия» при исследовании частных случаев движения, и решении задач на построение.

В заключении оцениваются полученные результаты и формулируются выводы исследования.

ГЛАВА 1. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕИЯ ТЕМЫ «ДВИЖЕНИЕ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

1.1 Методические особенности изучения темы «Движение плоскости»

Федеральный компонент государственного стандарта общего образования определяет содержание темы «Движения» четырьмя видами движений: осевая симметрия, центральная симметрия, параллельный перенос, поворот.

Согласно обязательным результатам обучения теме "Движение плоскости" по государственному стандарту основной школы и старшей школы, учащиеся должны:

– знать такие понятия как преобразования, движения, симметричные точки, центр симметрии, ось симметрии, симметричные фигуры, поворот, угол поворота, параллельный перенос;

– уметь использовать свойства движений при решении задач; строить точки, симметричные относительно данной точки и простейшие фигуры, симметричные относительно данной точки; строить точки и простейшие фигуры, симметричные данным, относительно прямой; строить образы простейших фигур при повороте; применять теоретический материал для решения задач.[23]

Обязательная программа не предусматривает широкого изучения различных свойств геометрических преобразований. Вопрос использования преобразований при решении геометрических задач предлагается вынести, как вариативный компонент, на факультативные занятия и внеклассную работу.

В школьном курсе движение плоскости рассматривается как точечное преобразование, при котором каждой точке плоскости ставится в соответствие другая, причем единственная точка, при котором сохраняется расстояние и свойства фигур.

Понятие не может быть передано учащимся в готовом виде, они должны получить его сами, взаимодействуя с относящимися к нему известными понятиями. Определение задает как бы точку зрения — ориентировочную основу — для оценки понятий, с которыми взаимодействует обучаемый. Так, получая определение понятия преобразования, ученик может анализировать различные преобразования с точки зрения наличия или отсутствия в них тех признаков, которые содержатся в определении. [20] При этом, например, он может использовать аналогию между понятием движения в геометрии и равномерного прямолинейного движения предметов (твердых тел) в механике. Такая реальная работа по оценке различных предметов с точки зрения, заданной определением, и создает постепенно в голове учащихся идеальное понятие как обобщенный и абстрактный образ.

Следует отметить также дидактические особенности темы «Геометрические преобразования» [18]:

– наличие внутрипредметных связей. Данная тема может быть использована при изучении других тем школьного курса геометрии. Например, при доказательстве пропорциональности отрезков, равенства фигур, при решении задач на построение, при изучении площадей фигур и т.д.

– наличие межпредметных связей. Основные знания и умения, приобретенные при изучении данной темы, могут быть использованы при изучении других учебных предметов в школе. Например, понятие движения и его видов могут быть использованы в физике (механическое движение, симметрия законов природы и др.), в курсе алгебры (преобразование графиков функций); химии (кристаллы), изобразительном искусстве, черчении и т.д.

– прикладная направленность. Знания и умения, полученные школьниками в результате изучения данной темы, могут быть использованы ими в определенных жизненных ситуациях. Например, нахождение расстояния до недоступной точки, нахождение высоты предмета, выполнение орнаментов и т.п.

– данная тема позволяет развить логическое мышление, воображение, интуицию и т.д.

– при изучении данной темы возможно использование таких методов обучения как эксперимент, наблюдение, опыт и, в то же время, есть возможность применить анализ, синтез, аналогию, абстрагирование и т.п.

– обучение по теме «Движение» может осуществляться двумя способами: конкретно-индуктивным (с опорой на наглядность) и абстрактно-дедуктивным.

– тема допускает различные уровни обучения.

1.2 Анализ изложения темы «Движение» в современных школьных учебниках по геометрии.

В современных учебниках по геометрии основной школы у разных авторов существенно отличается содержание материала по теме «Движение плоскости». Кроме того, у каждого автора есть свои особенности изложения данного материала. Для наглядности сравнения результаты анализа наиболее популярных учебников представлены в следующей таблице.

Учебник	Содержание материала	Особенности
И.Ф. Шарыгин «Геометрия, 7-9»[12]	9 класс Преобразование плоскости Виды движений плоскости. Гомотетия.	-понятие движение вводится как преобразование плоскости, не меняющее расстояние между парами точек; - симметрия относительно точки и относительно прямой служат для доказательства теорем; - рассматривается скользящая симметрия

Учебник	Содержание материала	Особенности
Л.С. Атанасян «Геометрия, 7-9»[6]	8 класс Прямоугольник, ромб, квадрат. (Осевая и центральная симметрии)	-осевая и центральная симметрии рассматриваются не как преобразования плоскости, а как свойства геометрических фигур.
	9 класс Понятие движения. Параллельный перенос и поворот. Решение задач.	-движение плоскости вводится как отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояние между точками; - примерах показывается применение движений при решении геометрических задач разной степени сложности - рассматривается понятие «наложение» и исследуется его связь с движением.
А.Д. Александров «Геометрия,9» [11]	9 класс Движения (параллельный перенос, осевая симметрия, поворот, центральная симметрия) Симметрия фигур. Подобие.	-определяются движения, заданные на всей плоскости; -рассматривается композиция движений; - при решении задач с материалом главы используются практически все теоремы и факты, изученные ранее; -задачи на геометрические преобразования представлены в следующих видах: разбираемся в решении, дополняем теорию, рисуем, планируем, находим величину, доказываем, исследуем, строим, занимательная геометрия, участвуем в олимпиаде.

Учебник	Содержание материала	Особенности
А.В. Погорелов «Геометрия, 7-9»[10]	8 класс Преобразование фигур. Свойства движения. Симметрия относительно точки. Симметрия относительно прямой. Поворот. Параллельный перенос и его свойства. Геометрические преобразования на практике. Равенство фигур.	-понятие «преобразование» вводится на наглядно-интуитивном уровне; -движение понимается как преобразование одной фигуры в другую, при котором сохраняется расстояние между точками; -рассматриваются преобразования не всей плоскости, а только фигур; - все вводимые понятия и доказательства теорем обладают высокой степенью наглядности.

В результате анализа современных учебных пособий по геометрии в курсе основной школы изложение отдельных видов геометрических преобразований занимает значительное место, но при этом изложение теории не всегда раскрывает сущность геометрических преобразований.

Метод геометрических преобразований не рассматривается как один из наиболее эффективных методов решения задач. Для каждого преобразования дается частный прием его совершения. Причем главным в действиях учащихся является исполнительная часть: ученики механически производят построения, не имея полной ориентировочной основы.

Кроме того, следует отметить что недостаточно освещены вопросы прикладной направленности геометрических преобразований и не устанавливаются межпредметные связи геометрии с другими дисциплинами курса посредством геометрических преобразований.

1.3 Методические рекомендации к решению задач на построение

Задача на построение состоит в том, что требуется построить наперёд указанными инструментами некоторую фигуру, если дана некоторая другая фигура и указаны некоторые соотношения между элементами искомой фигуры и элементами данной фигуры. Каждая фигура, удовлетворяющая условиям задачи, называется решением этой задачи. При решении геометрической задачи на построение необходимо установить конечное число случаев, исчерпывающих все возможности в выборе данных и для каждого случая выяснить, сколько решений имеет данная задача. При решении задач на построение рекомендуется пользоваться известной схемой решения, состоящей из следующих этапов: анализ, построение, доказательство, исследование.

Анализ является наиболее важным этапом решения задачи на построение, т.к. именно он даёт ключ к решению задачи. Цель анализа состоит в установлении таких зависимостей между элементами искомой фигуры и элементами данных фигур, которые позволили бы построить искомую фигуру. Это достигается с помощью чертежа-наброска, изображающего данные и искомые примерно в том расположении, как это требуется условием задачи. Иногда построение вспомогательного чертежа сопровождают словами: «предположим, что задача уже решена». [4, стр. 30]

На вспомогательном чертеже следует выделить данные элементы и важнейшие искомые элементы. Практически часто удобнее начинать построение вспомогательного чертежа не с данной фигуры, а с примерного изображения искомой фигуры, пристраивая к ней данные так, чтобы они находились в отношениях, указанных в условии задачи.

На данном этапе необходимо учесть следующие частные замечания, помогающие при проведении анализа:

– если на вспомогательном чертеже не удается непосредственно заметить необходимые для решения связи между данными искомыми элементами, то целесообразно ввести в чертёж вспомогательные фигуры: соединить уже имеющиеся точки прямыми, отметить точки пересечения имеющихся линий, продолжить некоторые отрезки и т.д. Иногда бывает полезно проводить параллели или перпендикуляры к уже имеющимся прямым;

– если по условию задачи дана сумма или разность отрезков или углов, то эти величины следует изобразить на вспомогательном чертеже, если их ещё нет на нём [4, стр. 32];

– в процессе проведения анализа необходимо вспомнить теоремы и ранее решённые задачи, в которых встречаются зависимости между элементами, сходными с теми, о которых говорится в условии рассматриваемой задачи;

– чтобы получаемый нами способ решения был пригоден для возможно более широкого выбора данных, желательно изображать искомую фигуру в возможно более общем виде, так как проводя анализ на основании изучения некоторого чертежа-наброска, мы невольно связываем свои рассуждения в известной мере с этим чертежом и тот способ решения, к которому мы приходим на основании анализа, может оказаться пригодным лишь для некоторых частных случаев. [4, стр. 33]

Этап построение состоит в том, чтобы указать последовательность основных построений (или ранее решённых задач), которые достаточно произвести, чтобы искомая фигура была построена. Существует ряд простейших геометрических задач на построение, которые особенно часто входят в качестве составных частей в решение более сложных задач. Задачи такого рода рассматриваются преимущественно в первых главах школьного курса геометрии. К числу элементарных задач относят обычно следующие: деление данного отрезка пополам; деление данного угла пополам; построение на данной прямой отрезка, равного данному; построение угла, равного данному; построение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой; построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой; деление отрезка в данном отношении; построение треугольника по трём данным сторонам; построение треугольника по стороне и двум прилежащим углам; построение треугольника по двум сторонам и углу между ними; построение прямой, проходящей через данную точку и касающейся данной окружности; построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету.

На этапе доказательства необходимо установить, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем поставленным в задаче условиям.

При исследовании необходимо учитывать, что при построении обычно ограничиваются отысканием одного какого-либо решения, причём предполагается, что все шаги построения действительно выполнимы. Для полного решения задачи нужно ещё выяснить, всегда ли можно выполнить построение избранным способом, можно ли и как построить искомую фигуру, если избранный способ нельзя применить, сколько решений имеет задача при каждом возможном выборе данных. [4, стр. 34]

Чтобы достигнуть необходимой планомерности и полноты исследования, рекомендуется проводить исследование «по ходу построения». Сущность этого приёма состоит в том, чтобы перебрать последовательно все шаги, из которых слагается построение, и относительно каждого шага установить, всегда ли указанное на этом шаге построение выполнимо, а если выполнимо, то сколькими способами.

Важно учитывать, что при решении той или иной геометрической задачи на построении выбор подходящего преобразования предопределяет особенностями базовой фигуры и отношениями между данными и искомыми элементами, связанными с этой фигурой. Применение метода преобразований при решении задач на построение требует тщательного анализа условий и грамотного подхода к выбору преобразования. А правильный выбор приводит, как правило, к рациональному решению задачи. При этом форма и свойства базовой фигуры играют в подборе преобразования определяющую роль. Так симметрию следует вводить в тех случаях, когда базовая фигура имеет центр симметрии (параллелограмм, окружность и др.) или ось симметрии (равнобедренный треугольник, равнобедренная трапеция, окружность и др.). Вращению отдаётся предпочтение в случае, когда базовая фигура обладает поворотным признаком (правильный треугольник, квадрат, правильный шестиугольник, окружность и др.). Иногда при использовании в задачах движения полезно рассматривать преобразование не всей фигуры, а некоторой её части.

ГЛАВА 2. ДВИЖЕНИЯ И ИХ ИЗУЧЕНИЕ В ПРОГРАММЕ «ЖИВАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

2.1 Возможности программы «Живая геометрия»

«Живая геометрия» - это набор инструментов, который предоставляет все необходимые средства для построения чертежей и их исследования. Данный пакет позволяет не только изучать основные геометрические объекты и их свойства, но и создавать интерактивные чертежи, а также выполнять различные измерения. Программа имеет простой в использовании интерфейс (рис. 1). Слева расположена панель инструментов. Назначения кнопок интуитивно понятны. Инструмент «точка» размещает на чертеже точки, инструмент «циркуль» строит окружность. При помощи инструментов из набора «линейка», можно размещать на чертеже прямолинейные объекты (отрезки, лучи, прямые). Инструмент «Текст» позволяет размещать надписи на чертеже, с его помощью также можно давать имена геометрическим объектам. С помощью инструмента «стрелка» можно выделить и передвинуть один или несколько элементов чертежа. В верхней части окна расположена строка меню. Узнать о назначении и порядке использования той или иной команды можно, воспользовавшись встроенной справочной системой.

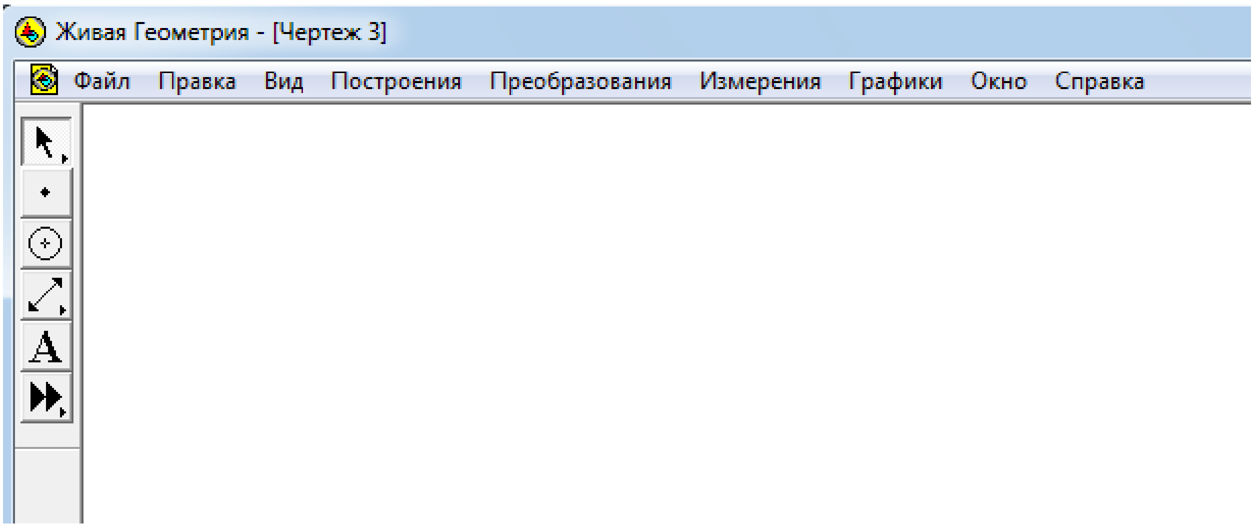

Рис.1

2.2 Применение программы «Живая геометрия» при исследовании частных случаев движения, их определении, способов построения, свойств

Программа «Живая геометрия» существенно облегчает построение тем, что содержит готовые команды «перенести», «повернуть», «отразить», которые позволяют строить необходимые преобразования значительно быстрее. Если целью построения не является отработка навыков выполнения элементарных построений, целесообразно использовать встроенные команды программы. Если же важно отработать элементарные построения, то можно ограничить возможности учеников использованием только инструментов «линейка» и «циркуль». В работе рассмотрены оба способа построения движений.

2.2.1 Параллельный перенос

Параллельный перенос плоскости – такое отображение множества точек плоскости на себя, что для любых соответственных точек M и M_1 верно равенство $MM_1 = a$, где a – постоянный вектор [5, стр. 5].

Для того, чтобы перенести точку M на вектор a (рис. 2) инструментами «циркуль» и «линейка» при помощи элементарных построений, необходимо построить прямую, проходящую через данную точку M параллельно прямой, содержащей данный вектор a (рис. 2.1).

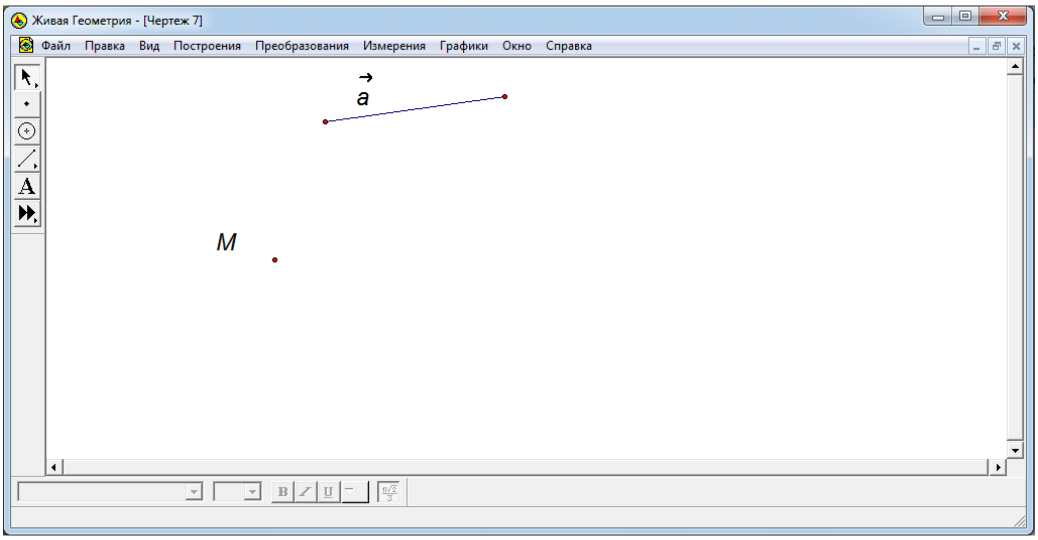

Рис. 2

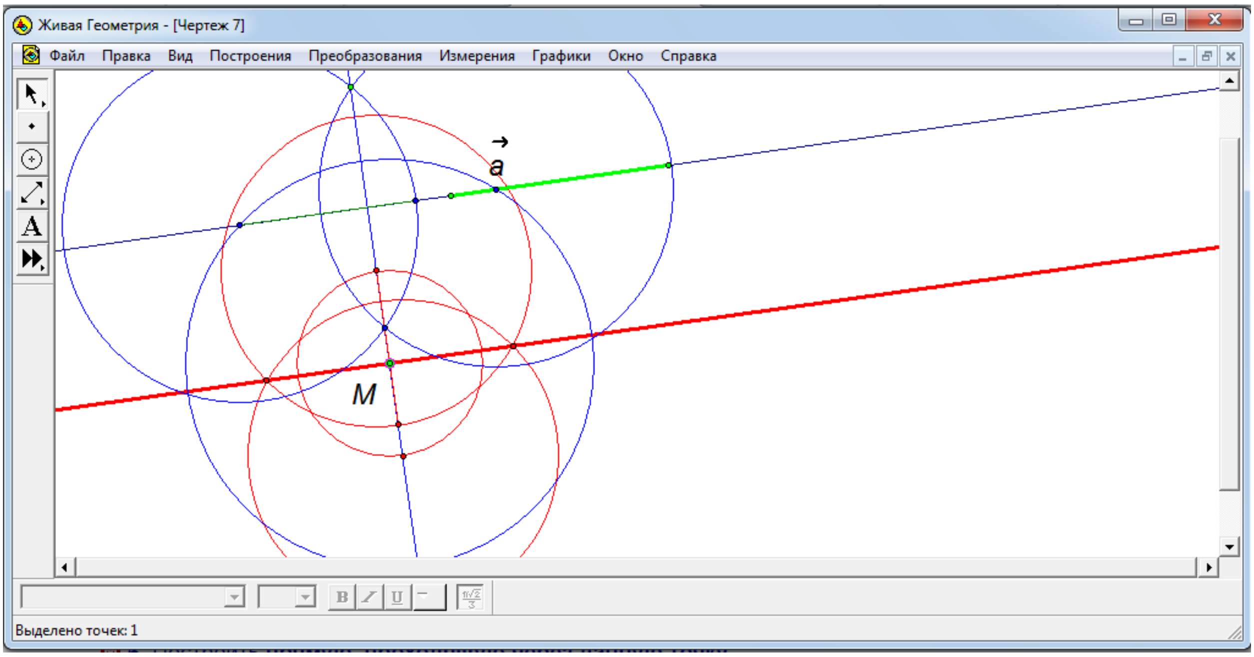

Рис. 2.1

Далее необходимо на полученной прямой отложить отрезок MM_1 равный длине вектора a (рис.2.2).

Полученная точка M_1 – точка, полученная в результате параллельного переноса точки M на вектор a.

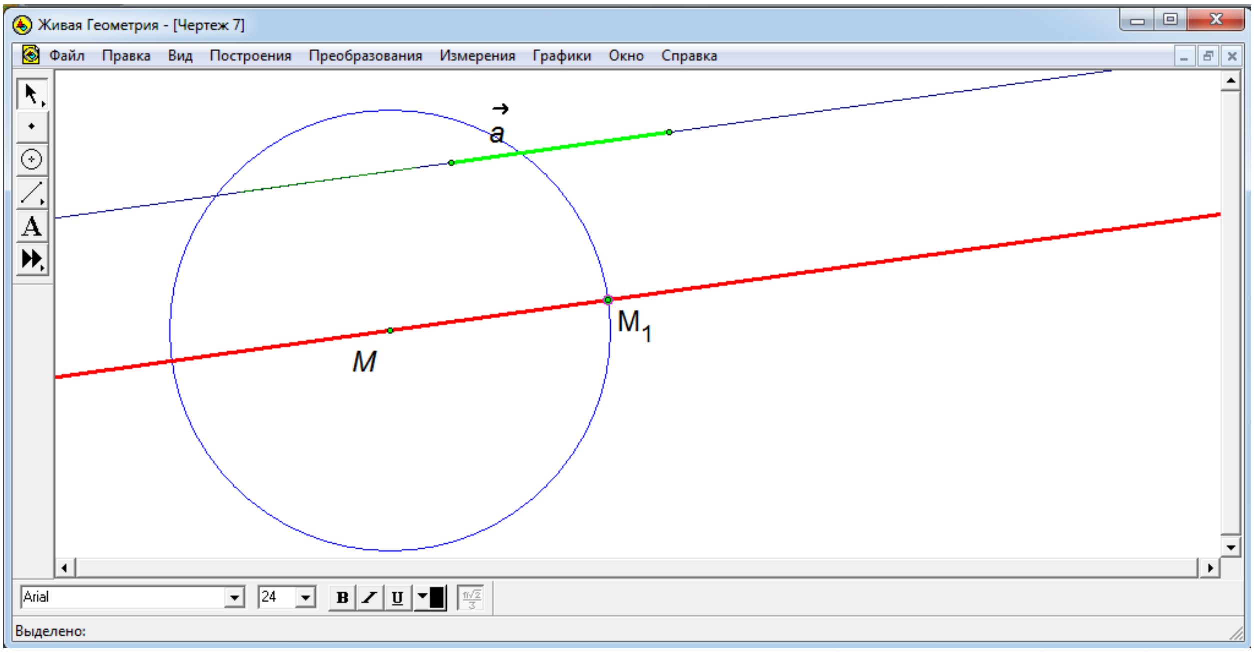

Рис. 2.2

Для того, чтобы перенести треугольник на заданный вектор a при помощи меню «преобразования» программы «Живая геометрия» (рис. 3), необходимо выделить вектор и воспользоваться командой «отметить вектор» в меню «преобразования» (рис. 3.1).

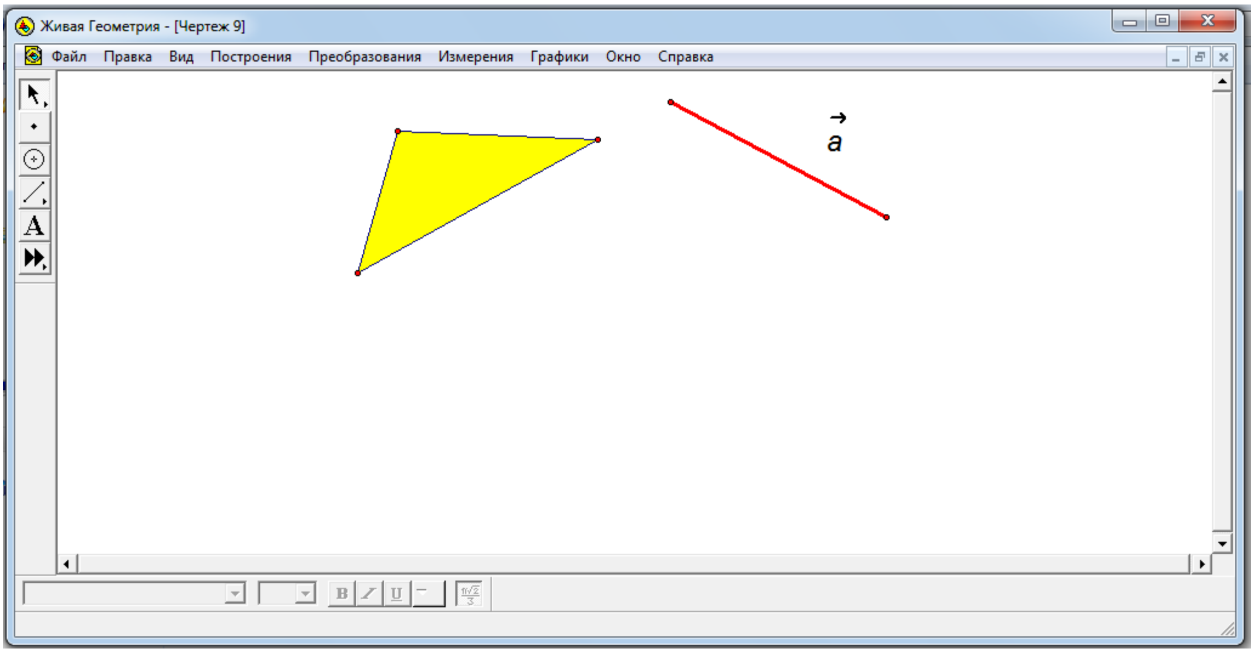

Рис. 3

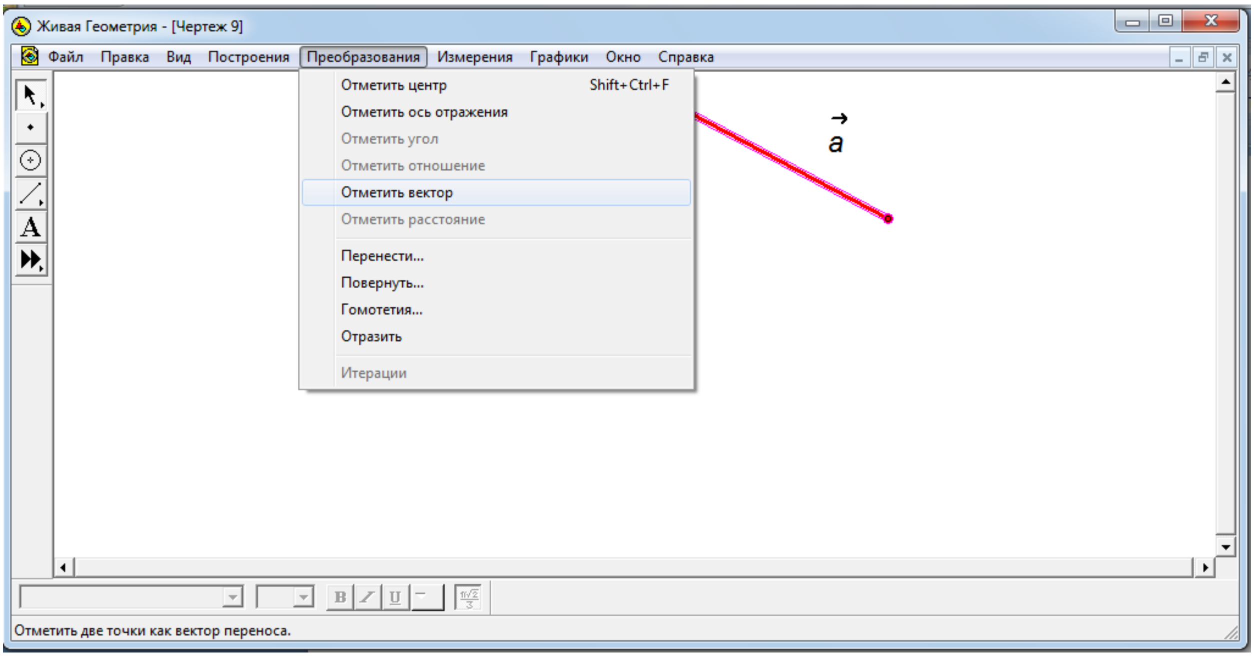

Рис. 3.1

Далее необходимо выделить треугольник при помощи инструмента «стрелка» и воспользоваться командой «перенести» в меню «преобразования». В открывшемся окне в качестве вектора переноса следует выбрать «отмеченный» и нажать кнопку «перенос» (рис. 3.2).

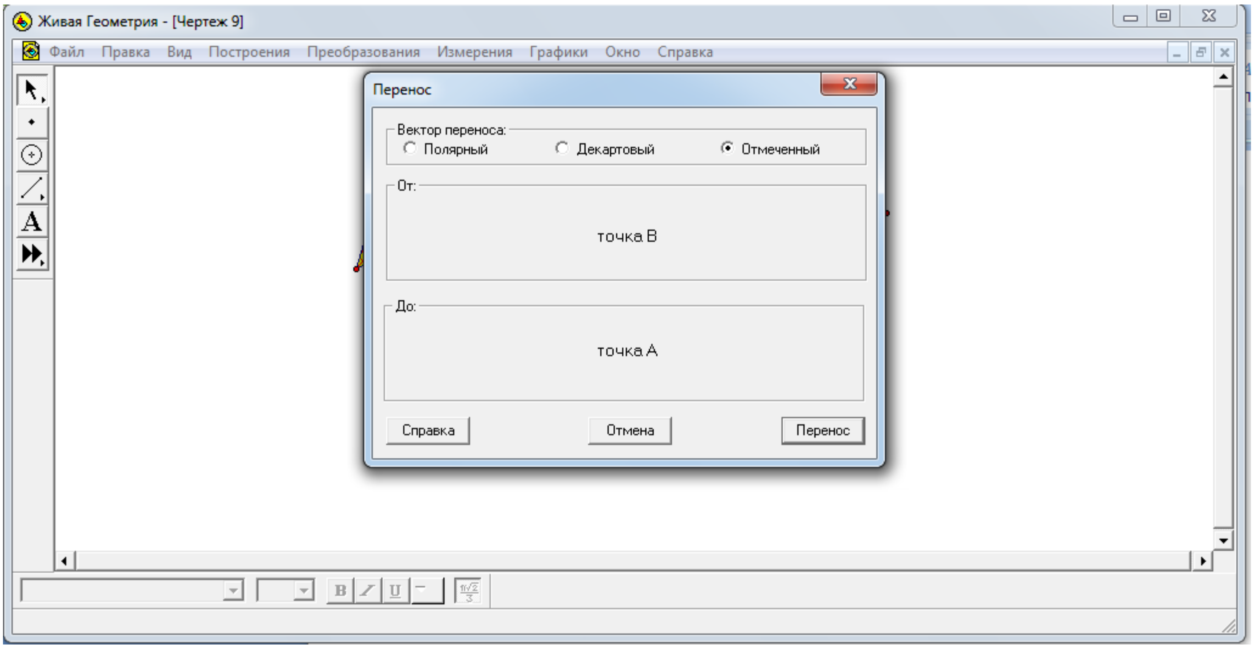

Рис. 3.2

Полученный треугольник является результатом параллельного переноса треугольника на заданный вектор *a* (рис. 3.3).

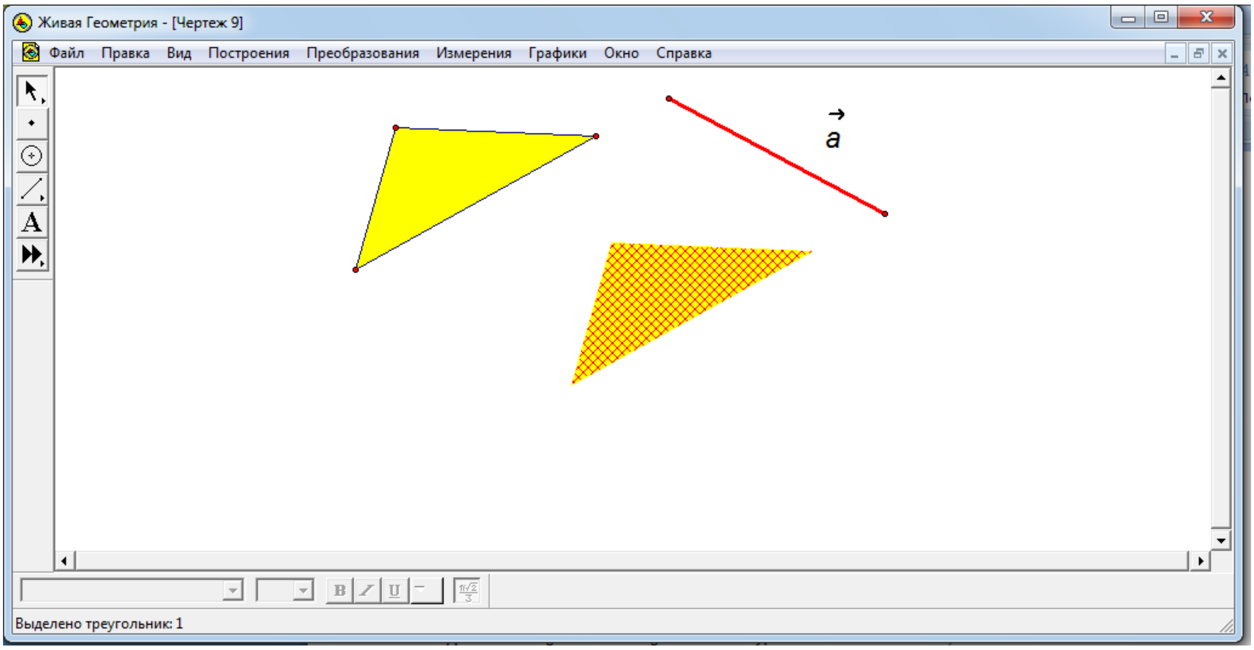

Рис. 3.3

Следует отметить, что при построении параллельного переноса в программе «Живая геометрия» можно воспользоваться тремя вариантами задания вектора переноса: при помощи указания полярных координат, декартовых координат, а также выбрав отмеченный на чертеже вектор.

С помощью программы можно проиллюстрировать основные свойства параллельного переноса. Измерив полученные отрезки, можно убедиться, что при параллельном переносе расстояние между точками сохраняется. Так как сохраняется расстояние и фигуры ориентированы одинаково, то можно сделать вывод, что параллельный перенос является движением первого рода. Кроме того, можно увидеть, что прямые, параллельные вектору переноса, инвариантны (рис. 4).

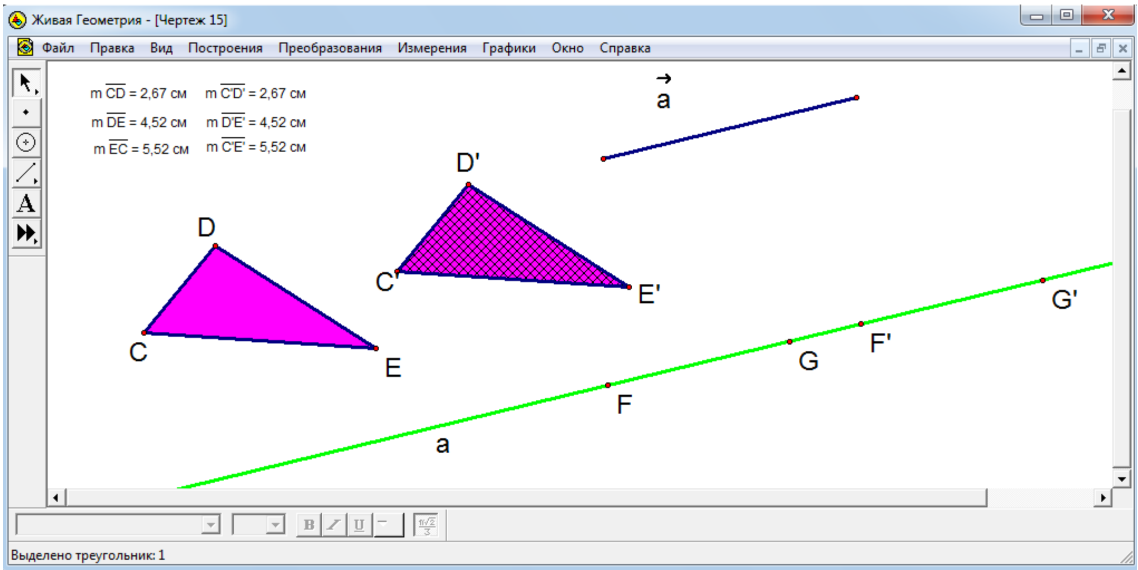

Рис. 4

Также, с помощью построения в «Живой геометрии» можно убедиться (рис. 4.1), что любая прямая не параллельная вектору, переходит в параллельную ей прямую, а луч переходит в сонаправленный ему луч.

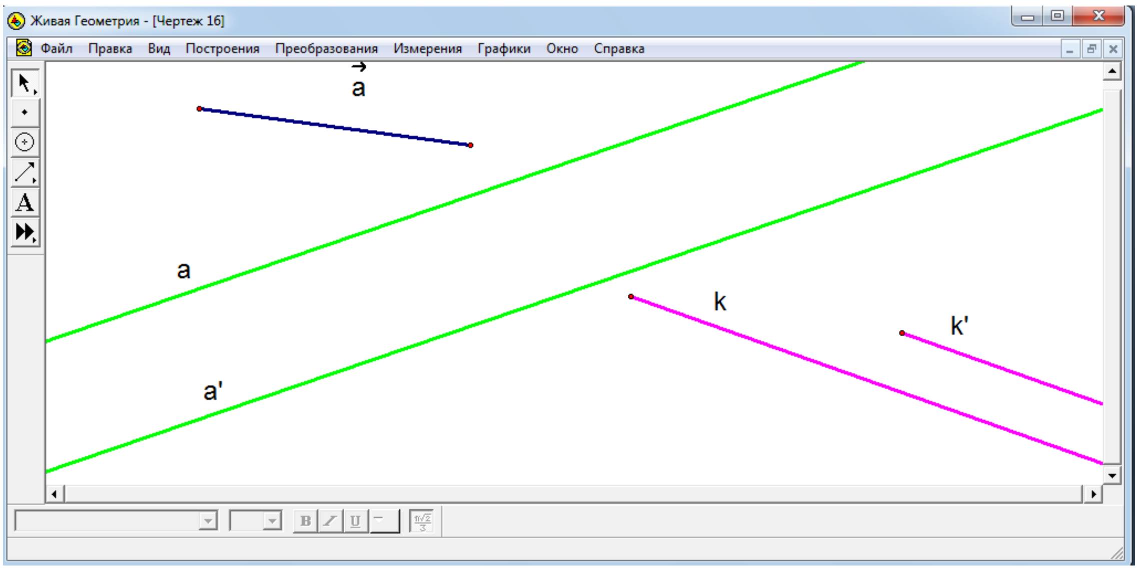

Рис. 4.1

2.2.2 Поворот

Поворот плоскости вокруг точки O на угол α — это отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в точку M_1 так, что $OM=OM_1$, а угол MOM_1 равен углу α. При этом точка O остаётся на месте (отображается сама в себя), а все остальные точки поворачиваются вокруг точки O в одном и том же направлении. [14, стр. 6]

Чтобы построить поворот точки M относительно точки O инструментами «циркуль» и «линейка» на заданный угол (рис. 5),

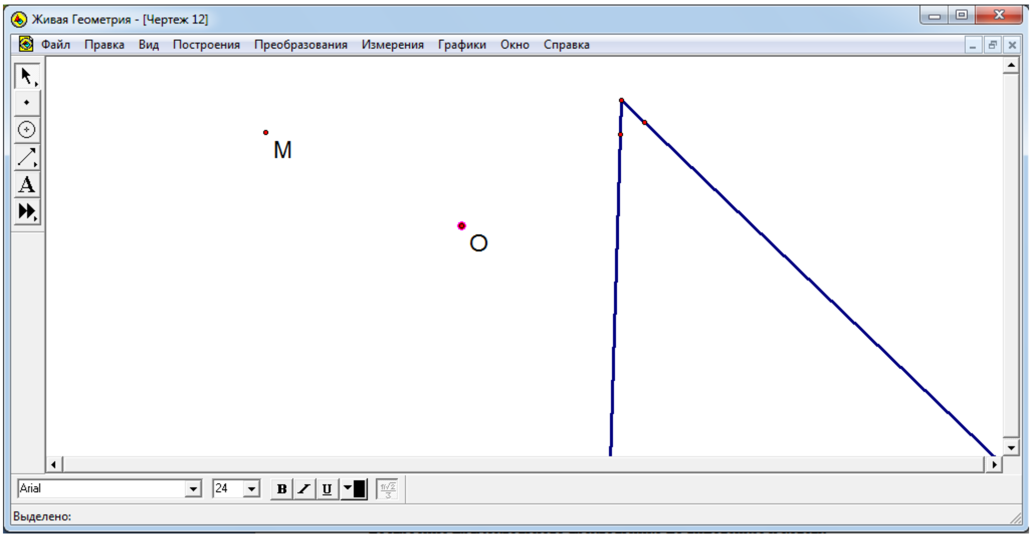

Рис. 5

необходимо провести луч OM и от него отложить угол, равный данному. Далее на второй стороне угла построить отрезок OM_1 равный отрезку OM (рис.5.1). Точка M_1 – это результат поворота точки M относительно точки O на заданный угол.

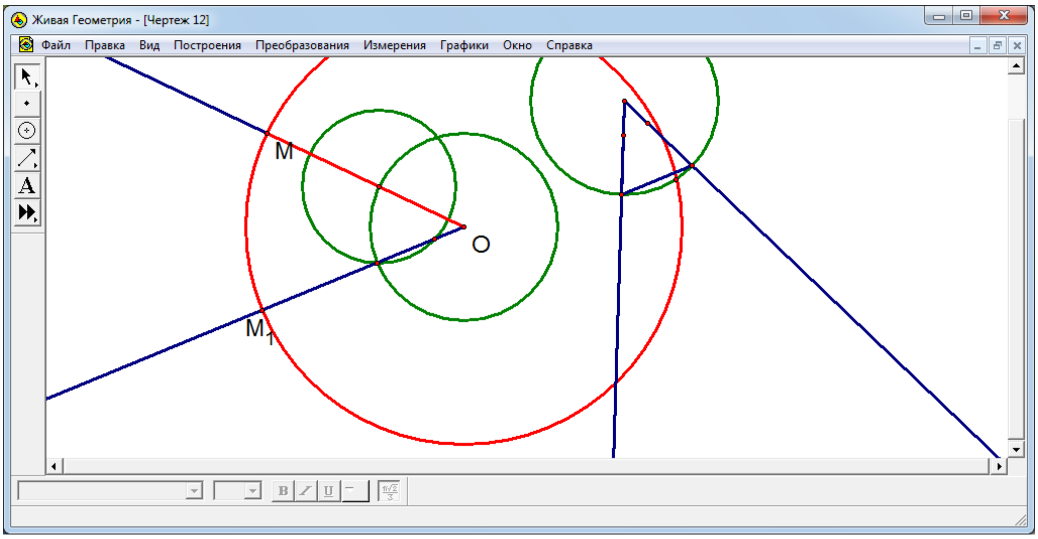

Рис. 5.1

Для того, чтобы построить поворот треугольника на заданный угол относительно данной точки при помощи меню «преобразования» программы «Живая геометрия» (рис. 6), необходимо выделить точку и выбрать с помощью инструмента «стрелка» команду «отметить центр» в меню «преобразования» (рис. 6.1). Аналогично необходимо «отметить угол».

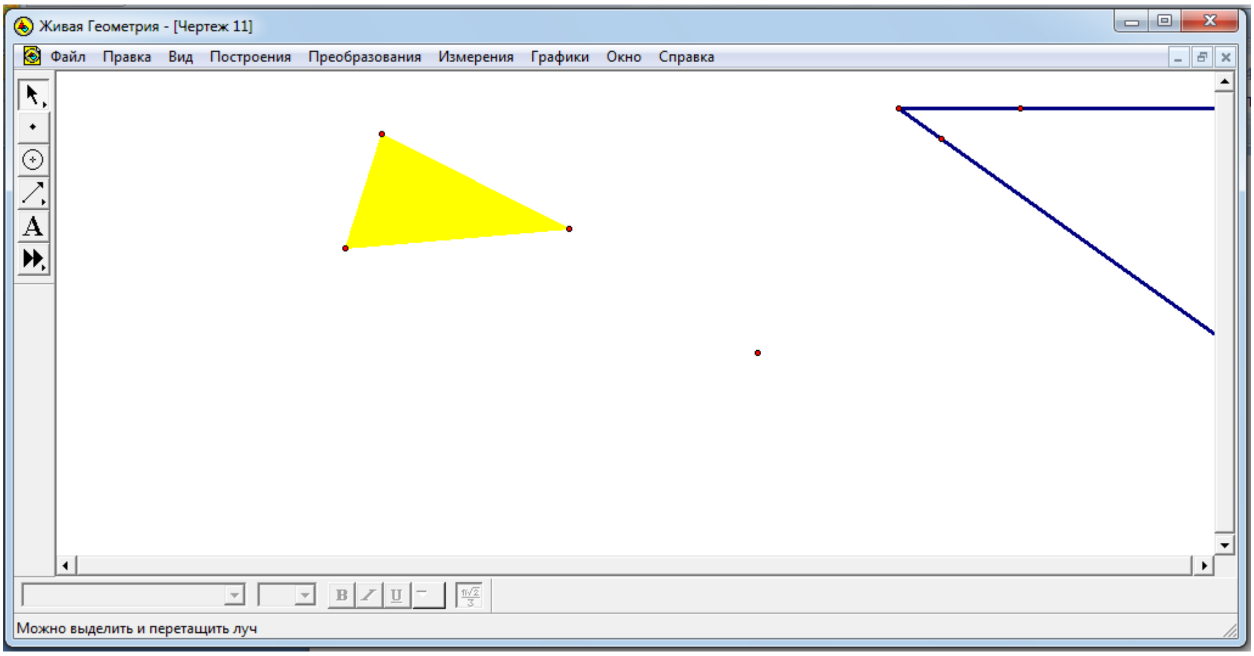

Рис. 6

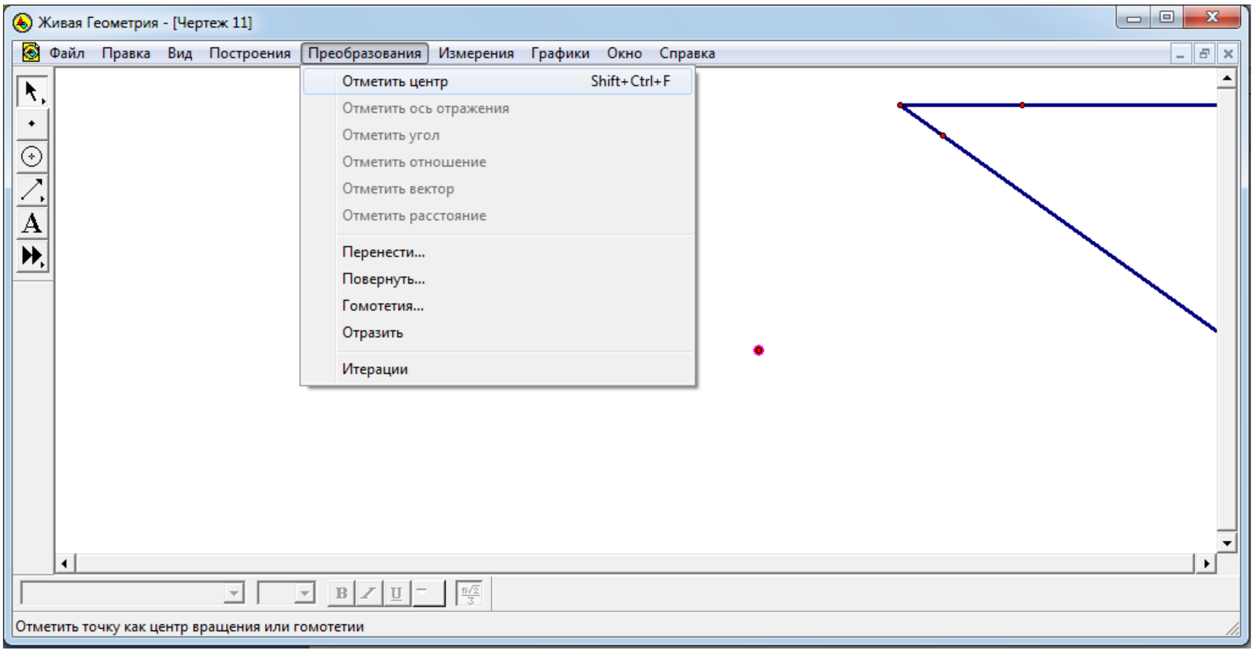

Рис. 6.1

Далее нужно выделить треугольник и при помощи команды «повернуть» в меню «преобразования» выбрать «отмеченный угол» и нажать кнопку «повернуть» (рис. 6.2).

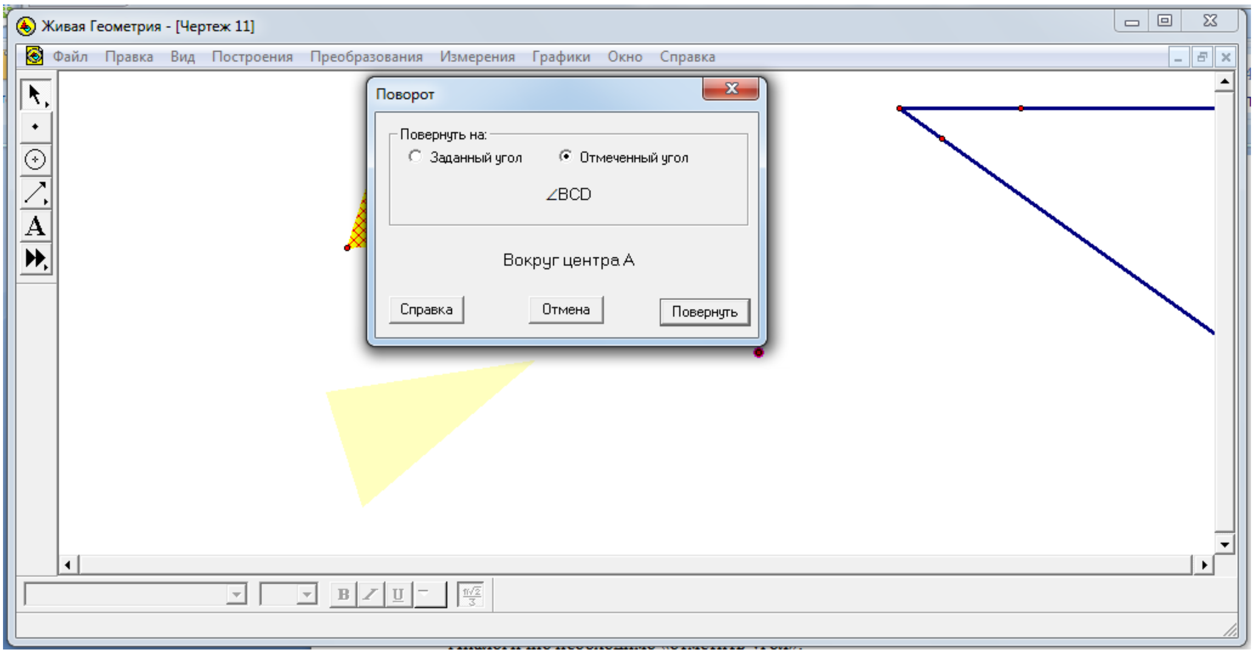

Рис. 6.2

Полученный треугольник является результатом поворота на заданный угол вокруг данной точки (рис. 6.3).

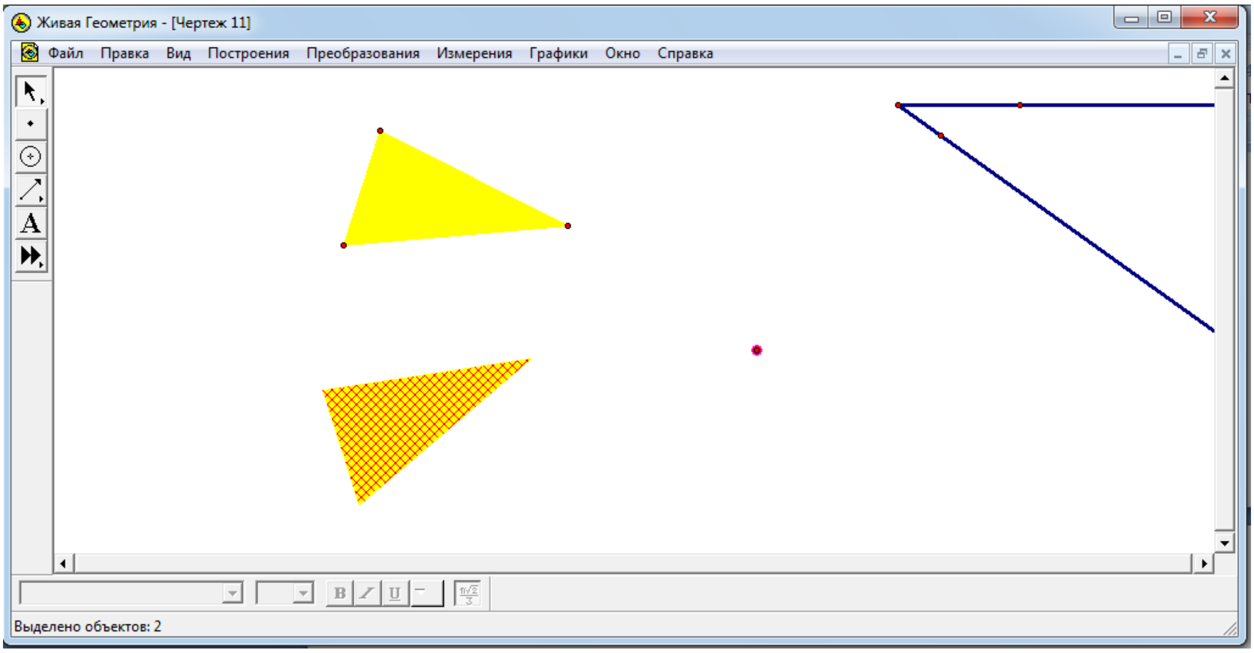

Рис. 6.3

Рассмотрим основные свойства поворота с помощью программы «Живая геометрия» (рис. 7). При повороте сохраняется расстояние и фигуры ориентированы одинаково, следовательно, поворот является движением первого рода. Кроме, того можно измерить угол между прямой и ее образом при повороте. В результате измерения видно, что данный угол равен углу поворота или дополняет его до развернутого.

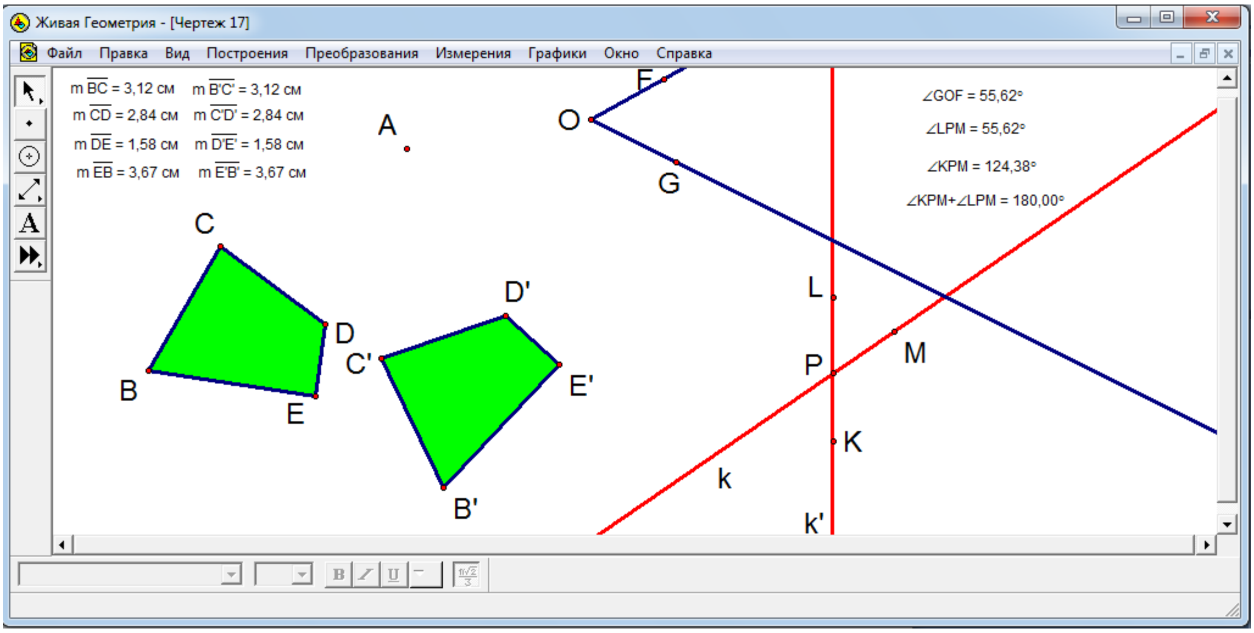

Рис. 7

2.2.3 Центральная симметрия

Центральной симметрией с центром *C* называется такое отображение множества точек плоскости на себя, при котором для любой пары соответственных точек *M* и M_1точка С является серединой отрезка MM_1.

Для того чтобы построить точку, симметричную точке *M* относительно точки *O* (рис. 8) инструментами «циркуль» и «линейка» при помощи элементарных построений, необходимо провести прямую через точки *M* и *O* и отложить на полученной прямой отрезок OM_1 равный отрезку *OM*.

Точка M_1 – точка, симметричная точке *M* относительно точки *O*.

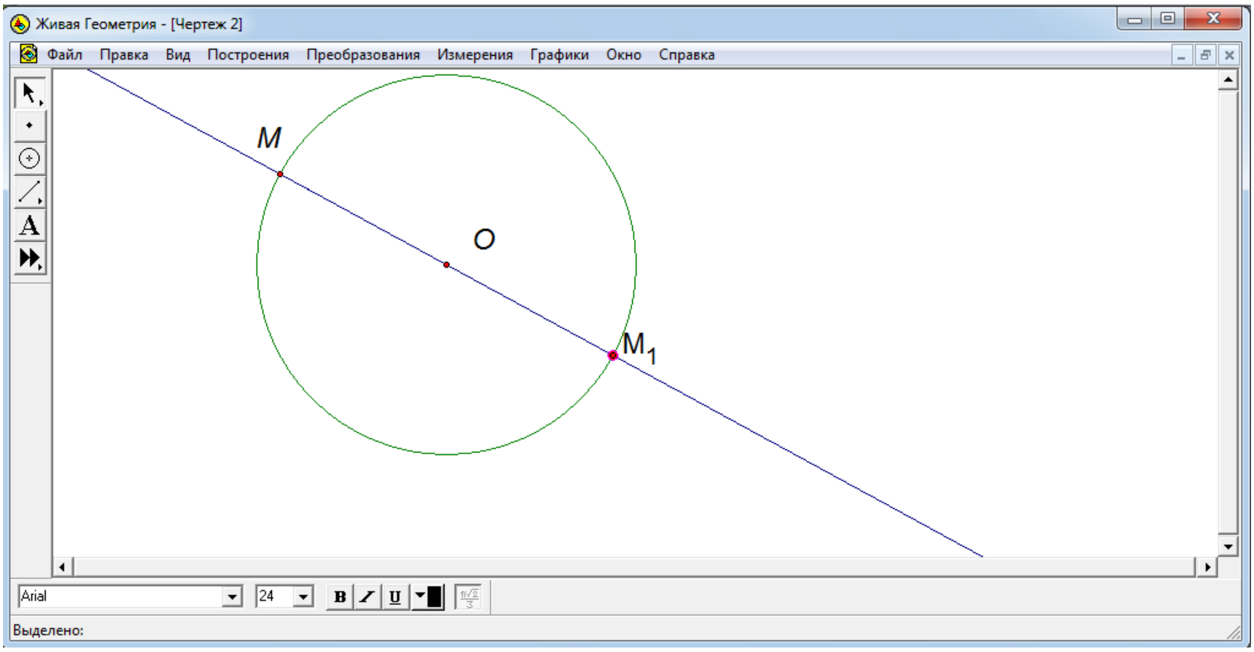

Рис. 8

Так как центральную симметрию плоскости мы можем рассматривать как поворот этой плоскости на 180° относительно центра симметрии, то для того, чтобы построить треугольник симметричный данному относительно точки (рис. 9) необходимо инструментом «стрелка» выделить центр симметрии и выбрать команду «отметить центр» в меню преобразования (рис. 9.1).

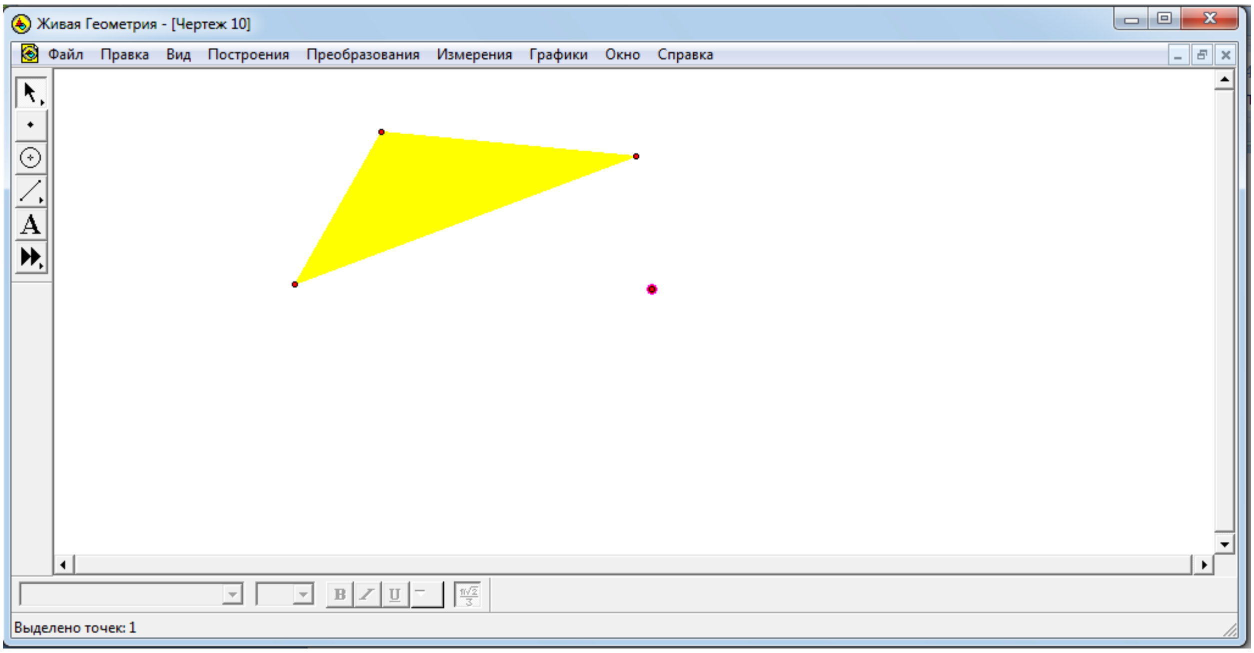

Рис.9

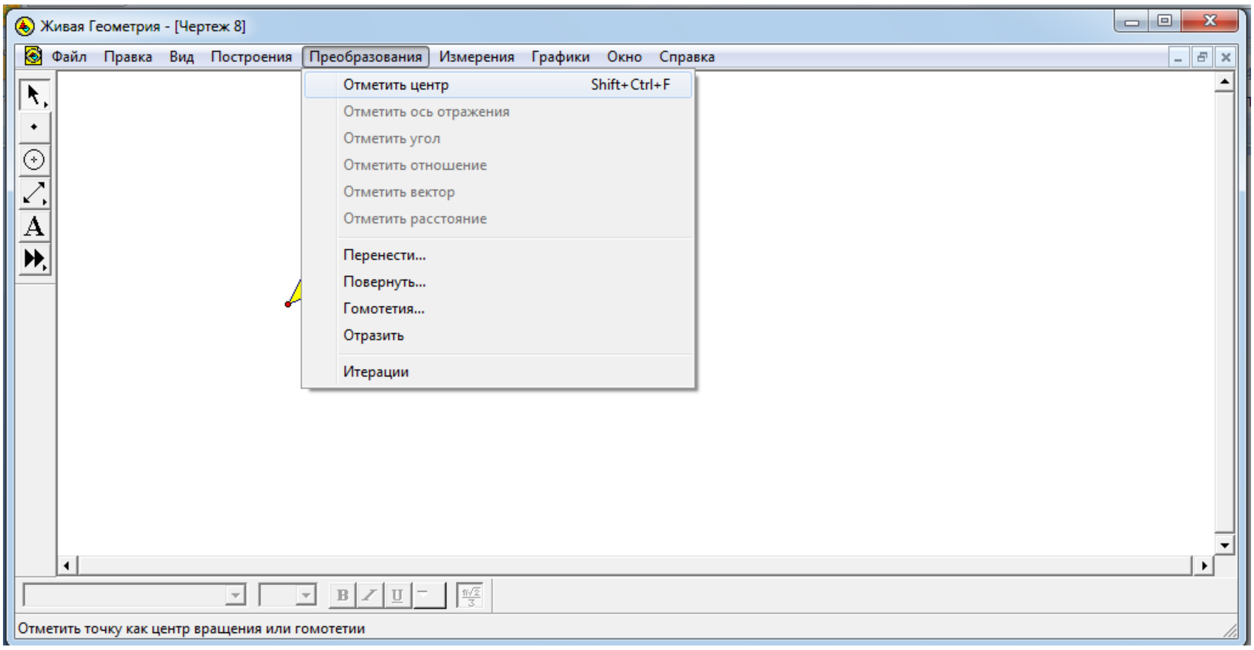

Рис. 9.1

Далее необходимо выделить треугольник и воспользоваться командой «повернуть» в меню «преобразования». В появившемся окне необходимо ввести значение 180 градусов (рис 9.2) и нажать кнопку «повернуть».

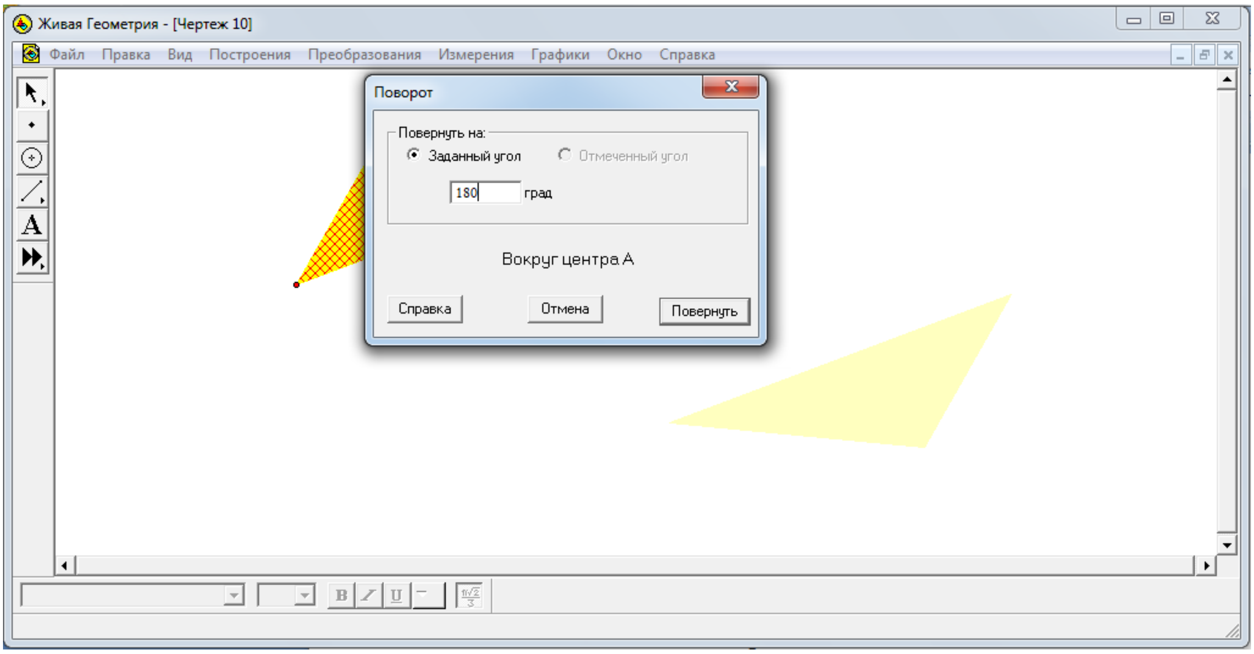

Рис. 9.2

Полученный треугольник симметричен данному относительно заданной точки (рис. 9.3).

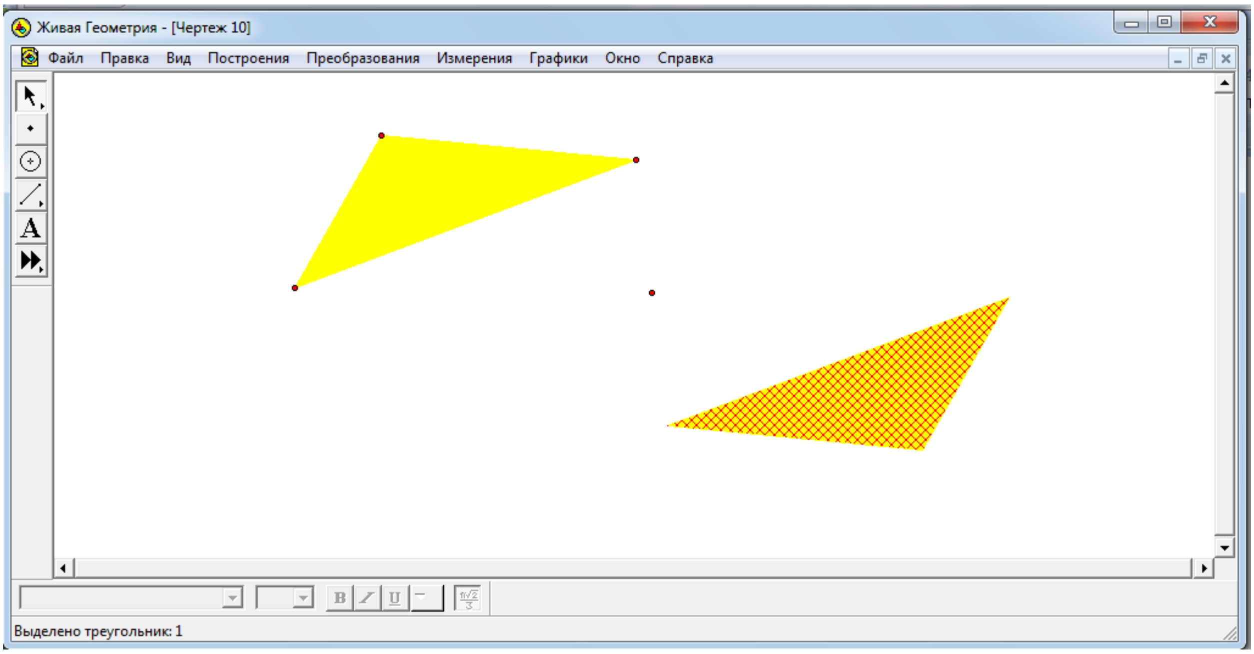

Рис.9.3

С помощью программы «Живая геометрия» можно увидеть, что центральная симметрия сохраняет расстояние и ориентацию фигур, следовательно, является движением первого рода. Кроме того, при данном преобразовании прямая, проходящая через центр симметрии инвариантна; прямая не проходящая через центр переходит в параллельную себе прямую; луч – в противоположно направленный луч (рис. 10).

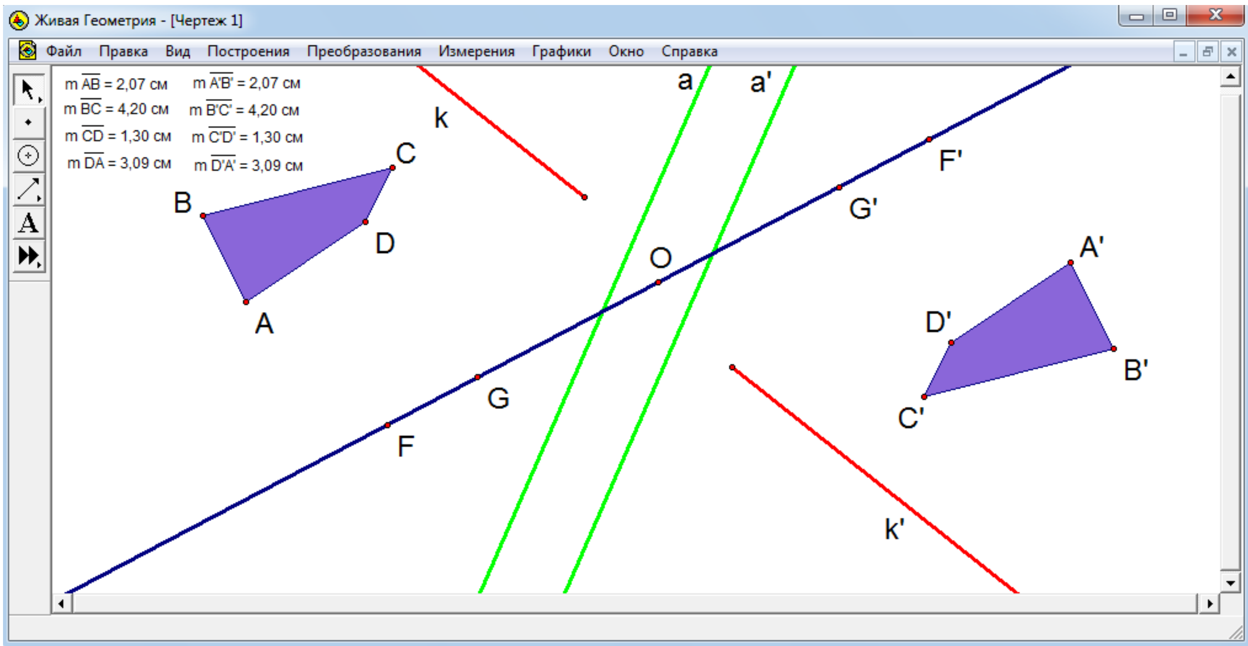

Рис. 10

2.2.4 Осевая симметрия

Осевая симметрия — вид движения, при котором любой точке соответствует точка, находящаяся на том же расстоянии от оси симметрии, и лежащая на одной прямой с исходной точкой и их общей проекцией на ось симметрии.[17, стр. 12]

Для того чтобы построить точку симметричную точке M относительно прямой (рис. 11) инструментами «циркуль» и «линейка» при помощи элементарных построений, необходимо построить прямую, проходящую через данную точку M и перпендикулярную к данной прямой a. Точка P – точка пересечения перпендикуляра с осью.

Далее необходимо на перпендикуляре построить отрезок PM_1 равный отрезку PM по другую сторону от оси симметрии (рис. 11.1).

Точка M_1 - точка, симметричная точке M относительно прямой a.

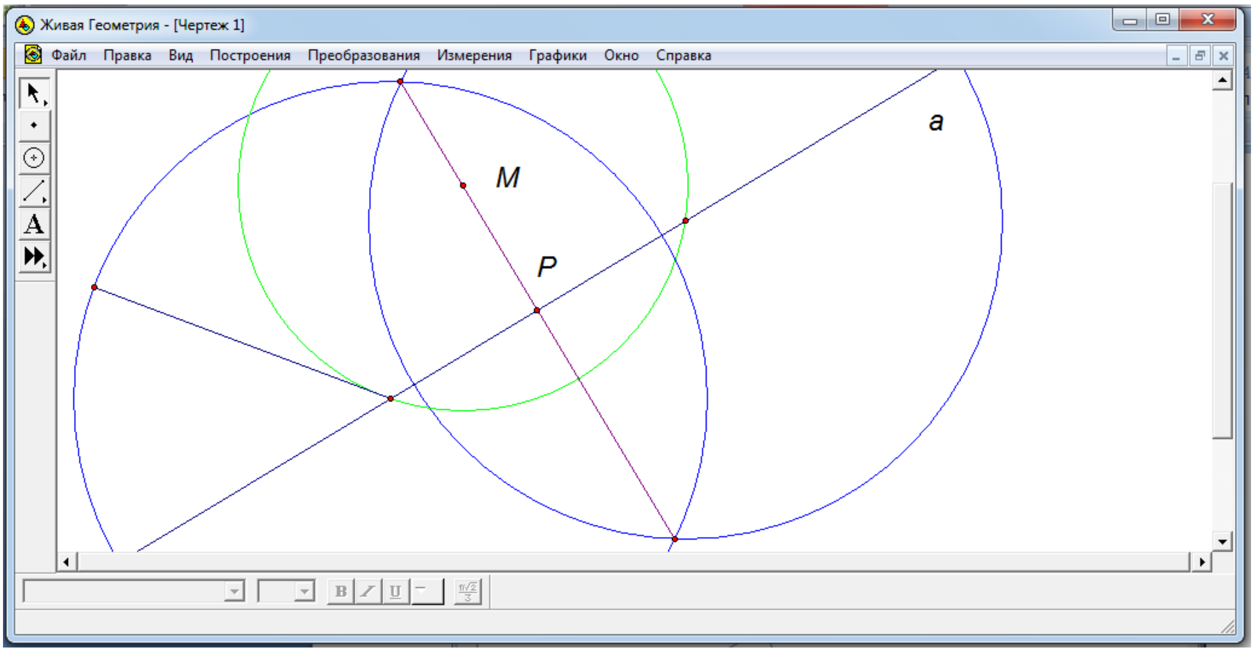

Рис. 11

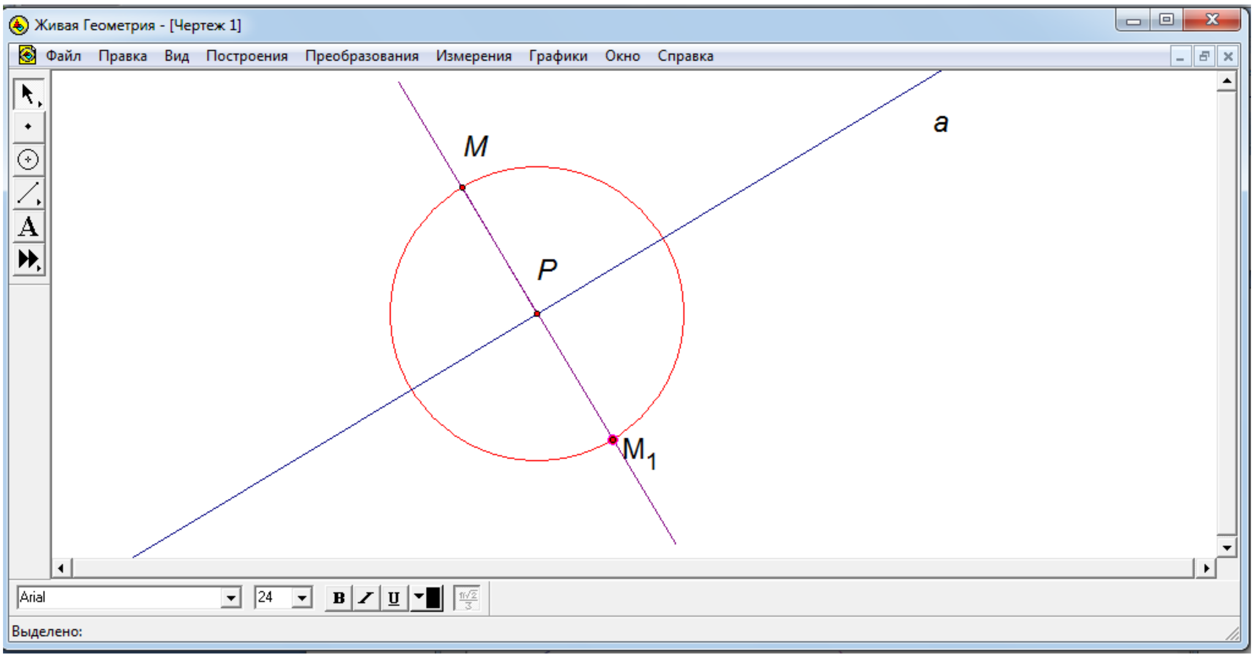

Рис. 11.1

Для того, чтобы построить треугольник, симметричный данному относительно прямой, с помощью меню «преобразования» программы «Живая геометрия» (рис. 12), необходимо инструментом «стрелка» выделить прямую и выбрать команду «отметить ось отражения» в меню преобразования (рис. 12.1)

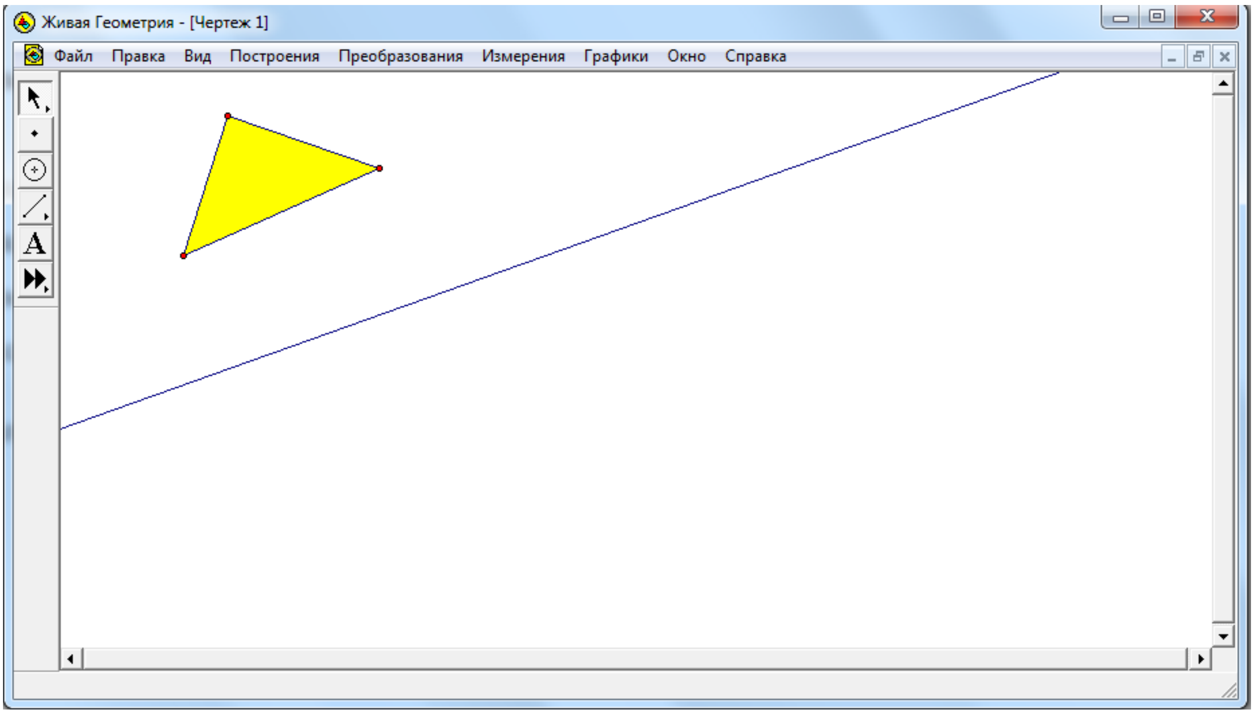

Рис. 12

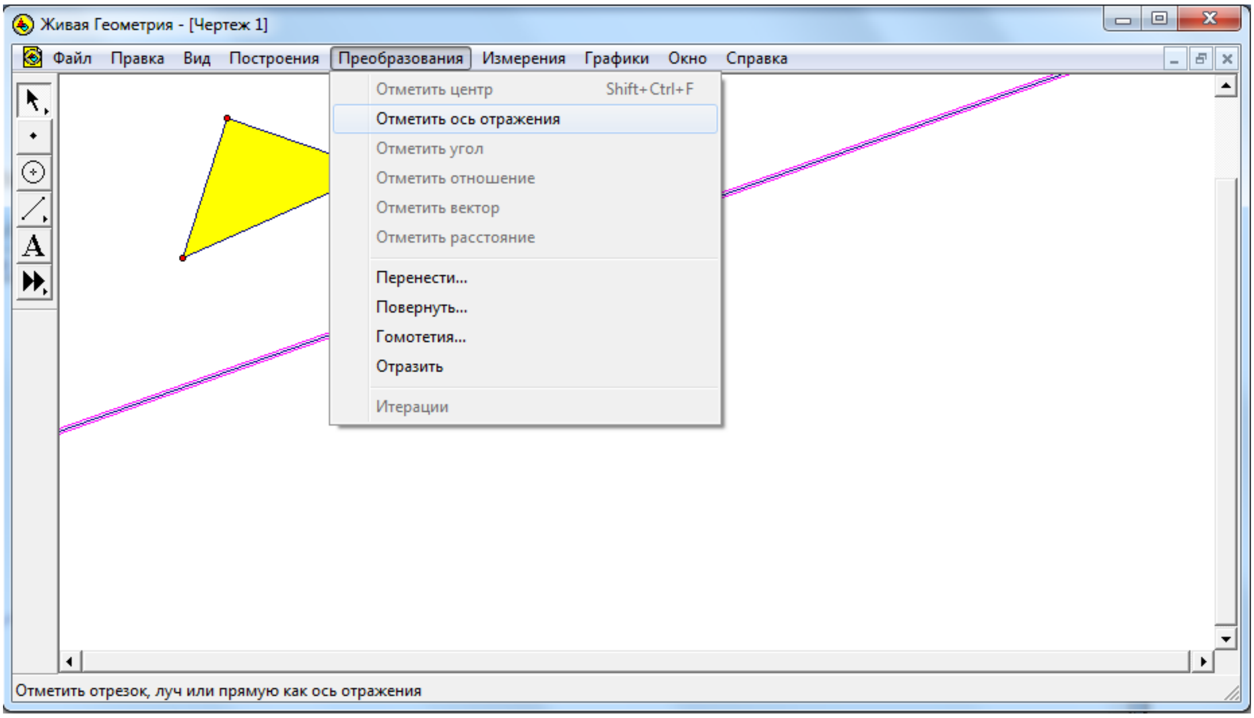

Рис. 12.1

Далее необходимо выделить треугольник и воспользоваться командой «отразить» в меню «преобразования». Полученный треугольник симметричен данному относительно заданной прямой (рис. 12.2).

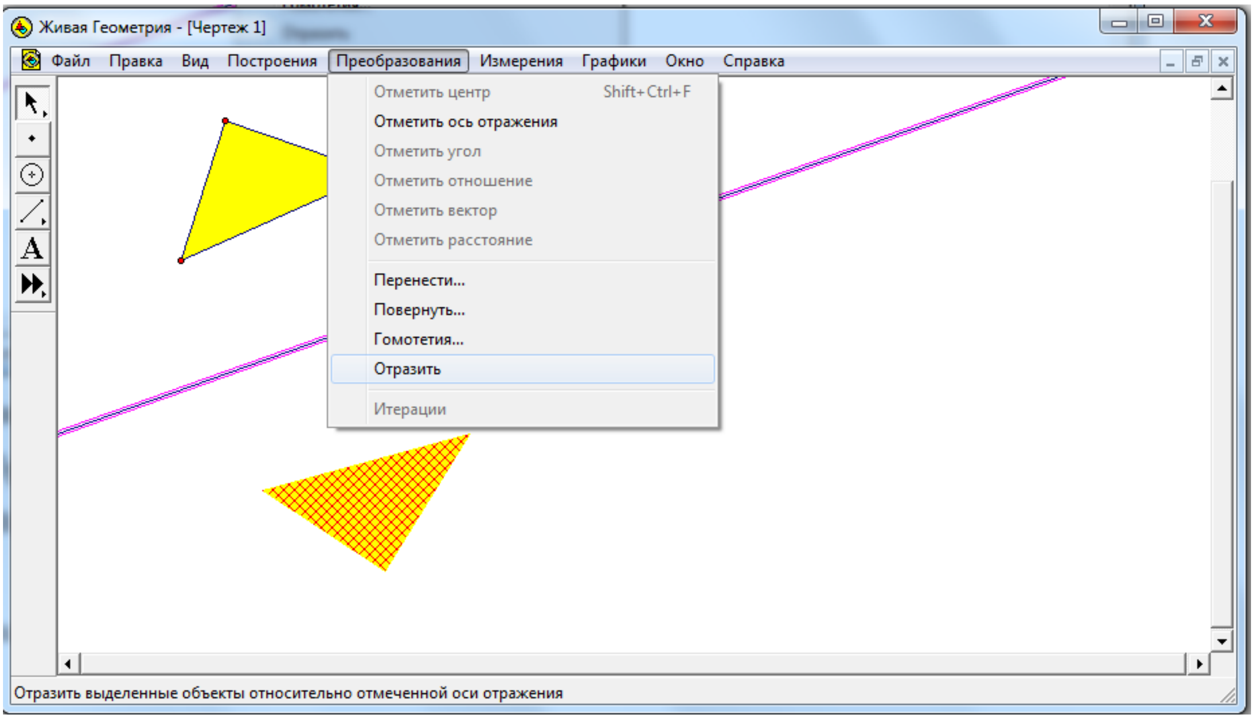

Рис. 12.2

Так как при осевой симметрии сохраняется расстояние (рис. 13), а ориентация фигуры меняется на противоположную, можно сделать вывод, что осевая симметрия – это движение второго рода. Кроме того, при осевой симметрии прямая, параллельная оси симметрии, параллельна и своему образу; прямая, перпендикулярная оси, инвариантна; точка пересечения прямой, не параллельной оси, и ее образа лежит на оси симметрии.

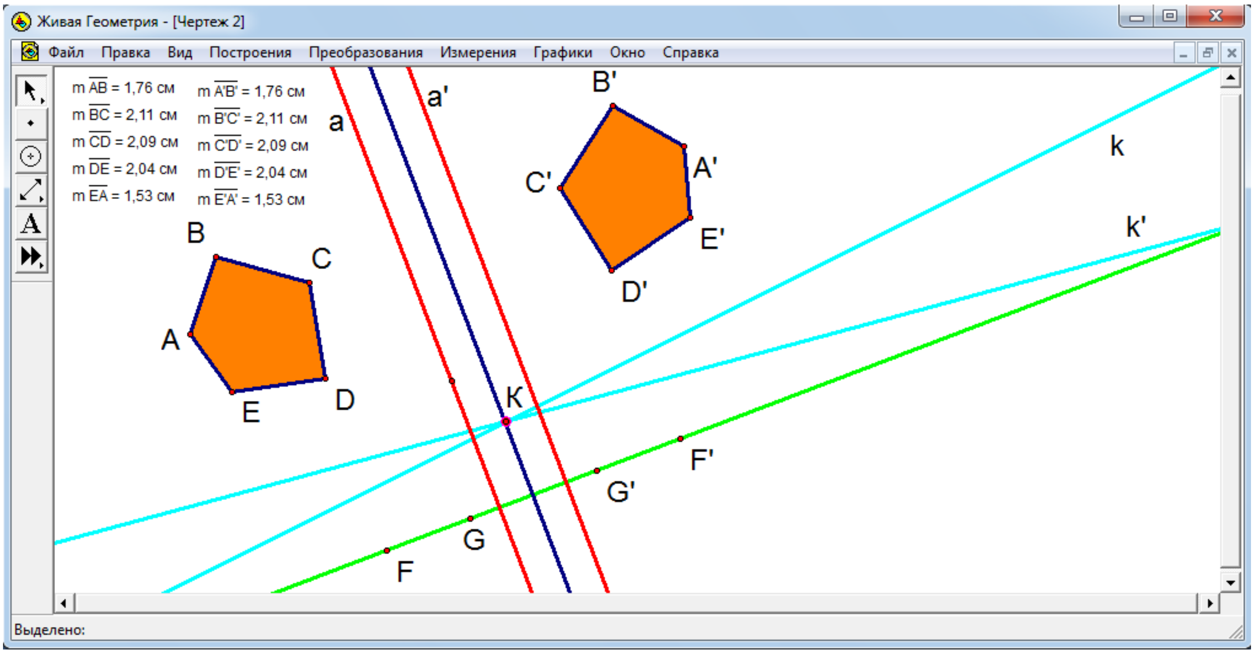

Рис.13

2.3 Применение программы «Живая геометрия» при решении задач на построение

Для решения задач на построение метод движений можно использовать в соответствии со следующим планом:

1. Выбор геометрического преобразования, которое поможет обосновать наличие указанного отношения между объектами.
2. Выполнение выбранного преобразования так, чтобы один объект переходил в другой, наиболее удобный для исследования.
3. Исследование полученного объекта.

4. Обоснование наличия искомого отношения между объектами с помощью свойств используемого преобразования.

При решении задач на построение с помощью программы «Живая геометрия» необходимо учитывать следующие особенности:

– чертежи, составленные на этапах анализа и построения визуально схожи. Их отличие состоит в том, что чертеж, построенный на этапе анализа нельзя изменить, в то время, как с чертежом полученным в ходе этапа построения можно работать, меняя исходные данные;

– на этапе построения можно ограничить возможности учащихся использованием только инструментов «циркуль» и «линейка», если одной из целей является отработка навыков элементарных построений;

– на этапе доказательства с помощью программы мы можем лишь проверить полученный результат с помощью измерений, в то время как доказательство проводится привычным способом.

2.3.1 Метод параллельного переноса.

Применение параллельного переноса для геометрических построений называют методом параллельного переноса. Сущность этого метода состоит в том, что наряду с данными и искомыми фигурами рассматриваются некоторые другие фигуры, которые получаются из данных или искомых фигур или их частей путём переноса на некоторый вектор. Этим путём иногда удаётся облегчить проведение анализа.[2,стр. 27]

Задача 1

Построить трапецию так, чтобы её основания были соответственно равны данным отрезкам a и b ($a>b$), а боковые стороны были соответственно равны двум данным отрезкам c и d ($c \leq d$) (рис. 14).

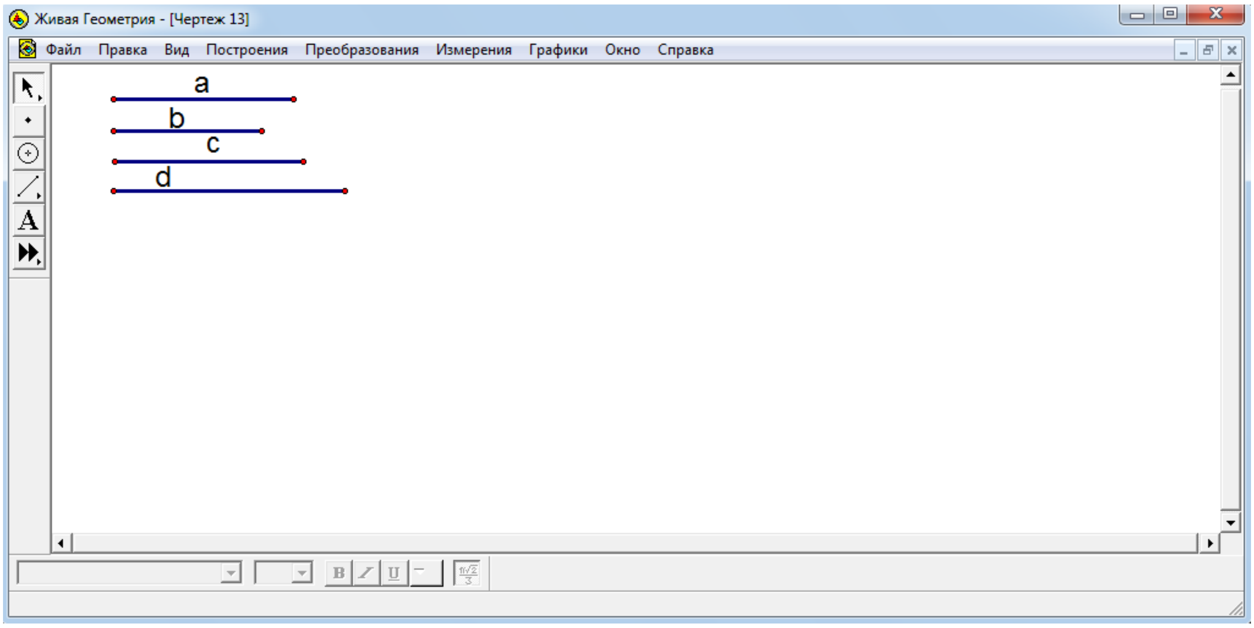

Рис.14

Решение

Предположим, что *ABCD*– искомая трапеция, причём $AD = a$, $BC = b$, $AB=c$, $CD=d$. Можно заметить, что при параллельном переносе на вектор *CB* сторона *CD* преобразуется в отрезок BD_1 (рис 14.1). Получается треугольник ABD_1 , причем $AB = c$, $BD_1 = d$, $AD_1 = a\text{-}b$. Следовательно, построение сводится к построению треугольника ABD_1 по трем сторонам и параллельному переносу стороны BD_1 на вектор *BC*.

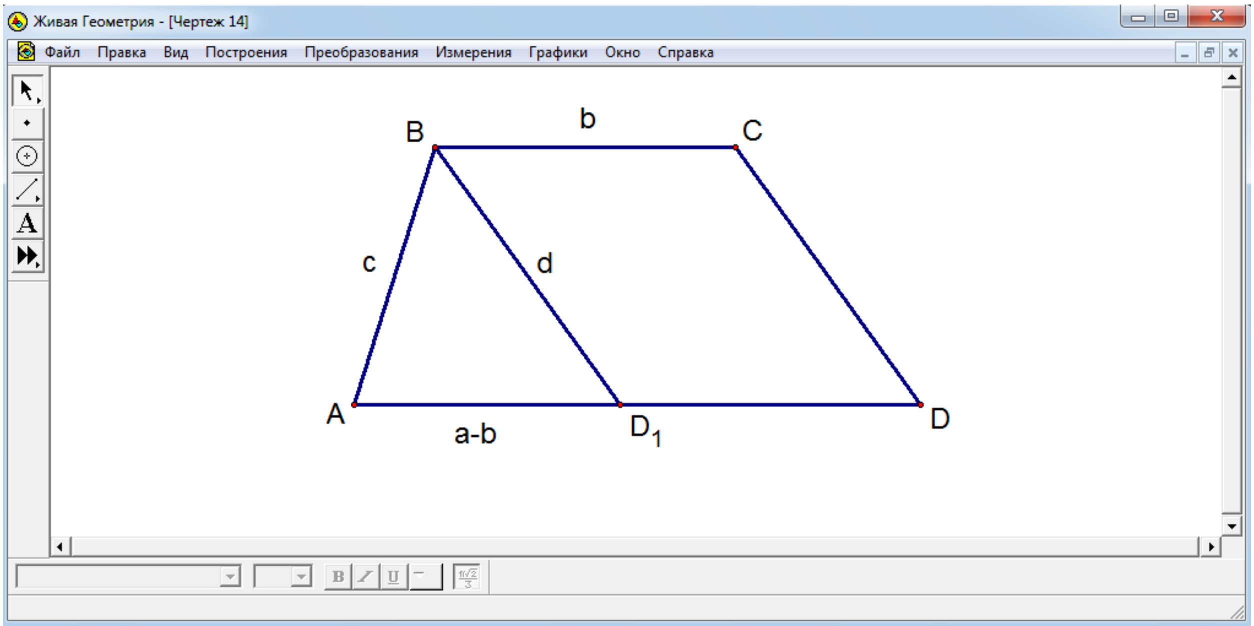

Рис. 14.1

Построение (рис. 14.2):

1) Построим треугольник ABD_1 по трем сторонам $AB=c$, $BD_1=d$, и $AD_1=a-b$.
2) Проведем прямую AD_1
3) Через точку B проведём прямую, параллельную прямой AD_1
4) На этой прямой построим точку C так, чтобы $BC=b$.
5) Построить вектор CD с помощью параллельного переноса отрезка BD_1 на вектор BC.
6) $ABCD$ – искомая трапеция.

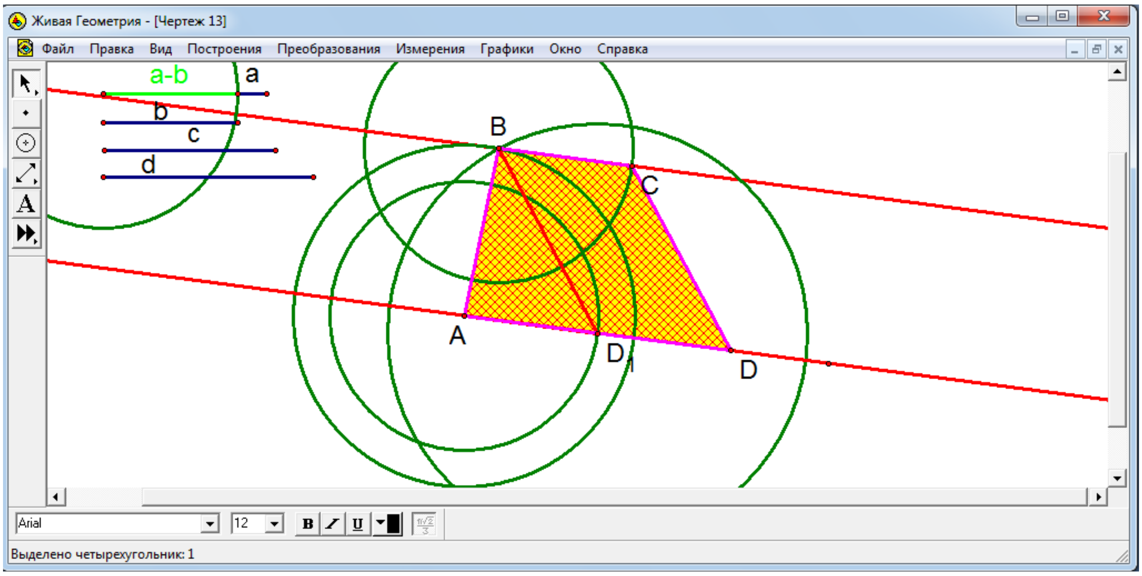

Рис. 14.2

Следует отметить, что при изменении исходных отрезков, построение также выполнимо, что позволяет сделать вывод, что построение возможно независимо от выбранных отрезков (рис. 14.3).

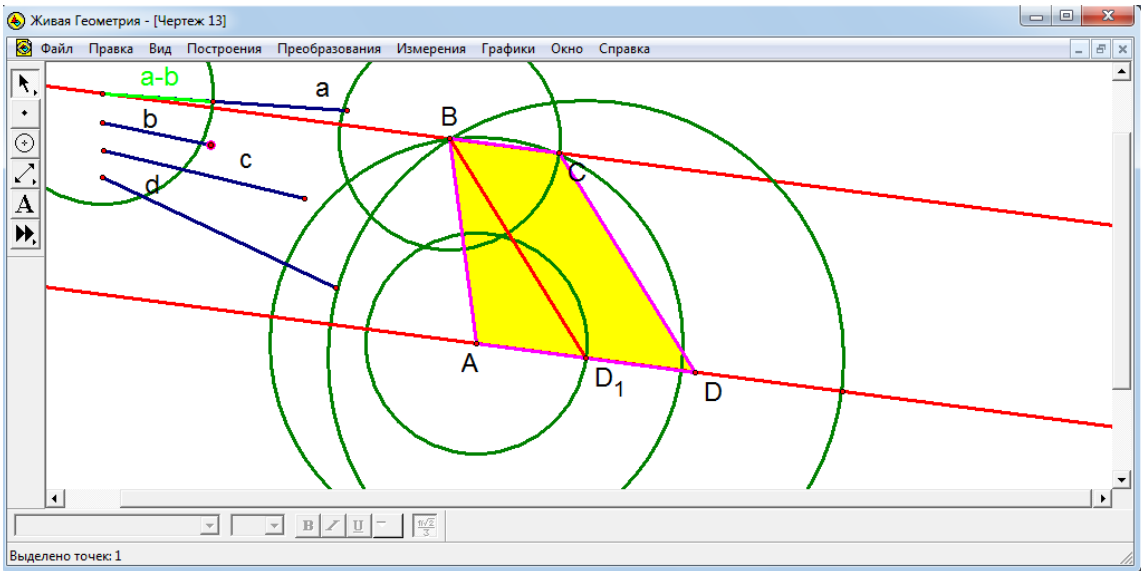

Рис.14.3

Задача 2.

В каком месте следует построить мост MN через реку, разделяющую две деревни A и B, чтобы путь $AMNB$ из деревни A в деревню B был кратчайшим, если считать что берега реки параллельны, а мост строится перпендикулярно берегам (рис. 15).

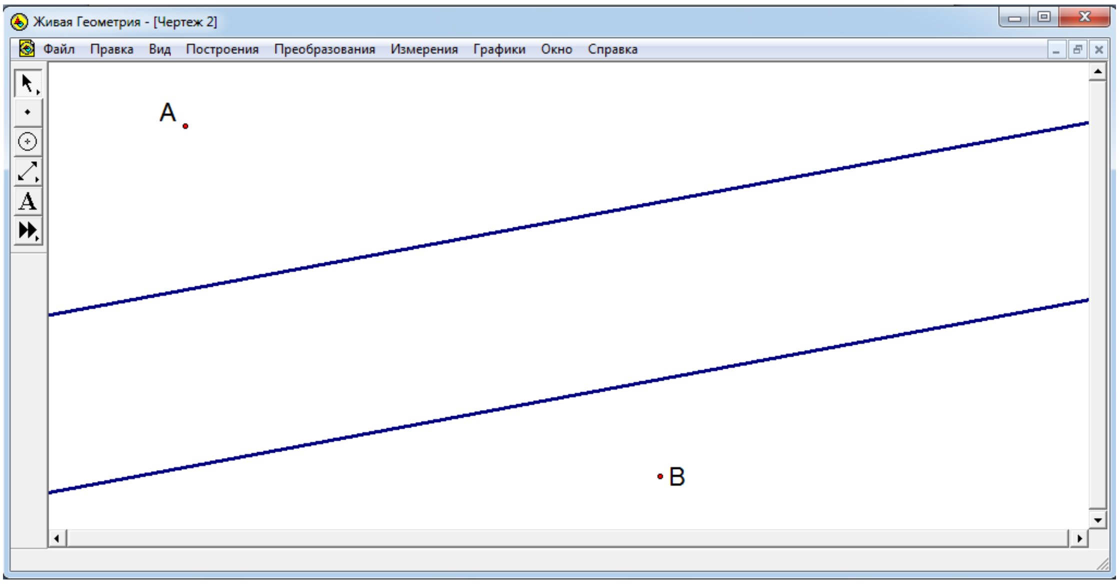

Рис. 15

Решение

Предположим, что некоторое положение моста найдено (рис. 15.1). Тогда при переносе точки A на вектор MN получается точка A_1. Полученная точка N_1 на отрезке A_1B и будет точкой начала моста.

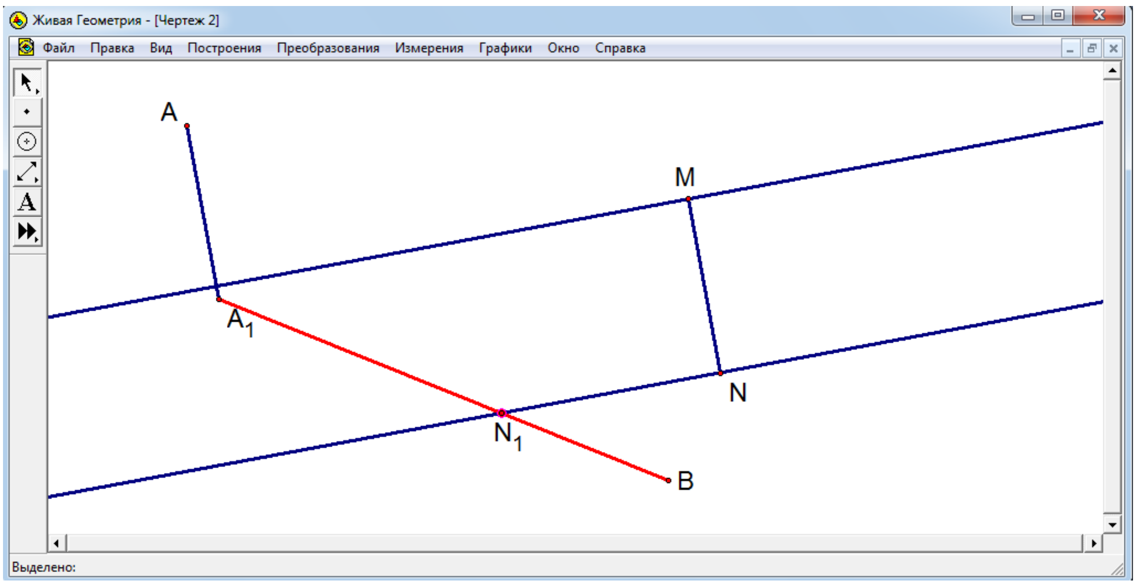

Рис.15.1

Построение (рис. 15.2).

1) Параллельный перенос точки A на вектор MN.

Точка A переходит в точку A_1.

2) Построение отрезка A_1B. Получаем точку начала моста.

3) Построение моста.

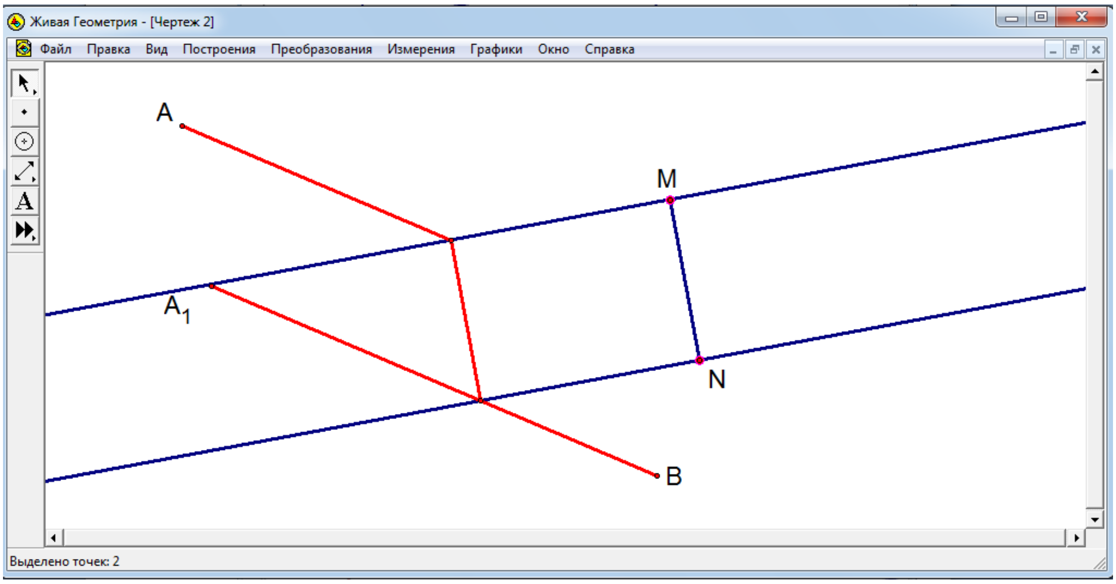

Рис.15.2

Решение задачи в «Живой геометрии» позволяет сравнить полученное расстояние с любым другим, с помощью функции «измерение» (рис. 15.3). Для этого необходимо выбрать другой вариант построения моста и измерить полученные отрезки пути.

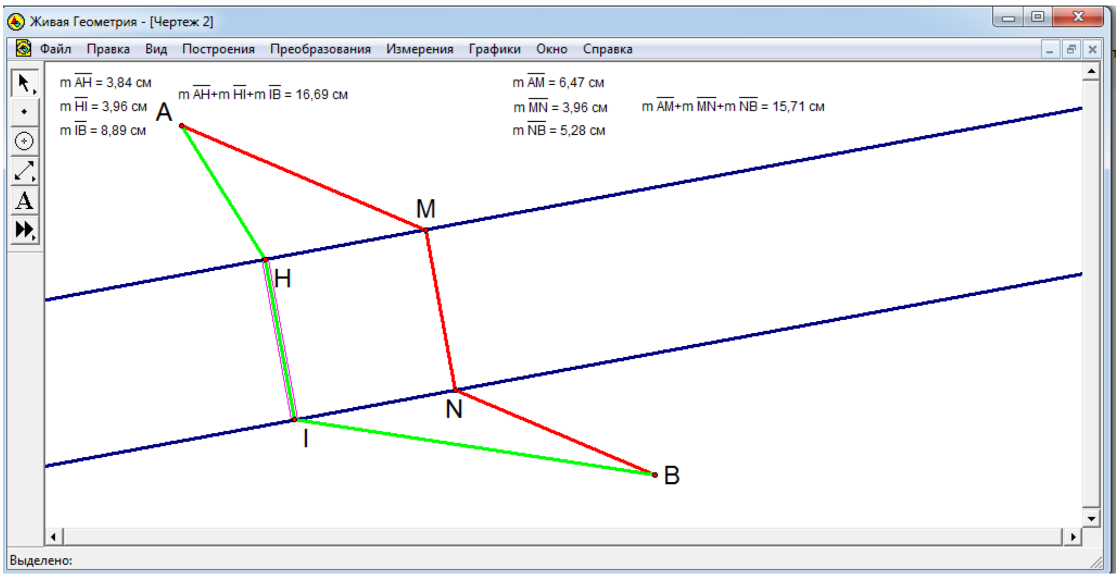

Рис.15.3

Возможности программы позволяют нам двигать отрезок *HI*. При его движении мы можем увидеть, что расстояние *AHIB* больше расстояния *AMNB* при любом расположении моста, кроме того случая, когда отрезки *HI* и *MN* совпадают (рис. 15.4).

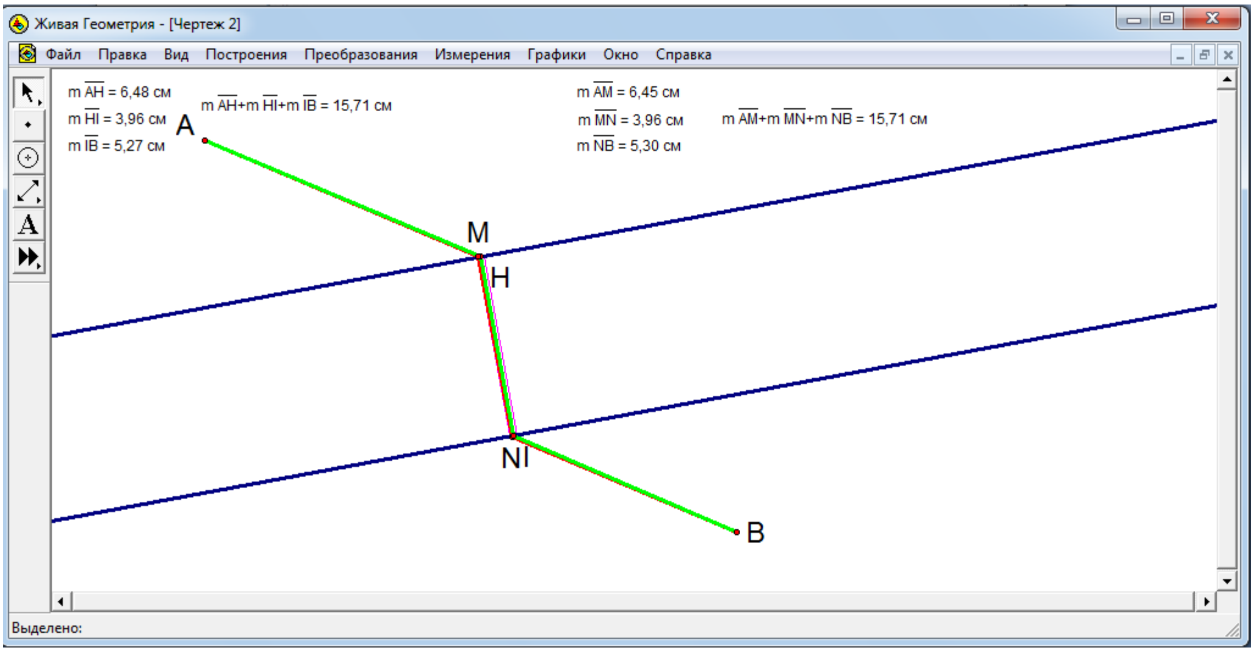

Рис.15.4

2.3.2 Метод поворота

Идея метода поворота состоит в том, чтобы повернуть какую-либо данную или искомую фигуру около целесообразно избранного центра на соответствующий угол так, чтобы облегчить проведение анализа задачи или даже непосредственно прийти к решению.[4, стр. 107]

Задача 1

Построить равносторонний треугольник *ABC* с вершинами на трех данных параллельных прямых.

Решение.

Допустим, что треугольник построен. Тогда при повороте вокруг точки *A* против часовой стрелки на 60° точка *C* переходит в точку *B*, а прямая m_3 в прямую m (рис. 16).

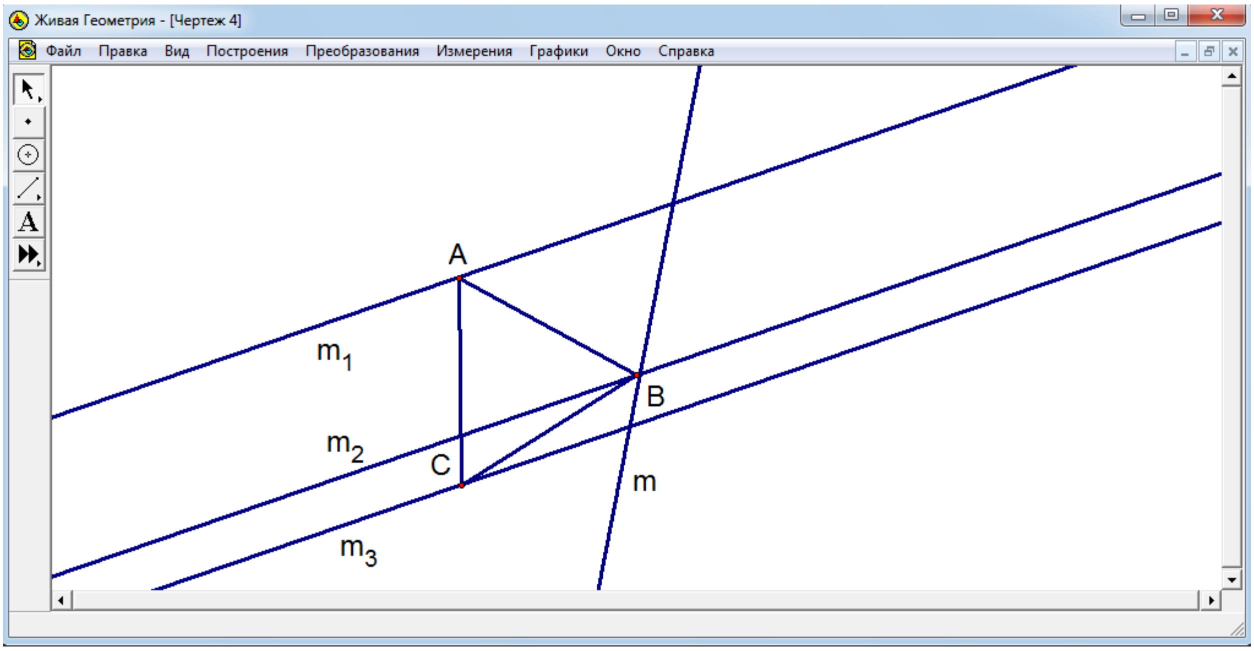

Рис.16

Построение (рис. 16.1).

1) На прямой m_1 взять точку A.
2) Повернуть прямую m_3 вокруг точки A против часовой стрелки на 60°. Прямая m_3 переходит в прямую m. Точка пересечения прямых - точка B.
3) Выполнить поворот точки A вокруг точки B против часовой стрелки на 60°. Полученная точка – точка C.
4) Построить треугольник ABC.

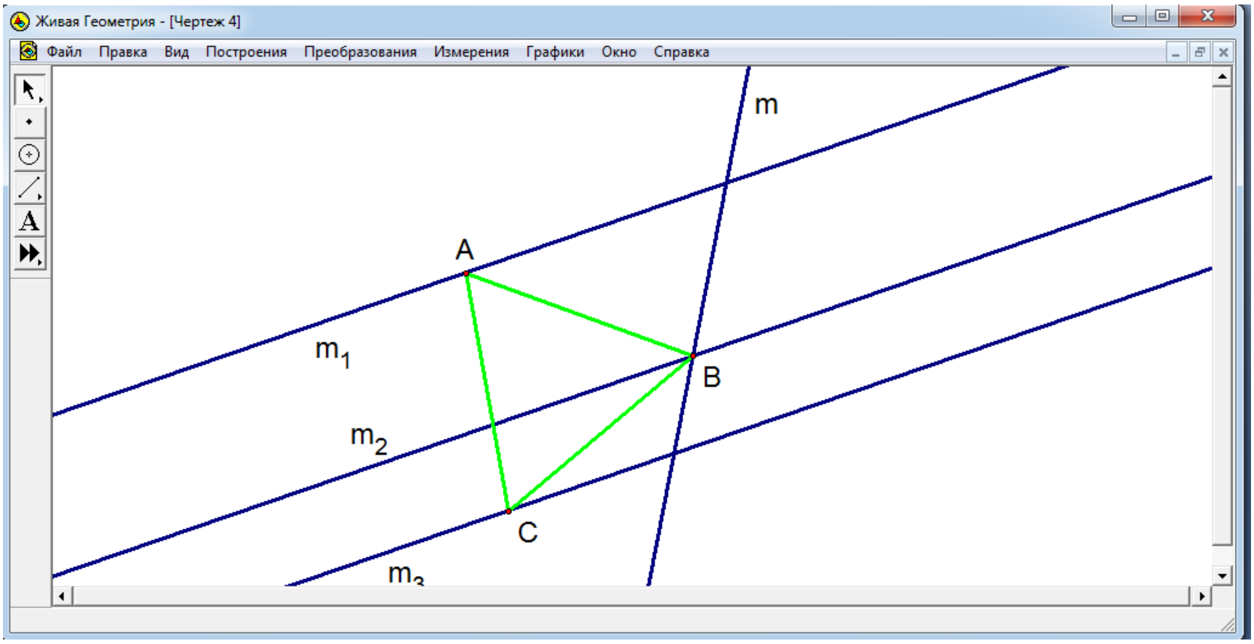

Рис. 16.1

Используя программу «Живая геометрия» можно убедиться в правильности построения, измерив длины сторон (рис. 16.2).

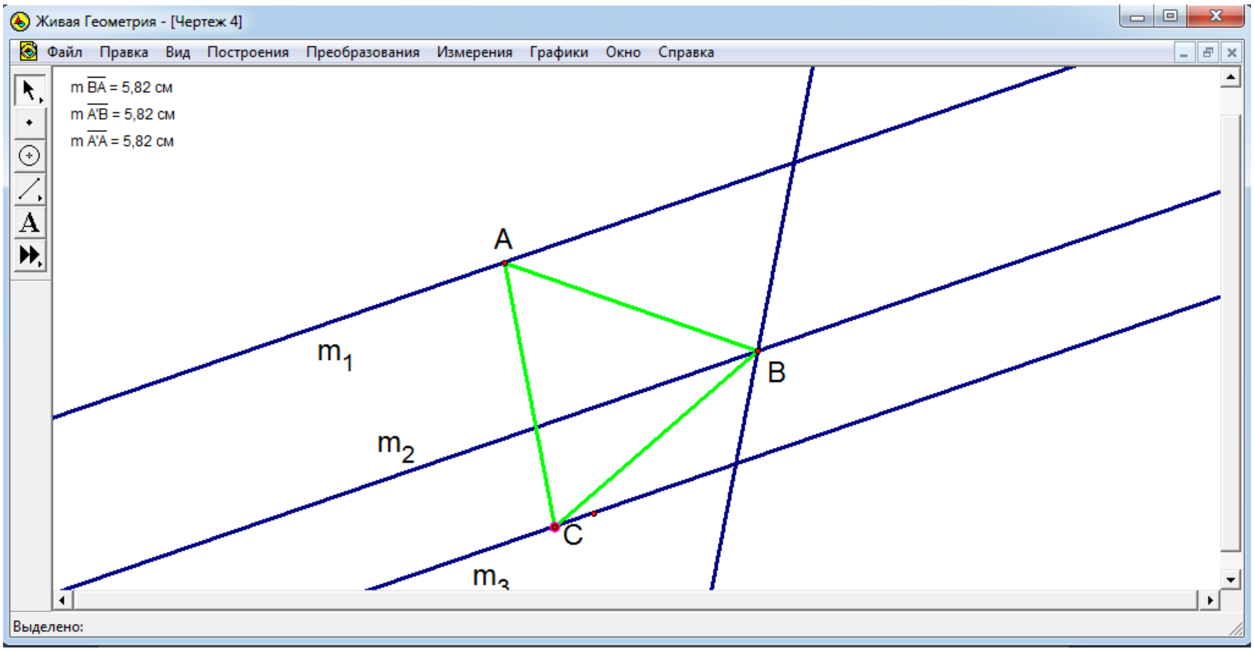

Рис.16.2

Кроме того, при передвижении любых точек и прямых видно, что в итоге получается равносторонний треугольник (рис. 16.3). Значит, можно сделать вывод, что построение всегда возможно и не зависит от выбора исходных прямых и точки.

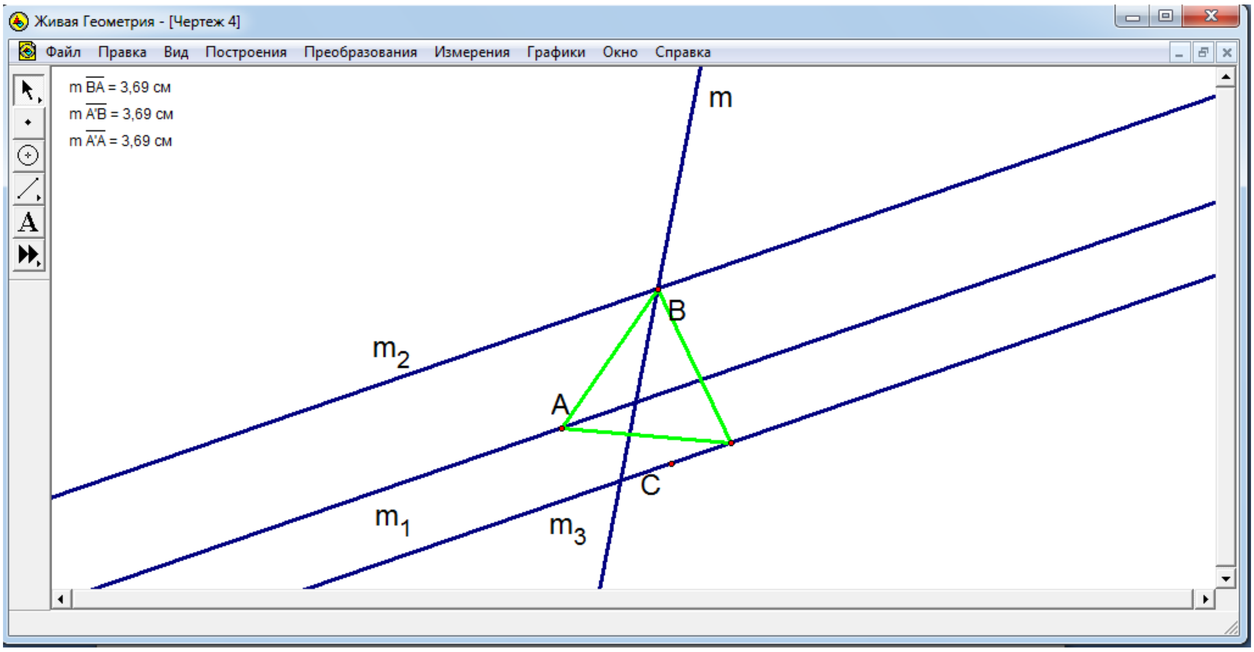

Рис. 16.3

Задача 2

Построить правильный треугольник *ABC*, одна вершина которого находится в данной точке *A*, вершина *B* – на данной прямой *l*, а вершина *C* – на данной окружности α (рис. 17).

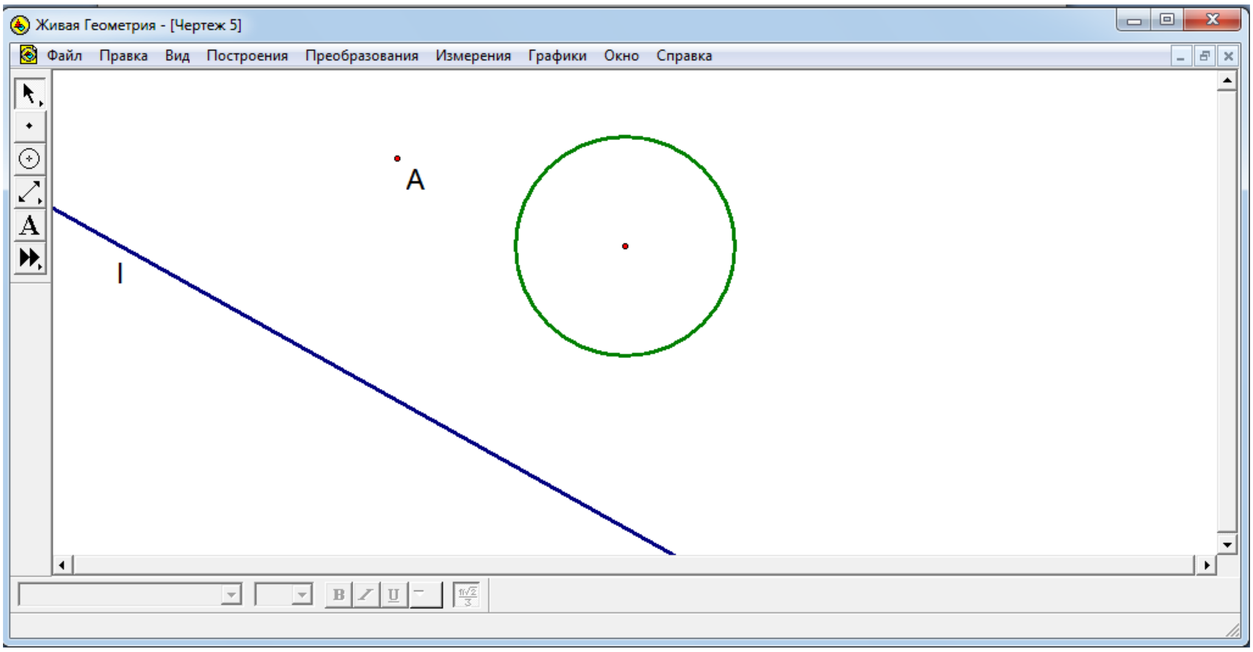

Рис.17

Решение

Предположим, что треугольник *ABC* построен (рис. 17.1). Очевидно, что при повороте точки *C* на 60° вокруг точки *A*, получается точка *B*.

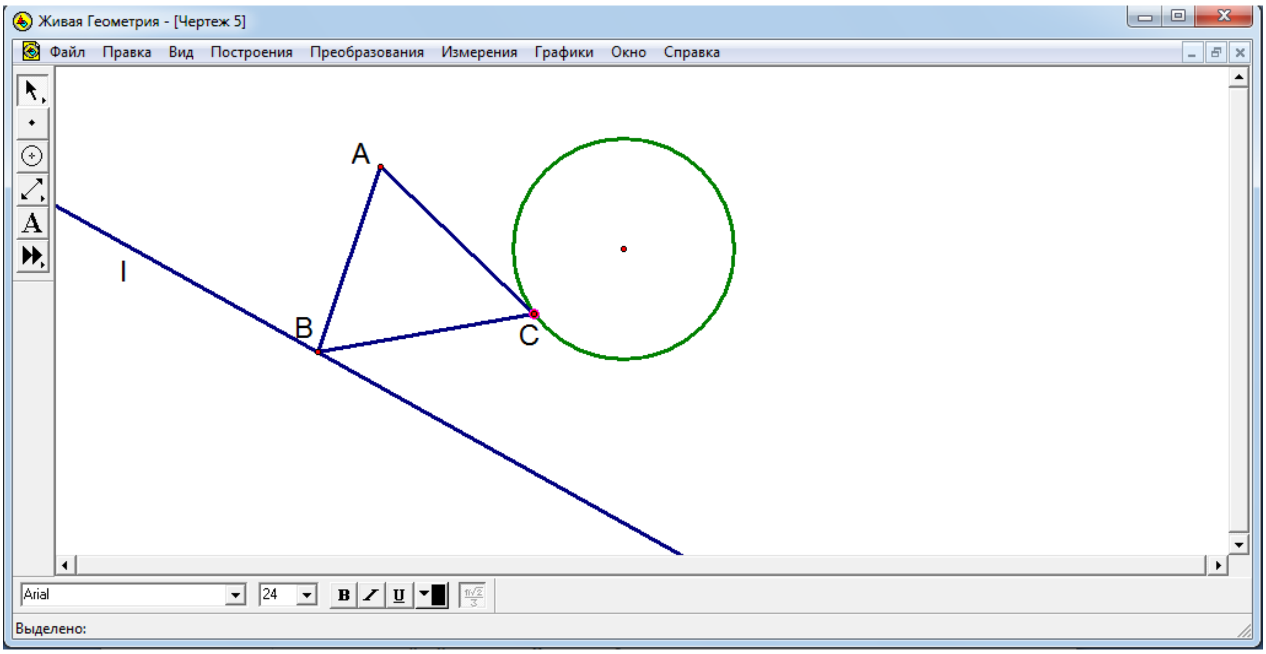

Рис. 17.1

Если построить образ заданной окружности при этом повороте, получится, что точка *B* принадлежит данному образу (рис. 17.2). Кроме того точка *B* принадлежит и прямой *l*. Таким образом, можно найти точку *B*, как точку пересечения образа окружности, полученной в результате поворота вокруг точки *A* на 60°, и прямой *l*. Точка *C* получается в результате поворота точки В на 60° вокруг точки *A* против часовой стрелки.

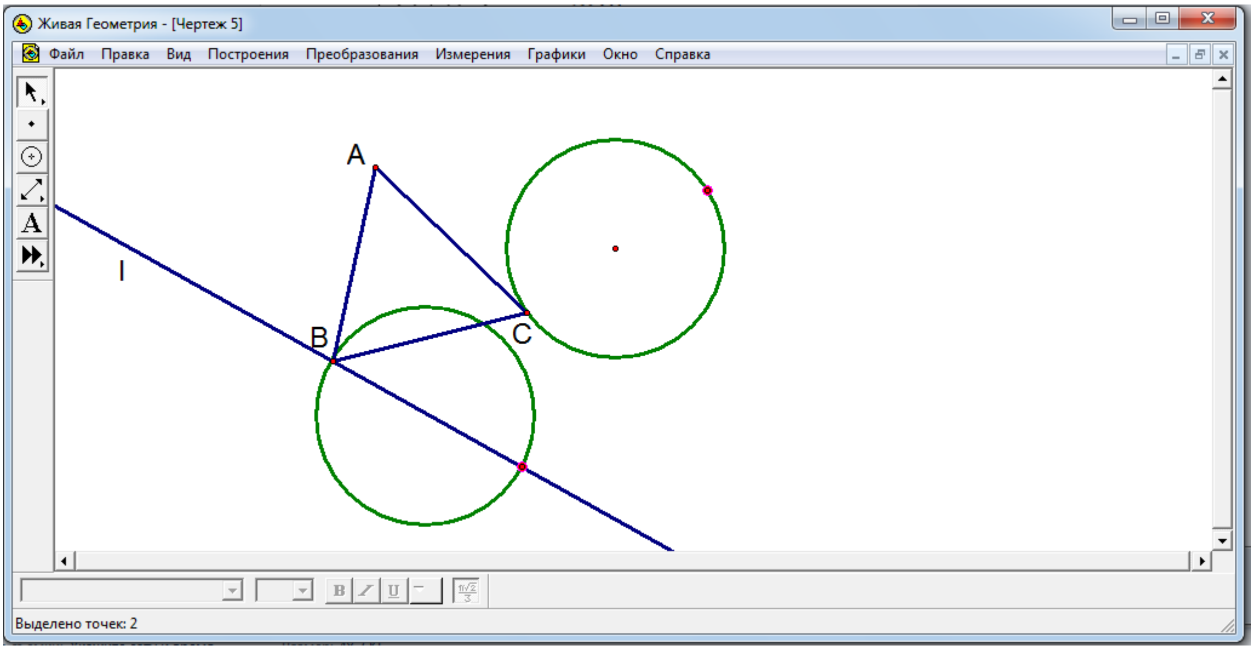

Рис. 17.2

Построение (рис. 17.3).

Для решения поставленной задачи, необходимо:

1) Построить поворот заданной окружности вокруг точки *A* на 60°.
2) Найти точку *B* – точку пересечения образа окружности с прямой *l*.
3) Повернуть полученную точку *B* на 60° против часовой стрелки вокруг точки *A*.
4) Построить треугольник *ABC*.

В ходе построения можно увидеть, что у построенного образа окружности и прямой *l* может быть две точки пересечения, следовательно, в данном случае задача будет иметь два решения (рис. 17.4). Соответственно, задача будет иметь одно решение, если у образа окружности и прямой *l* одна точка пересечения.

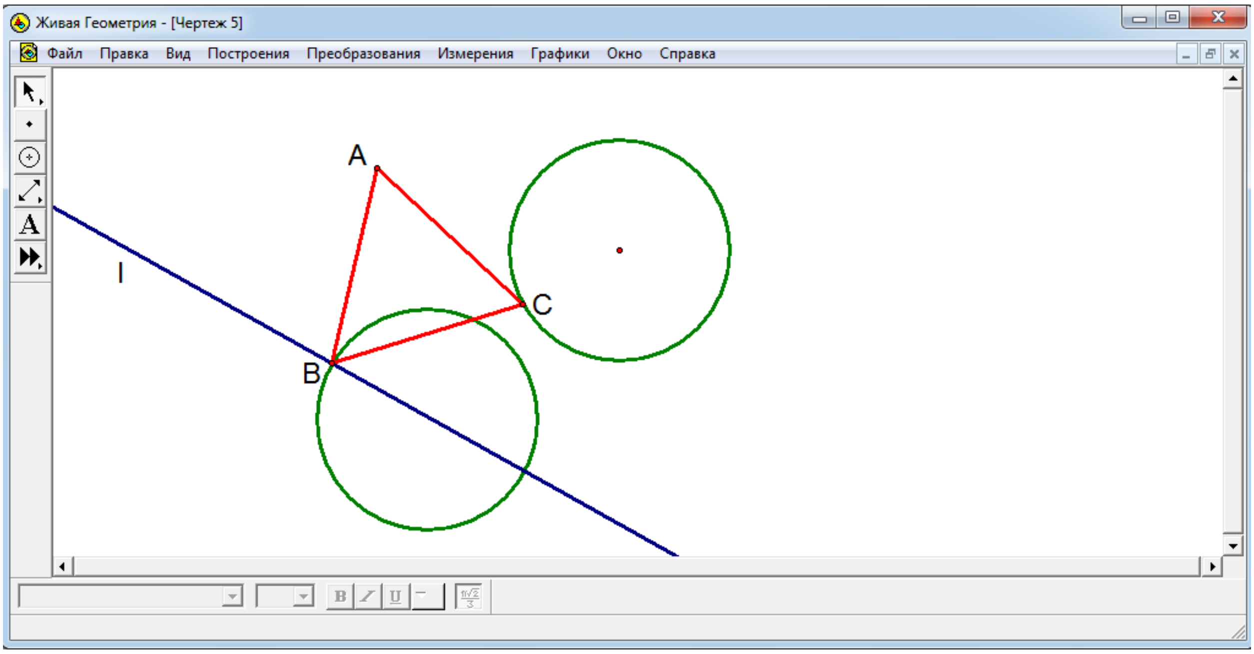

Рис. 17.3

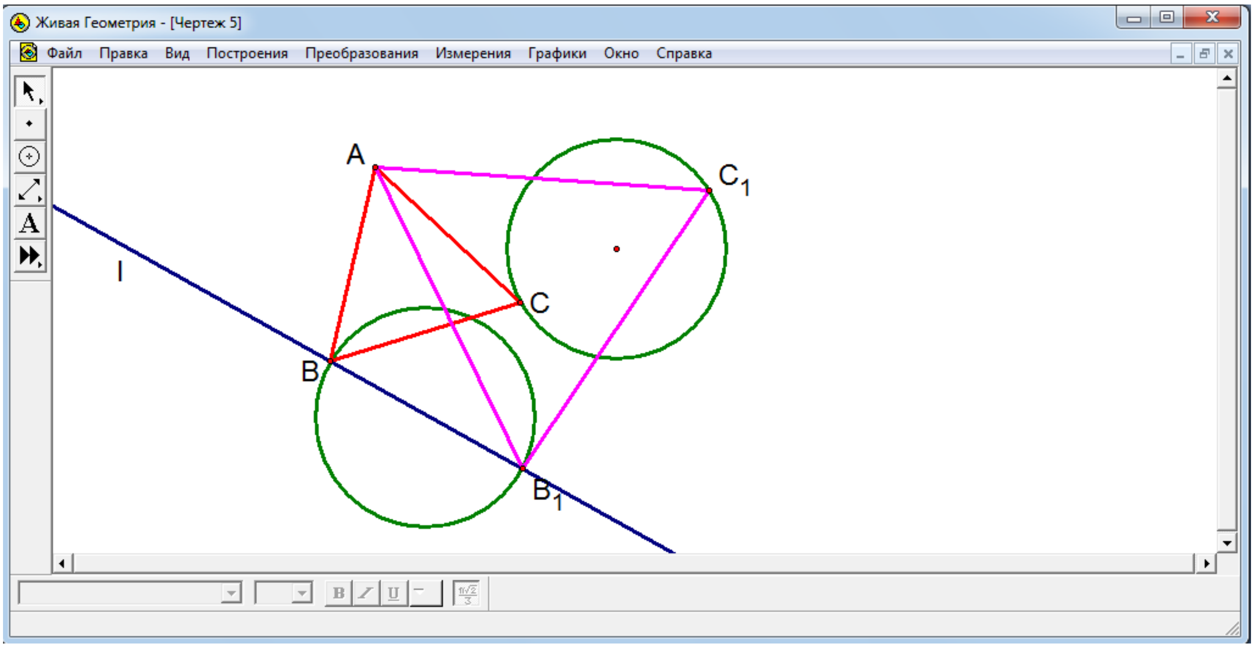

Рис. 17.4

Можно убедиться в правильности построения, измерив длины сторон полученного треугольника (рис 17.5).

Кроме того при передвижении любых точек и прямых видно, что в итоге получается равносторонний треугольник (рис. 17.5). Значит можно сделать вывод, что построение не зависит от выбора исходных данных.

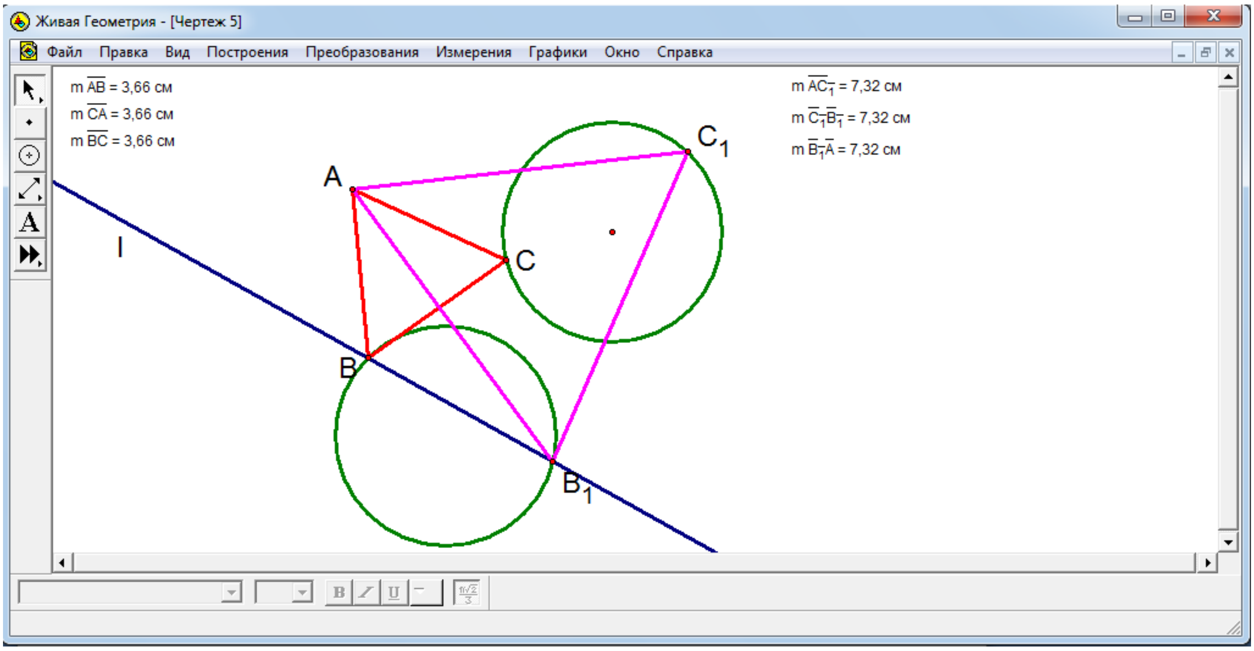

Рис. 17.4

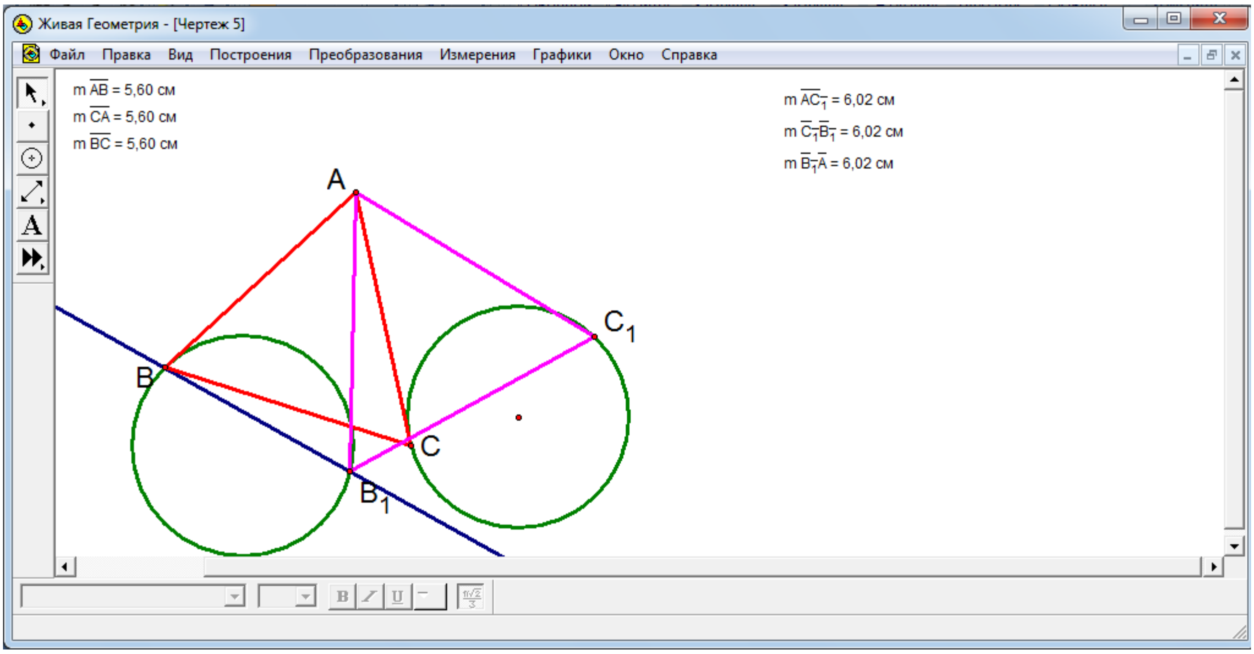

Рис. 17.5

2.3.3 Метод центральной симметрии

Применение центральной симметрии к решению задач на построение называют методом центральной симметрии. Данный метод применим к тем задачам, в которых в той или иной форме указана точка, являющаяся центром симметрии искомой или вспомогательной фигуры. [4, стр. 100]

Задача 1

Даны две концентрические окружности S_1 и S_2 (рис. 18). Проведите прямую, на которой эти окружности высекают три равных отрезка.

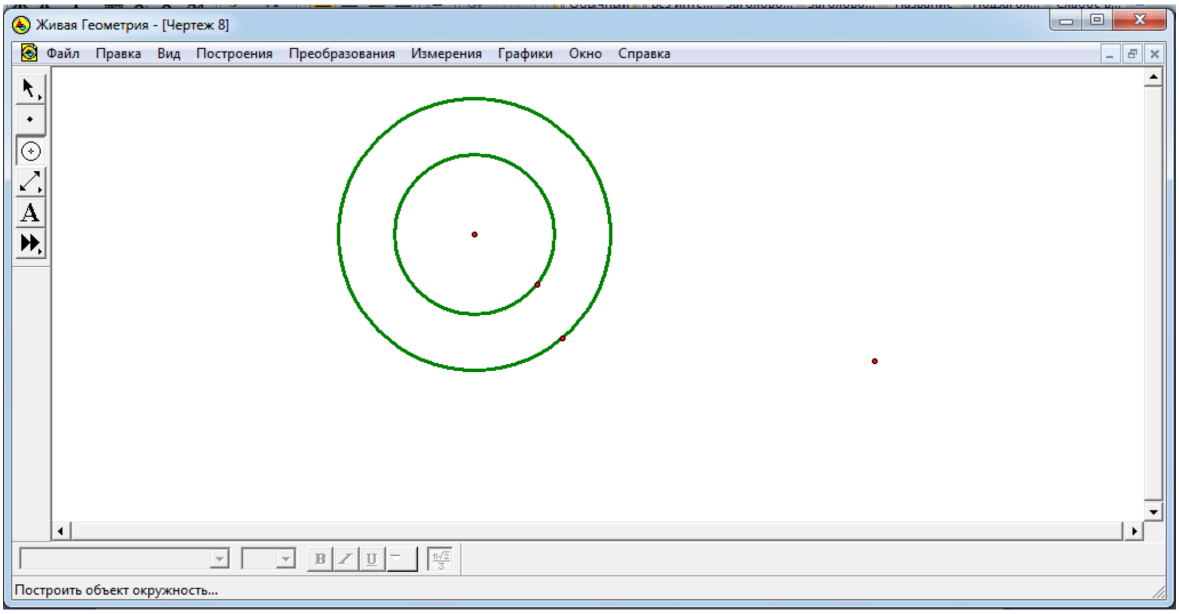

Рис. 18

Предположим, что прямая *a* – искомая прямая, тогда точки *A*,*B*,*C*, *D* – точки пересечения этой прямой с данными окружностями, и отрезки *AB*, *BC*, *CD* равны. Очевидно, что, при симметрии относительно точки *C*, точка *B* переходит в точку *D*, а окружность S_2 в равную ей окружность, проходящую через точку *D* (рис. 18.1).

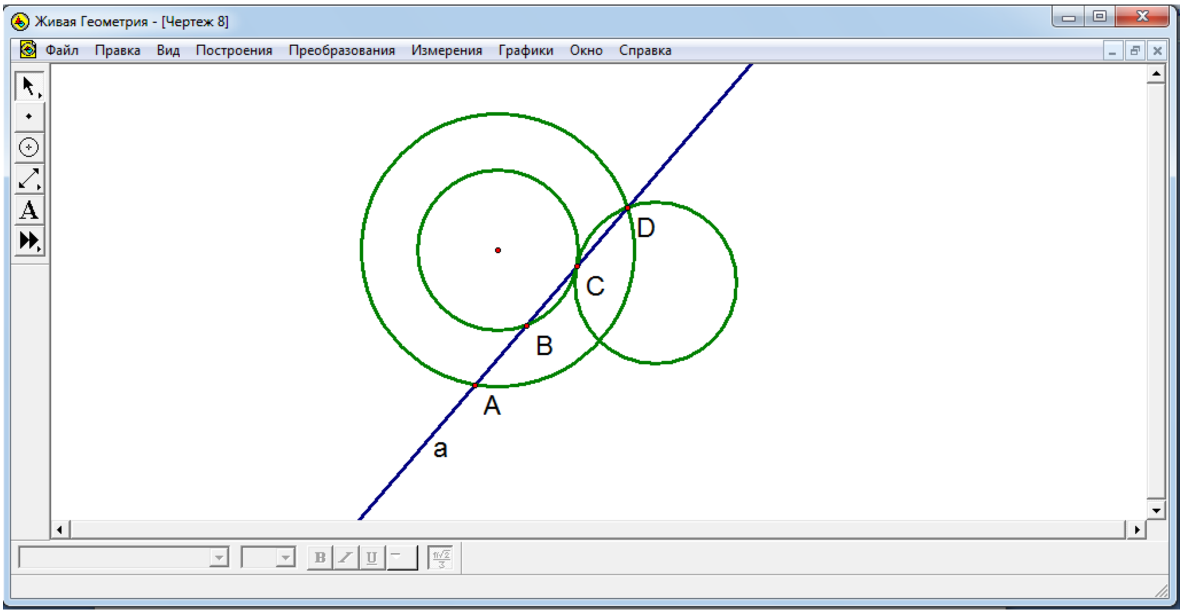

Рис. 18.1

Построение (рис. 18.2)

1) Образ S меньшей окружности S_2 относительно её произвольной точки C.
2) Точка пересечения полученной окружности S и S_1 - точка D.
3) Построить прямую CD.

В результате построения можно увидеть, что окружности S и S_1 могут иметь и две общие точки. Следовательно в данном случае задача имеет два решения. Прямые CD и CD_1 – прямые, на которых заданные окружности отсекают три равных отрезка.

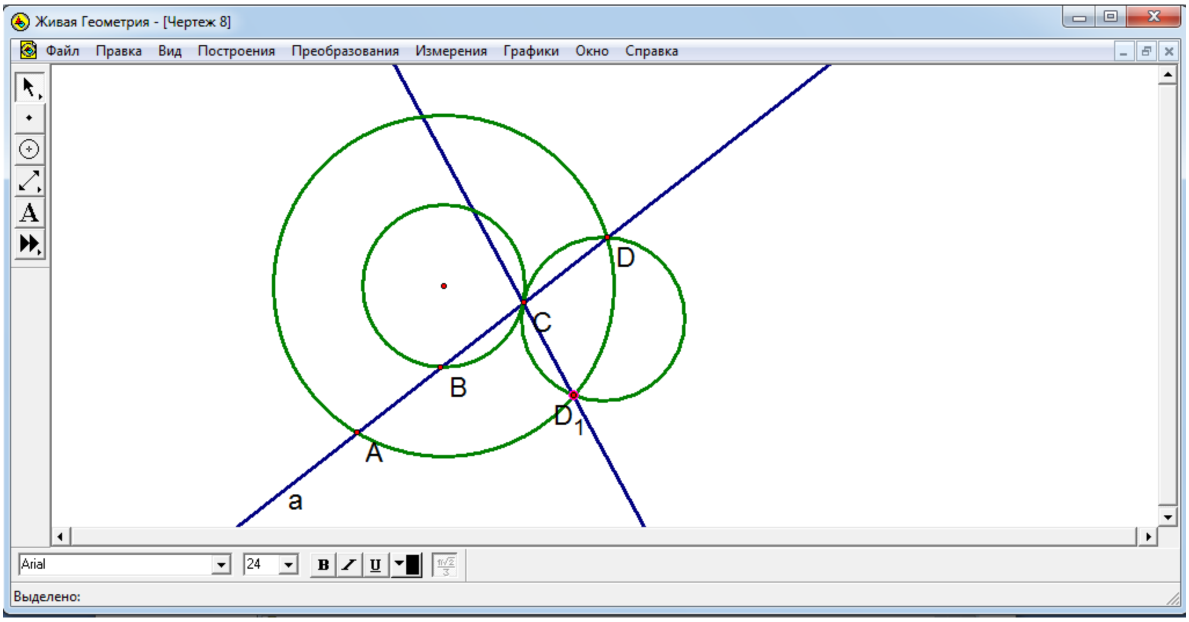

Рис 18.2

Задача имеет одно решение в том случае, когда у окружностей S и S_1 одна общая точка (рис. 18.3), что возможно, когда радиус окружности S_1 в два раза меньше радиуса окружности S_2. В этом случае окружности поделят данную прямую на три отрезка, равных диаметру меньшей окружности.

Чтобы убедиться, что построение выполнено верно, можно измерить получившиеся отрезки прямой (рис. 18.4).

При передвижении любых точек и окружностей видно, что длины отрезков остаются равными (рис. 18.5). Значит можно сделать вывод, что построение не зависит от выбора исходных прямых и точки.

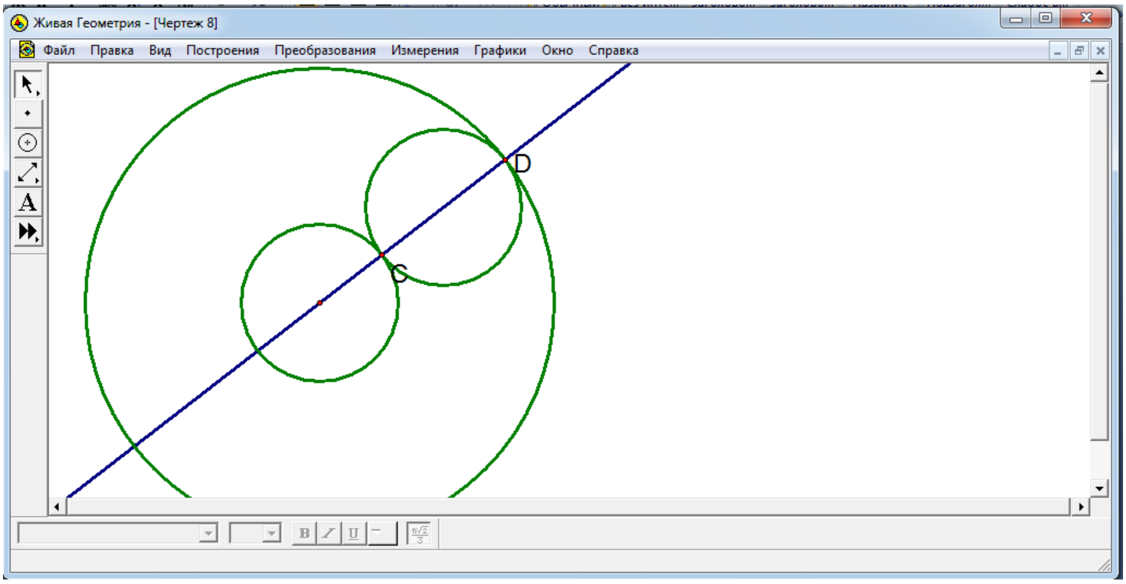

Рис. 18.3

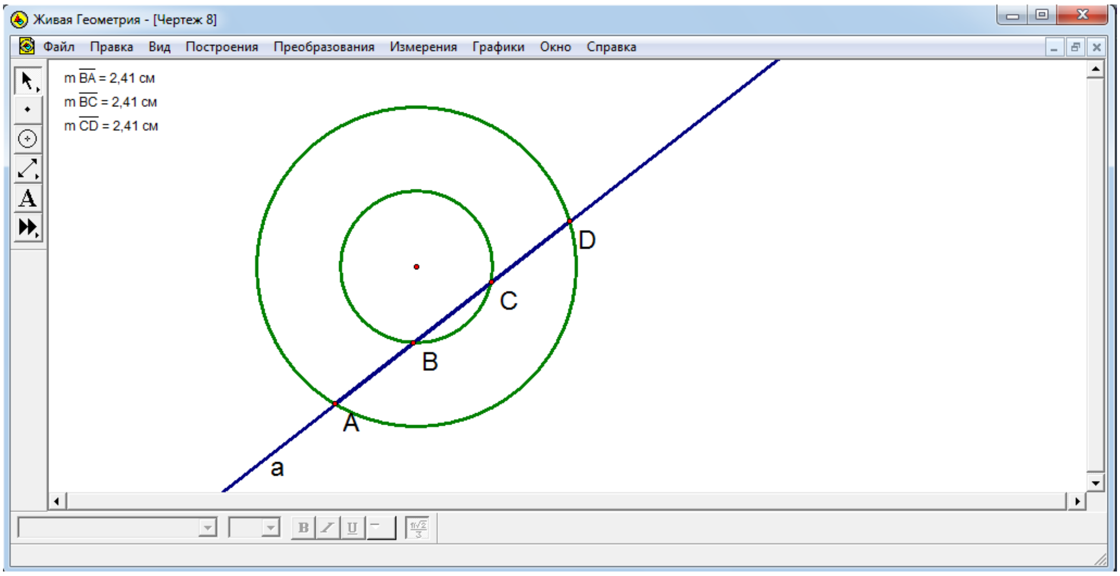

Рис. 18.4

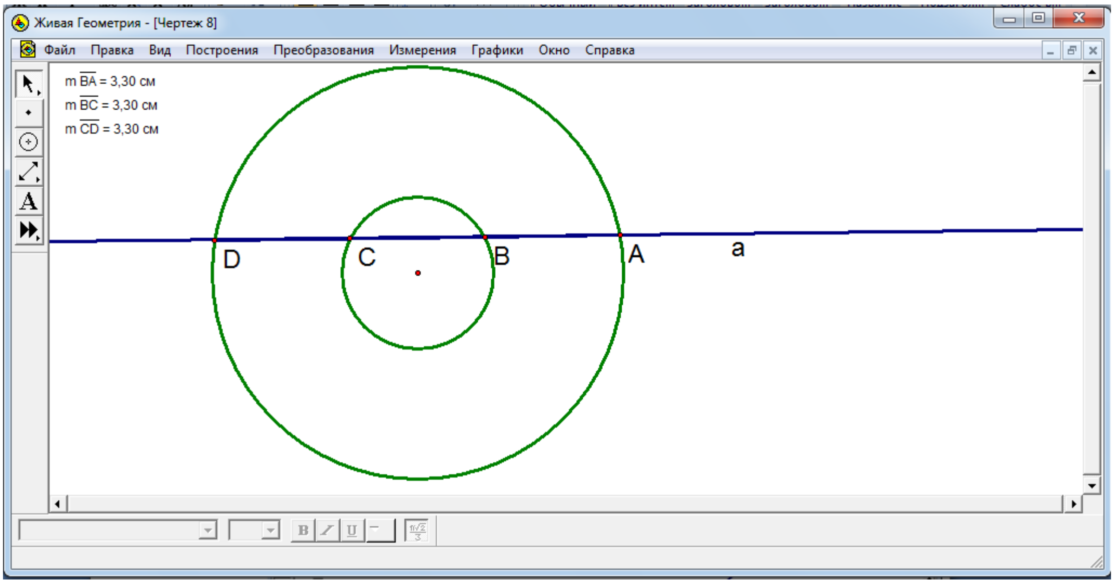

Рис.18.5

Задача 2

Через данную точку A провести прямую так, чтобы ее отрезок с концами на данных прямой и окружности делился точкой пополам (рис. 19).

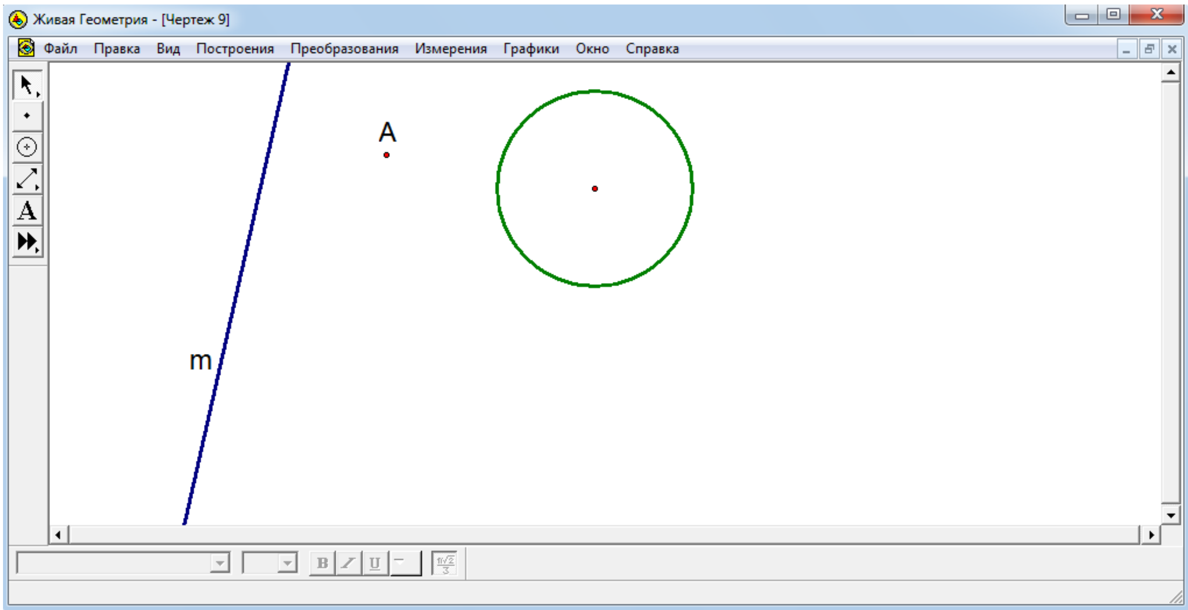

Рис. 19

Предположим, что CD – искомый отрезок. Очевидно, что при центральной симметрии относительно точки A, точка C отразится в точку D, которая будет лежать на образе m_1 прямой m, полученным в результате этой же симметрии (рис. 19.1). А так как точка D лежит и на окружности, то мы можем построить ее как точку пересечения прямой m_1 и заданной окружности.

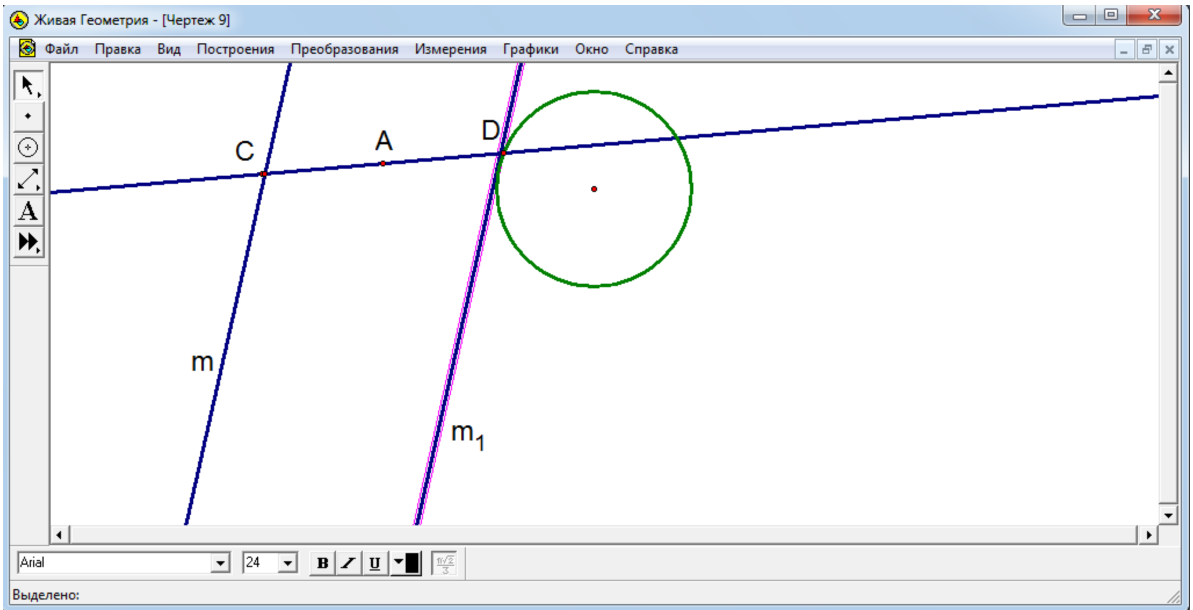

Рис. 19.1

Построение (рис. 19.2)

1) Построить прямую m_1, симметричную прямой m относительно точки A.

2) Найти точку D – точку пересечения m_1 и окружности.

3) Построить точку C, симметричную точке D относительно точки A.

4) Построить отрезок CD.

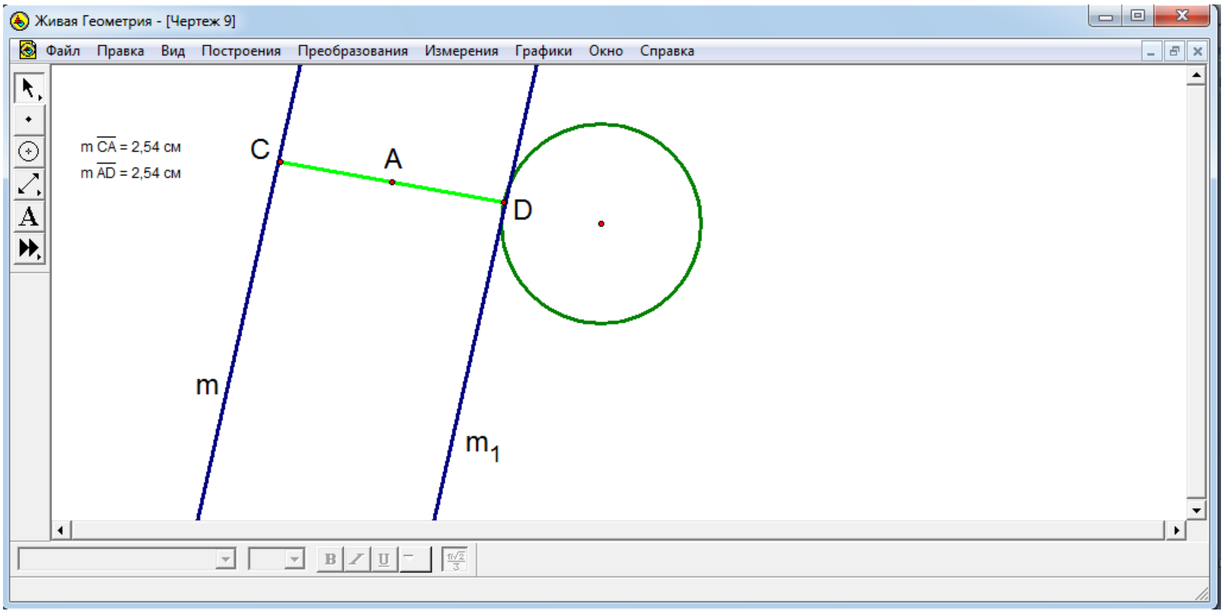

Рис. 19.2

В ходе исследования решения данной задачи можно увидеть, что, если прямая m_1 пересекает окружность в двух точках, то задача имеет два решения: отрезки CD и C_1D_1.

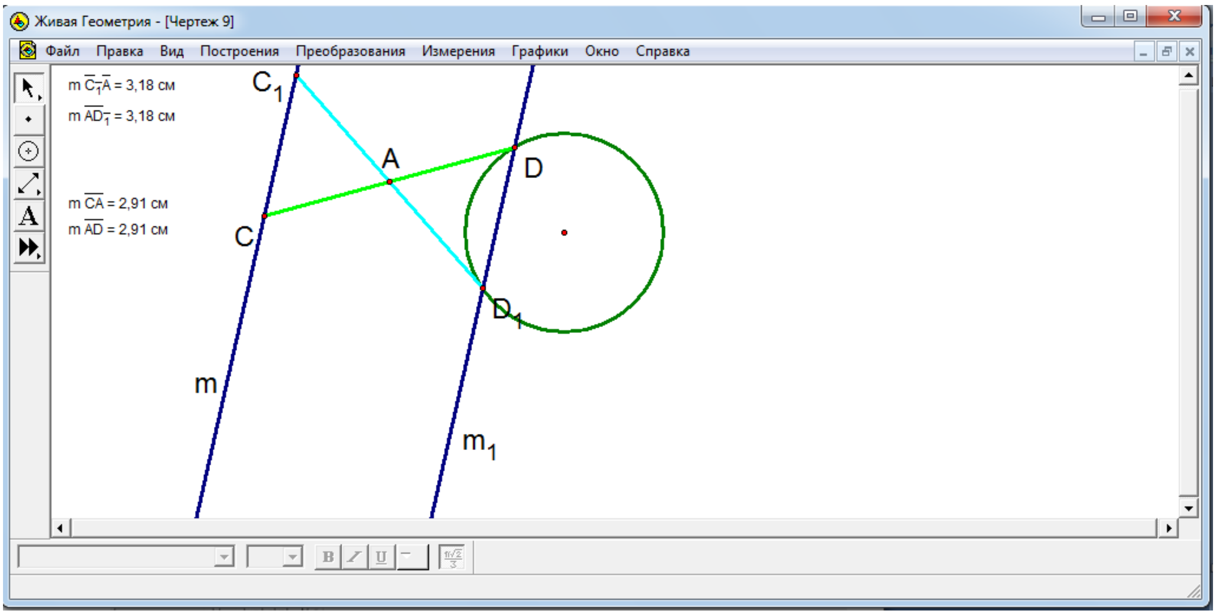

Рис. 19.3

Также возможна ситуация, когда задача не имеет решения, если прямая m_1 и окружность не имеют общих точек (рис. 19.3).

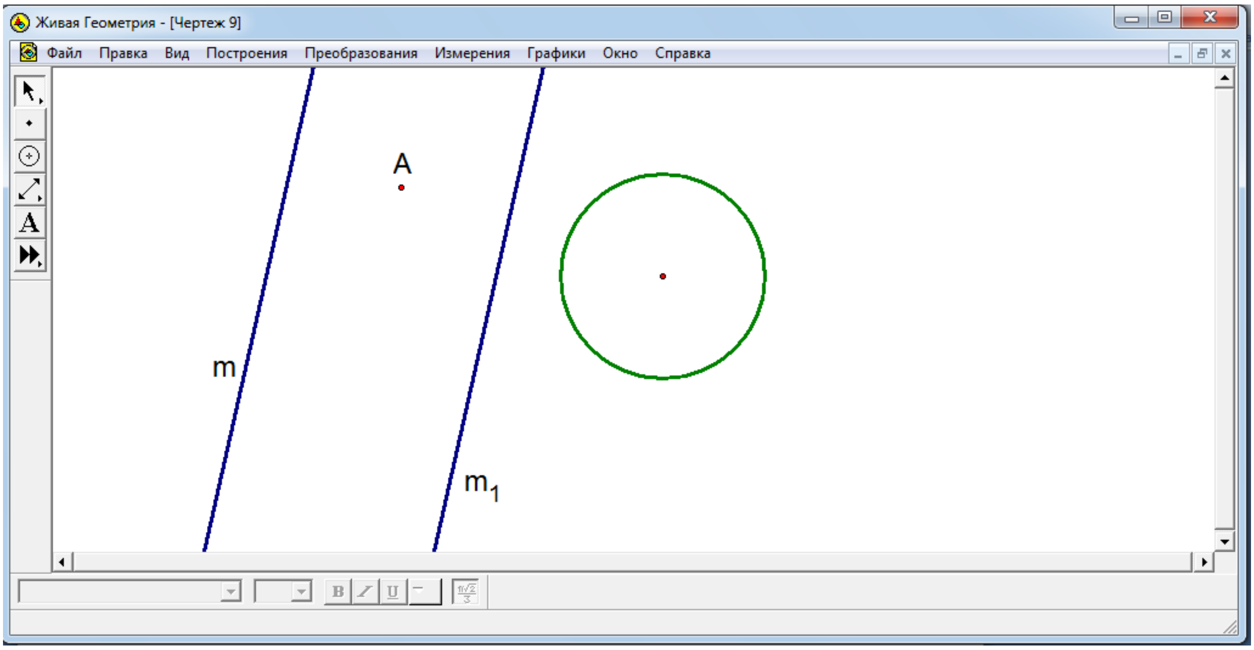

Рис.19.3

2.3.4 Метод осевой симметрии

Применение осевой симметрии к решению задач на построение называют методом симметрии. Метод симметрии состоит в том, что наряду с данными и искомыми фигурами рассматриваются также фигуры, симметричные некоторым из них относительно некоторой оси. При удачном выборе оси и преобразуемой фигуры решение задачи может значительно облегчиться, а в некоторых случаях симметрия непосредственно даёт искомые точки.

Задача 1

Дана прямая m и две окружности S_1 и S_2 в полуплоскости с границей m (рис. 20). Найти на прямой m точку, касательные из которой к данным окружностям образуют с прямой m равные углы.

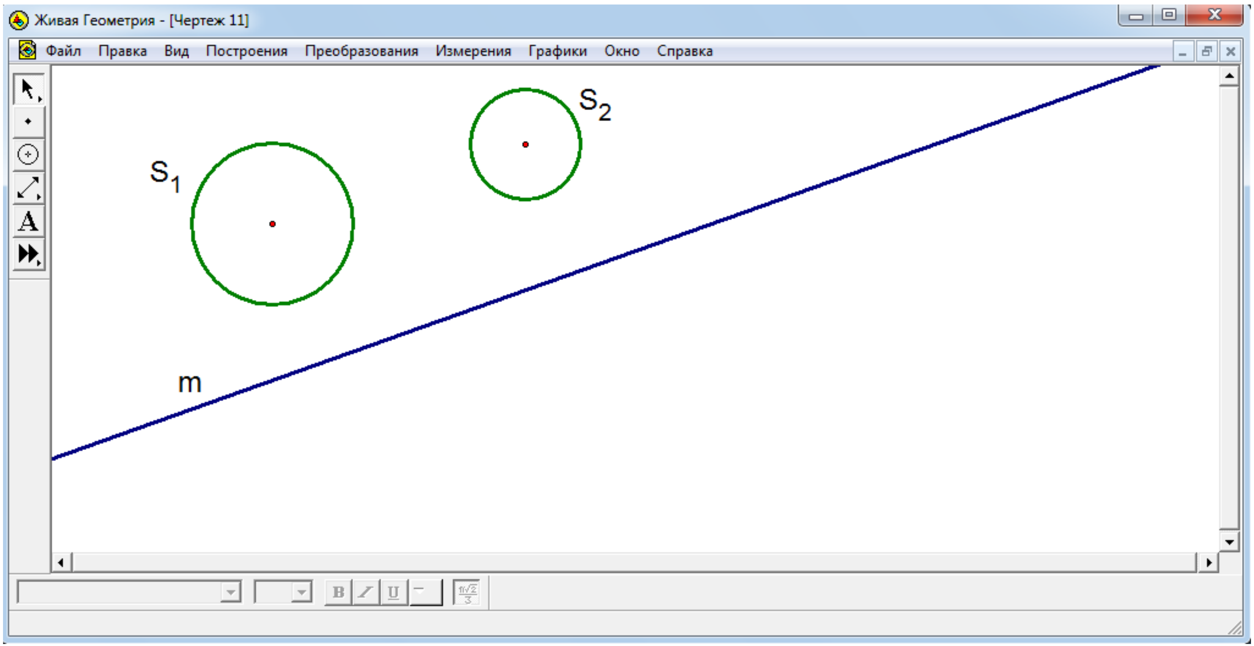

Рис. 20

Предположим, что точка M – искомая точка, тогда касательные t и p, походящие через точку M образуют с прямой равные углы (рис. 20.1).

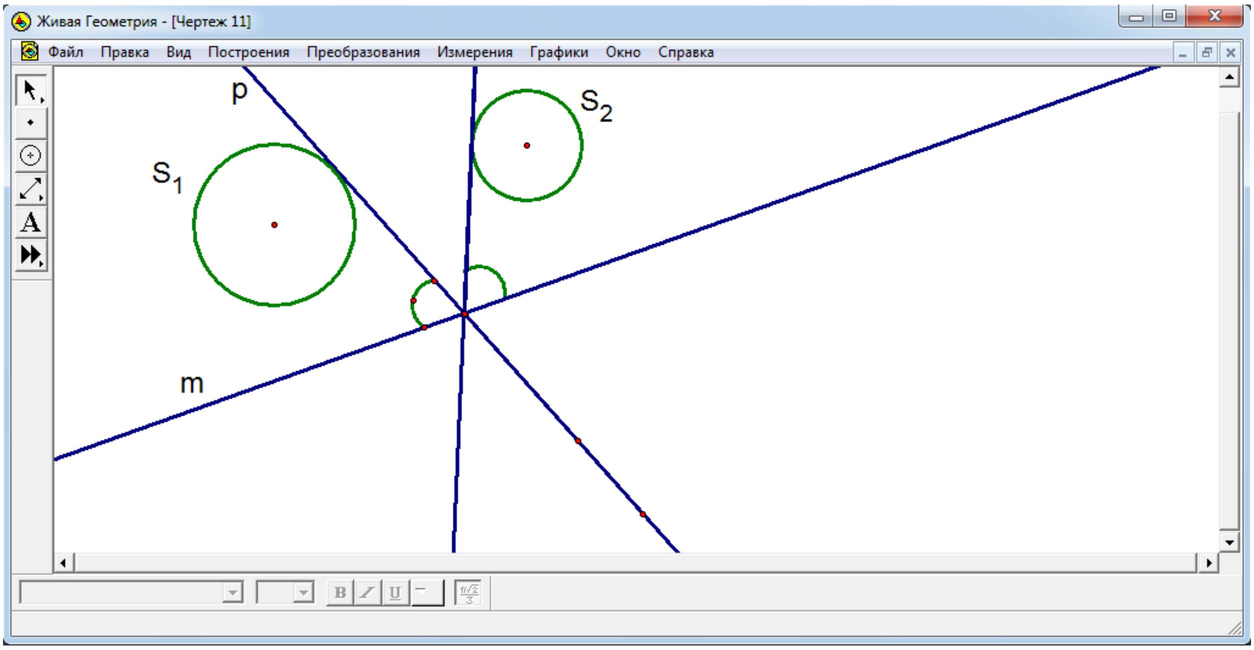

Рис. 20.1

Очевидно, что прямая m – ось симметрии прямых t и p, поэтому, если окружность S симметрична S_2 относительно прямой m, то прямая t касается S. Таким образом, для нахождения искомой точки, достаточно построить общую касательную к окружностям S_1 и S (рис. 20.2).

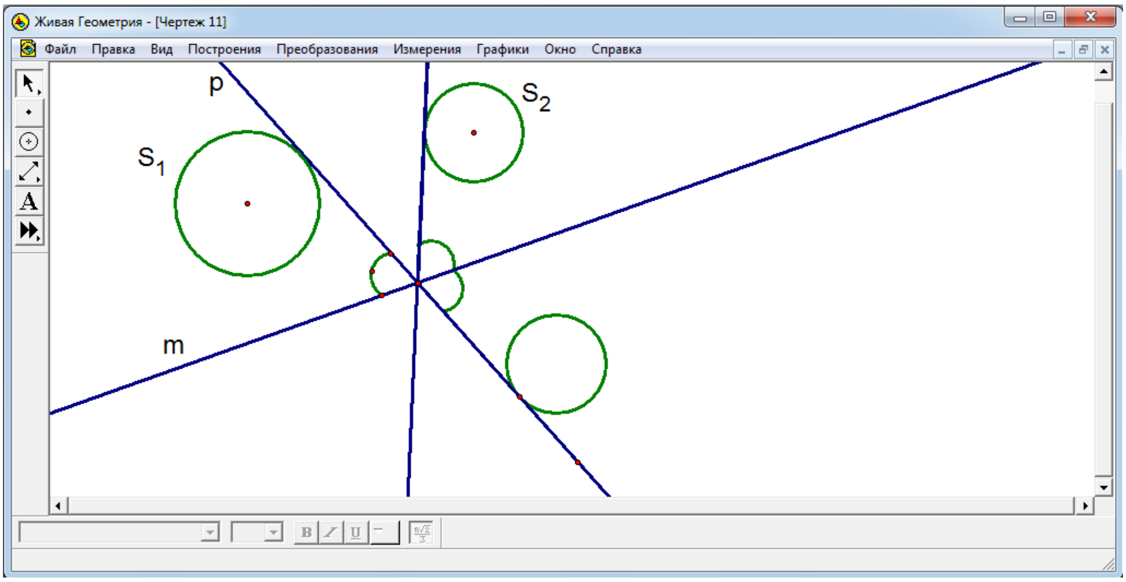

Рис. 20.2

Построение

1) Построить окружность S, симметричную окружности S_2 относительно прямой m.
2) Провести общую касательную p для окружностей S и S_1.
3) Построить прямую t, симметричную прямой p, относительно прямой m.
4) Точка M – точка пересечения прямых p и t.

Учитывая, что две окружности имеют четыре общих касательных, можно сделать вывод, что задача имеет четыре разных решения: два решения M_1 и M_2 в том случае, если касательные внешние (рис. 20.3) и два решения M_3 и M_4, если касательные внутренние (рис. 20.4).

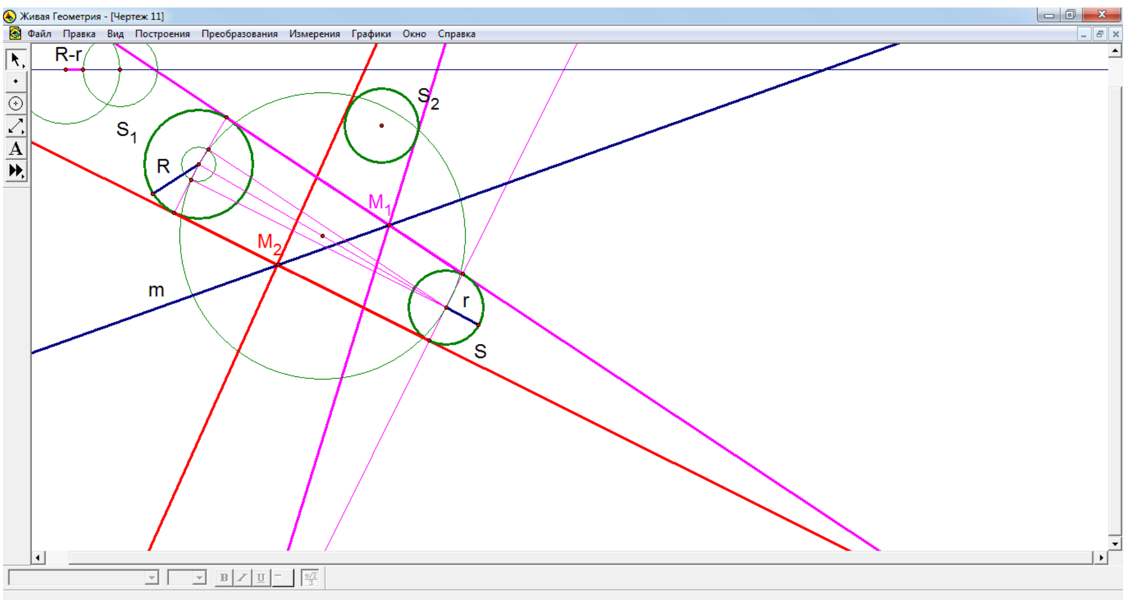

Рис. 20.3

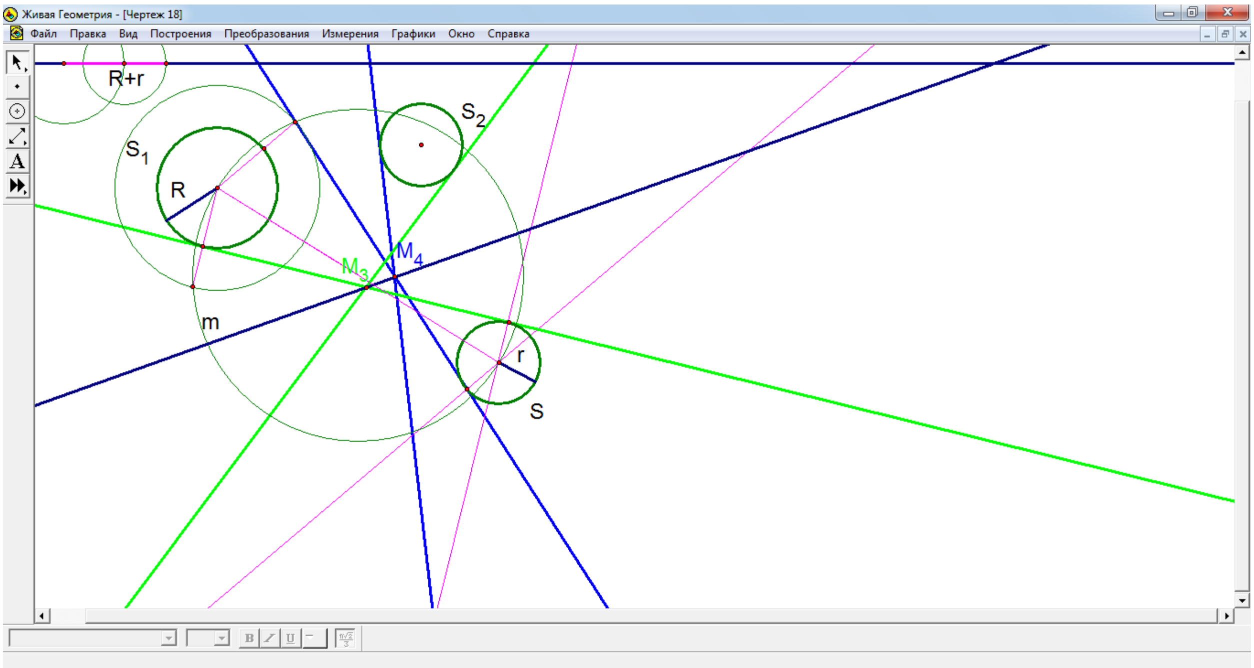

Рис. 20.4

Задача 2

Построить ромб так, чтобы одна из его диагоналей была равна данному отрезку *r* и лежала на данной прямой *a*, а остальные две вершины ромба лежали соответственно на данных прямых *b* и *c* (рис. 21).

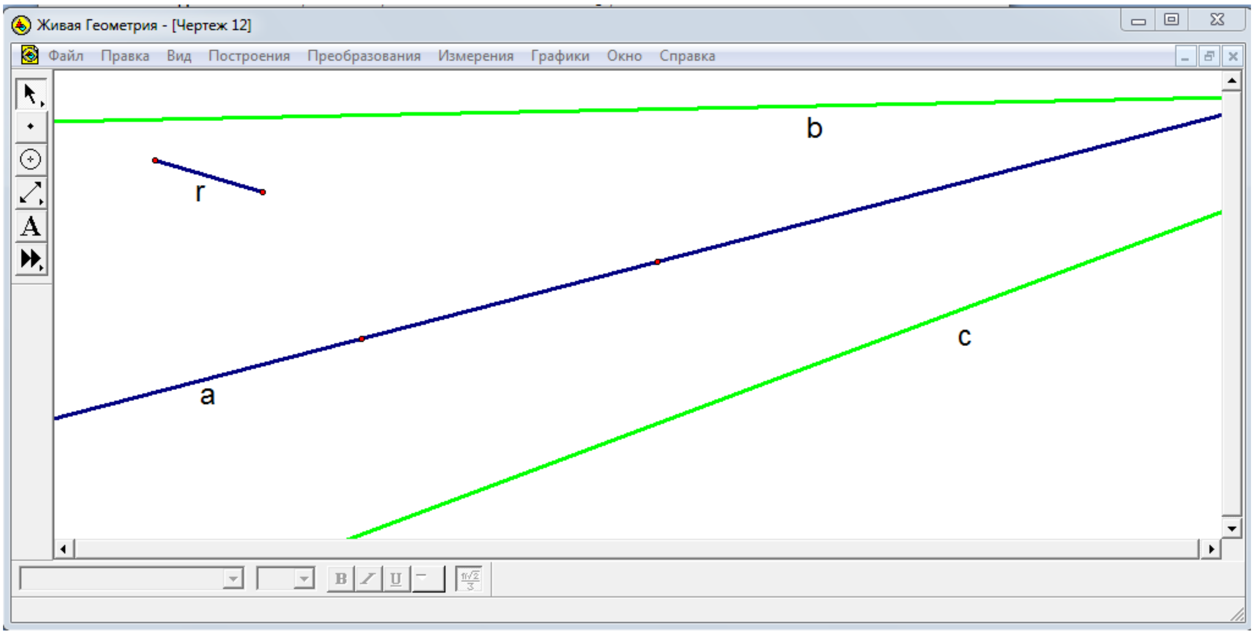

Рис.21

Предположим, что *ABCD* – искомый ромб (рис. 21.1). Очевидно, что точка *D* симметрична точке *B* относительно прямой *a*, и для построения ромба, нам достаточно найти одну из этих точек. Прямая *b* при симметрии относительно прямой *a* переходит в пямую b_1 проходящую через точку *D*, которая лежит на прямой c. Следовательно, точка D находится как точка пересечения прямых b_1 и c.

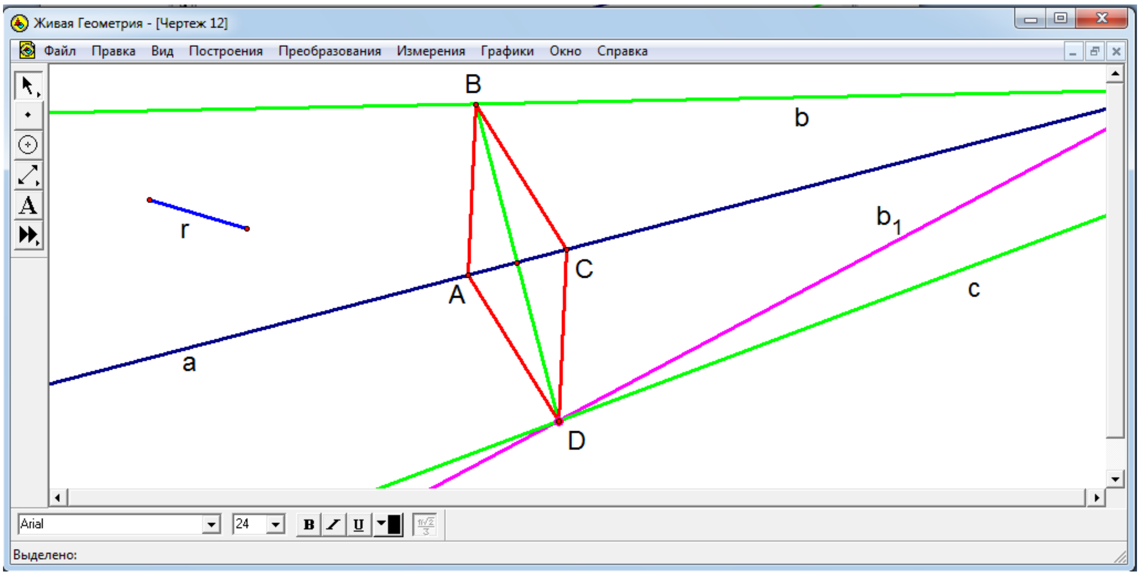

Рис. 21.1

Построение (рис. 21.2)

1) Построить прямую b_1, симметричную прямой b относительно a.
2) Отметить точку D как точку пересечения прямых b_1 и c.
3) Построить точку B, симметричную точке D относительно прямой a.
4) Найти отрезок, равный половине задонного отрезка r.
5) Построить окружность с центром в точке пересечения прямой a и отрезка B D и радиусом, равным половине отрезка r.
6) Отметить точки A и C как точки пересечения окружности и прямой a.
7) Построить ромб ABC.

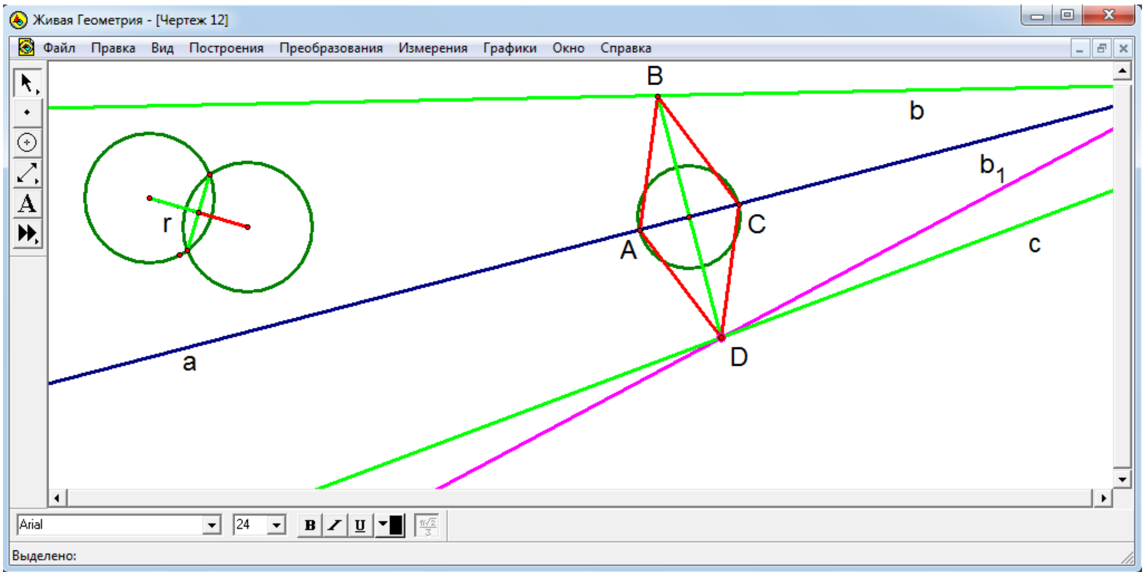

Рис. 21.2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной работе представлены основы и результаты исследования возможности применения программы «Живая геометрия» при изучении темы «Движение плоскости».

В ходе работы получены следующие результаты:

- на основе изучения методической литературы сформулированы особенности изучения темы «Движение», составлены методические рекомендации к решению задач на построение;
- в результате исследования основных современных учебников геометрии составлена таблица, в которой представлены особенности изложения материала по данной теме у разных авторов;
- при знакомстве с программой «Живая геометрия» обозначены ее основные возможности, описаны назначения основных инструментов и команд;
- в результате исследования свойств геометрических преобразований с помощью программы «Живая геометрия» получены алгоритмы построения частных случаев движения двумя способами, а именно, при помощи инструментов «циркуль» и «линейка», и при помощи меню «преобразования». Кроме того рассмотрены и проиллюстрированы основные свойства каждого преобразования.
- в ходе решения задач на построение выделены особенности каждого этапа при использовании программы «Живая геометрия». Рассмотрены 8 задач на построение методом геометрических преобразований, проиллюстрированы их решения в данной программе.

На основе полученных в ходе исследования результатов, можно сделать следующие выводы:

- простая техника работы в программе «Живая геометрия» позволяет усваивать свойства и особенности геометрических объектов и преобразований не догматически, а экспериментально, что позволяет сделать процесс обучения интересным и наглядным, развивает творческую деятельность учащихся, их абстрактное и логическое мышление, повышает их графическую культуру, облегчает восприятие изучаемого материала;

- разумное использование программы дает несомненные преимущества по сравнению с традиционным стилем преподавания геометрии, поэтому данная работа может быть использована учителями общей школы на уроках геометрии при изучении темы «Движение плоскости».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. «Совершенствование методики работы учителя математики» Я.И.Груденев «Просвещение» 1990г.
2. Адлер А. Теория геометрических построений. Ленинград: Учпедгиз, 1940. 232 с.
3. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение с решениями: Пособие для учителей средней школы. Изд.19-е, М: Учпедгиз, 1954. 175 с.
4. Аргунов Б.И., Балк М.Б. Геометрические построения на плоскости. М., 1957, 266 с.
5. Аргунов Б.И., Демидова И.Н., Литвиненко В.Н. Задачник-практикум по геометрии. - Ч. I. - М.: Изд-во МГЗПИ - 1979. - 127 с.: ил.
6. Атанасян Л.С. Геометрия 7 – 9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 19-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 384 с.
7. Блинко в А. Д., Блинко в Ю . А. Б69 Геометрические задачи на построение.— М.: МЦНМО, 2010.—152 с
8. Геометрические преобразования и фрактальная геометрия: учебник / Г. Г. Шеремет. - Пермь : Пермский гос. гуманитар.-пед. ун-т, 2013. - 188 с.
9. Геометрия: Планиметрия: 7-9 кл.: учебник и задачник / А. П. Кисилев, Н.А. Рыбкин. – М.: Дрофа, 1995.
10. Геометрия: учеб. для 7-9 кл. общеобразовательных учреждений / А. В. Погорелов. – М.: Просвещение, 2004
11. Геометрия: учеб. для 7-9 кл. сред. шк. / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 1992.
12. Геометрия: учеб. для. 7—9 кл. /Шарыгин И. Ф. — М.: Дрофа, 1997. — 352 с.: ил.
13. Живая геометрия. Учебно-методическое пособие / Под ред. Шабат Г.Б. – М.: Институт новых технологий образования, 2001. – 239 с.

14. Заславский А.А. Геометрические преобразования.—М.:МЦНМО, 2004.—86 с. 2-е изд., стереотипное.
15. Зив Б.Г. Задачи по геометрии для 7 – 11 классов: уч. пособие / Б.Г. Зив, В.М. Мейлер, А.Г. Баханский. – М.: Просвещение, 2013. – 171 с.
16. Интерактивная математика: 5-9 класс [Электронный ресурс]: Электронное учебное пособие для основной школы под ред. Дорофеева. 12 виртуальных лабораторий. - М.: Дрофа, 2002.
17. Капленко Э.Ф. Сборник задач по геометрии. Часть III. Геометрические преобразования плоскости. Метод преобразований решения геометрических задач: учебное пособие / Э.Ф. Капленко, С.Г. Маркова. – Воронеж: ВГПУ, 2010. – 80 с.
18. Мисюркеев, И.В. Геометрические построения. Пособие для учителей / И.В.Мисюркеев. – М: Учпедгиз, 1950.
19. Перепелкин, Д.И. Геометрические построения в средней школе / Д.И. Перепелкин. – М.: Издательство академии педагогических наук РСФСР,1947.
20. Пестерева В.Л. Методика обучения и воспитания (математика): учеб. пособие для организации самостоят. раб. студентов заоч. отд. мат. фак. высш. учеб. заведений, обучающихся по наравлению 44.03.01.62 «Пед. образование», профиль «Математика» / В.Л. Пестерева, И.Н. Власова; Перм. гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2015. – 163 с.
21. Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 2 т.—Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. — М.: МЦНМО, 2004.— 312 с.: ил.
22. Примерная основная образовательная программа образовательного учреждения. Основная школа. Стандарты второго поколения. – М, Просвещение, 2011
23. Примерная программа общеобразовательных учреждений по геометрии 7–9 классы, к учебному комплексу для 7-9 классов. /Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.В. Кадомцев и др., составитель Т.А. Бурмистрова – М: «Просвещение», 2008.

24. Федеральный государственный стандарт основного общего образования, утвержденный приказом Министерства образования и науки РФ от 17.12.2010 №1897
25. Центр оценки качества образования [Электронный ресурс] / Министерство образования и науки РФ ИСРО РАО – Режим доступа: http://www.centeroko.ru
26. Электронные учебники. Математика. [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://www.curator.ru/e-books/m9.html
27. Элементарная геометрия: В 2 т. — Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. — М.: МЦНМО, 2004.— 312 с.
28. Яглом И.М. Геометрические преобразования. Ч.I / И.М.Яглом. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, 1955. – 282 с. – (Библиотека математического кружка).