

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра высшей математики

Выпускная квалификационная работа

**ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАНИЯ
ПО ПЛАНИМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДЫ «ЖИВАЯ ГЕОМЕТРИЯ»**

Работу выполнил:
студент группы Z151
направления подготовки 44.03.01
Педагогическое образование,
профиль «Математика»
Соснин Никита Валерьевич

«Допущена к защите»

Зав. кафедрой:

подпись

«_____» _____ 2017 г.

подпись

Руководитель:
кандидат физ.-мат. наук, доцент
Ананьева Миляуша Сабитовна

подпись

ПЕРМЬ
2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ.....	5
1.1. Сведения о геометрических компьютерных программах.....	5
1.2. Инструменты «Живой геометрии».....	6
1.3. Элементарные построения в «Живой геометрии».....	8
1.4. Построения к исследовательским заданиям в среде «Живая Геометрия»	13
1.5. Инверсия плоскости.....	18
1.6. Исследовательские задания.....	20
ГЛАВА 2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА МОДЕЛИ ПУАНКАРЕ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО.....	26
2.1. Понятие о геометрии Лобачевского.....	26
2.2.. Биографические сведения о создателях.....	27
2.3. Модель Пуанкаре в евклидовой полуплоскости.....	28
2.4. Аксиомы на модели Пуанкаре.....	30
2.5. Элементарные построения и преобразования плоскости на модели Пуанкаре.....	38
2.6. Исследовательские задания.....	55
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	70
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	71

ВВЕДЕНИЕ

Геометрия – это наука, изучающая формы, размеры и взаимное расположение фигур. Поэтому при ее изучении необходимо тщательно выполнять чертеж. Построение сложного геометрического чертежа с помощью классических чертежных инструментов требует аккуратности, много сил и времени. От этого у обучающихся часто возникают проблемы с задачами на геометрические построения. Ее решение – построение фигур – можно упростить с помощью компьютера. Например, программа «Живая геометрия» («Живая математика») предоставляет для этого необходимую базу: создание точных графиков и чертежей, измерение углов, площадей, длин.

Объектом исследования является процесс обучения планиметрии Лобачевского студентов педагогического вуза.

Предмет исследования – исследовательские задания в программной среде «Живая геометрия» при обучении решению элементарных задач на модели Пуанкаре планиметрии Лобачевского.

Цель выпускной квалификационной работы – рассмотреть исследовательские задания по планиметрии Лобачевского в программной среде «Живая геометрия».

В связи с этим необходимо было решить следующие задачи:

- 1) проанализировать возможности применения программной среды «Живая геометрия»;
- 2) проанализировать необходимую литературу по планиметрии Лобачевского;
- 3) рассмотреть ряд задач на модели Пуанкаре;
- 4) разработать алгоритм (рекомендации) их решения в программной среде «Живая геометрия».

Работа состоит из введения, двух глав, заключения и библиографического списка использованной литературы.

Во введении рассмотрена актуальность работы, сформулированы объект и предмет исследования, цель и задачи выпускной квалификационной работы, приведены структура и характеристика структурных частей.

В первой главе рассмотрены построения и преобразования в евклидовой плоскости.

Вторая глава посвящена построениям и преобразованиям в плоскости Лобачевского на модели Пуанкаре и соответствующим исследовательским заданиям.

В заключении подведены итоги работы: перечислены результаты исследования и сформулированы следующие из них выводы.

ГЛАВА 1

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

1.1. Сведения о геометрических компьютерных программах

Программная среда, с помощью которой можно делать геометрические построения на компьютере так, что при движении первоначальных объектов, весь чертеж сохраняется, называется *динамической геометрией*.

Идея динамической геометрии насчитывает уже около 30 лет. Работа началась в 80-х годах XX в. с проекта Cabri (CAhier de BRouillon Informatique), который предполагал создание среды для работы с объектами дискретной математики (графами, булевыми функциями). В конце 80-х в США появилась программа «The Geometer's Sketchpad». После этого появились десятки систем динамической геометрии. Наиболее известные из них:

- Cinderella (автор U. Kortenkamp),
- Математический Конструктор (от 1С),
- GEONExT (автор A. Wassermann),
- «The Geometer's Sketchpad» (русифицированная версия «Живая геометрия», «Живая математика», Ин-т Новых Технологий),
- программная среда Compass and Ruler (C.a.R) (автор R. Grothmann),
- GeoGebra (автор Marcus Hohenwater, 2002)
- и др.

В настоящее время таких программ насчитывается более 40. Из них существует пять видов компьютерных программ по геометрии:

- GeoGebra;

- «Живая геометрия»;
- Wingeom;
- Poly;
- Geometric Constructions.

Три из них: GeoGebra, C.a.R, «Живая геометрия (математика)» относятся к категории свободно распространяемых.

Чертеж, созданный в такой среде, – это модель, которая сохраняет результат построения, исходные данные и алгоритм, и позволяет изменить все данные (значения числовых данных, перемещать точки, варьировать длины отрезков и т.д.), и результат этих изменений сразу отразится на экране компьютера. Работу с динамическим чертежом может проводить как учитель, так и ученик непосредственно в процессе построения или после его окончания. Таким образом, в процессе обучения через такой чертеж можно организовать взаимодействие между учеником и учителем

Динамические программы могут использоваться на уроках в школе, занятиях в вузе, дома при подготовке домашних заданий или при работе по индивидуальной программе развития. Также они показывают, как современные технологии эффективно применяются для моделирования и визуализации математических понятий. Программы позволяют выполнять чертежи различной сложности в короткое время, к тому же такие чертежи обладают более высокой точностью. Но в то же время растет нагрузка на зрение и существует вероятность, что ученики будут не в состоянии выполнить данные построение без помощи компьютерных программ.

1.2. Инструменты «Живой геометрии»

Для изучения геометрических объектов и их свойств создана программная среда «Живая геометрия» (далее – ЖГ), которая не только создает

интерактивные чертежи, а также выполнять различные измерения. позволяет Кроме того, она лучше развивает понимание при формулировании теорем и последующего их доказательства

Использование программы «Живая геометрия» позволяет сделать процесс обучения геометрии интересным и наглядным, развивая творческую деятельность обучающихся, их абстрактное и логическое мышление.

Перечислим основные инструменты для работы в среде

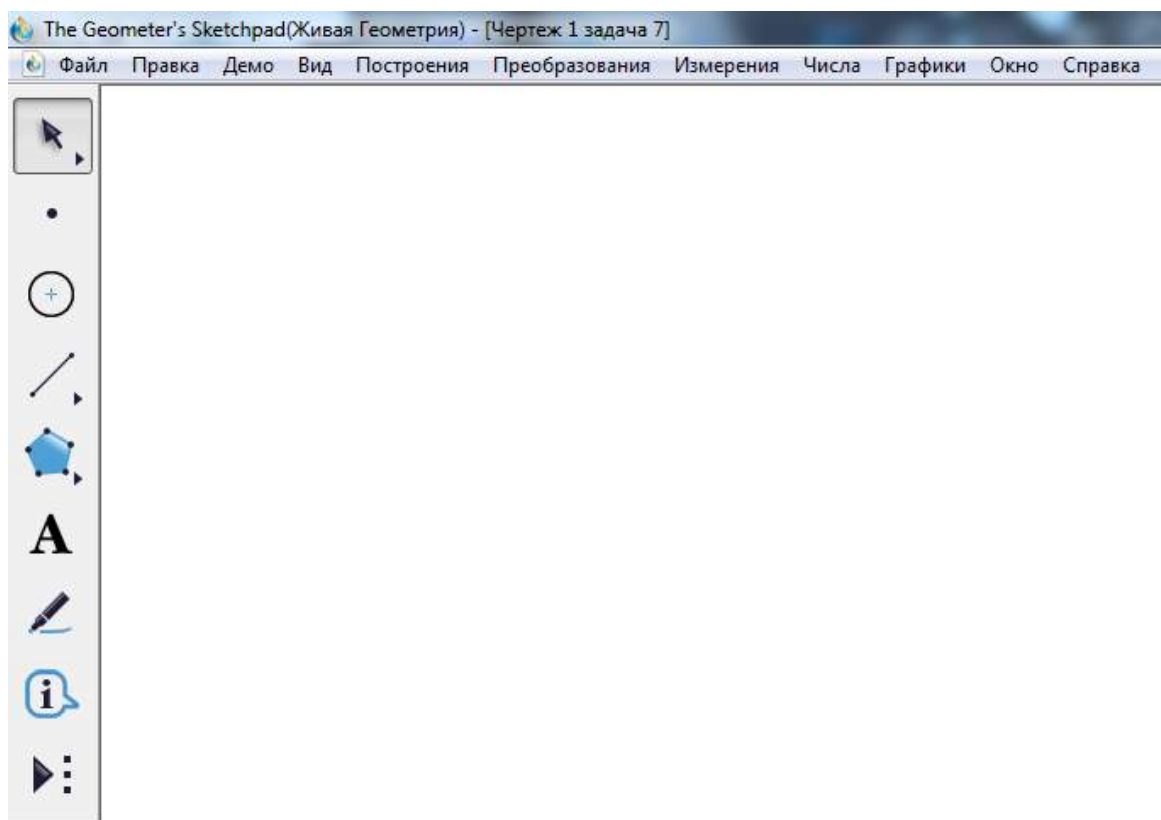


Рис.1. Меню ЖГ

При запуске среды (рис.1) в левой части экрана появляется вертикальная панель, содержащая набор компьютерных инструментов для выделения или построения геометрических объектов.

В верхней части экрана по горизонтали расположено меню. Для действий с геометрическими объектами предназначены такие пункты меню, как «Построения», «Преобразование», «Измерения». Иногда требуется

изменение цвета объектов и толщины линии. Для этого надо зайти в пункт меню «Вид».

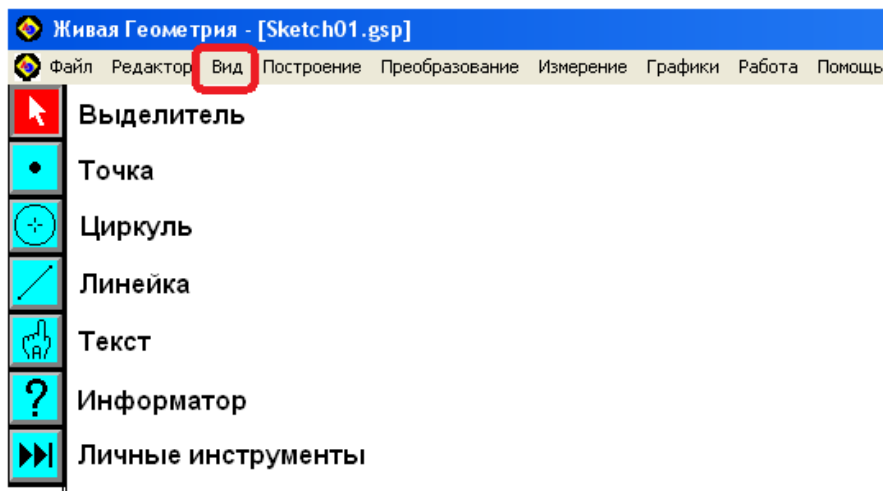


Рис.2. Инструменты ЖГ (Меню: Вид)

1.3. Элементарные построения в «Живой геометрии»

1.3.1. Построение точки

- 1)левой клавишей мыши нажать на инструмент «Точка»;
 - 2) щелкнуть на экране в том месте, где надо поставить точку.
- В указанном месте появится точка (рис. 3).

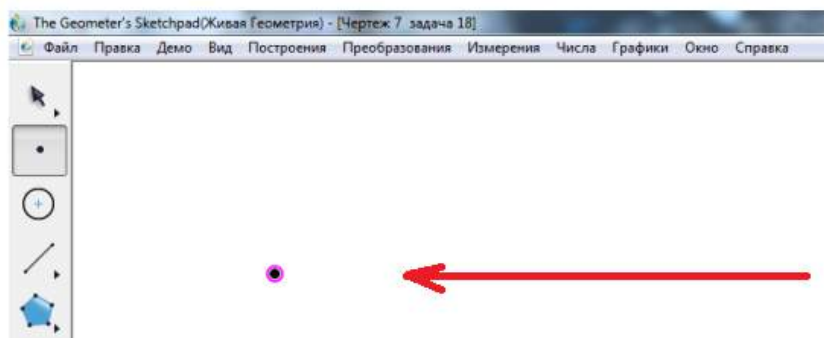


Рис.3. Точка

1.3.2. Построение отрезка

- 1) Нажать левой клавишей мыши на инструмент «Линейка»;
 - 2) щелкнуть на экране там, где должен начинаться отрезок;
 - 3) провести курсор по экрану, удерживая левую клавишу мыши;
 - 4) отпустить клавишу там, где отрезок должен закончиться.
- В указанном вами месте появится отрезок (рис. 4).

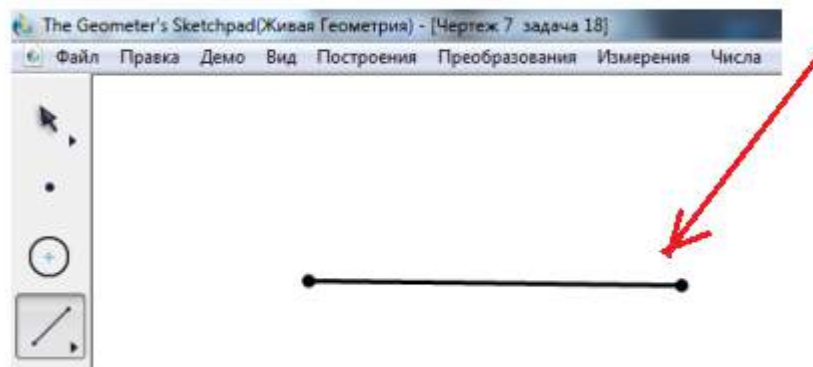


Рис.4. Отрезок

1.3.3. Выделение объекта

- 1) Нажать левой клавишей мыши на инструмент «Стрелка»;
- 2) щелкнуть по объекту на экране (можно выделить несколько объектов по очереди).
- 3) для снятия всех выделений надо щелкнуть левой клавишей мыши по пустому месту экрана.

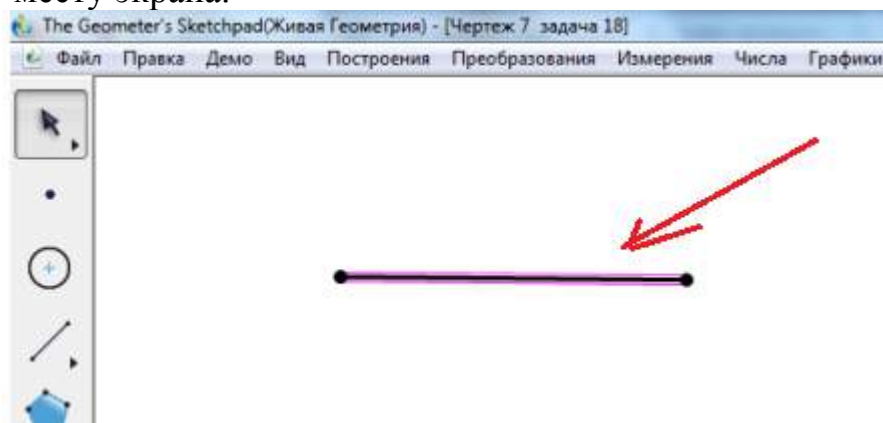


Рис.5. Выделенный отрезок

1.3.4. Построение окружности

Способ 1 (по центру и точке окружности):

- 1) левой клавишей мыши нажать на инструмент «Циркуль»;
- 2) щелкнуть клавишу на экране (центр окружности);
- 3) провести курсор по экрану, удерживая левую клавишу мыши;
- 4) отпустить клавишу (точка окружности).

В указанном месте появится окружность (рис. 6), центр которой будет там, где вы нажали клавишу (п. 2), а точка на окружности – там, где вы отпустили клавишу (п.4).

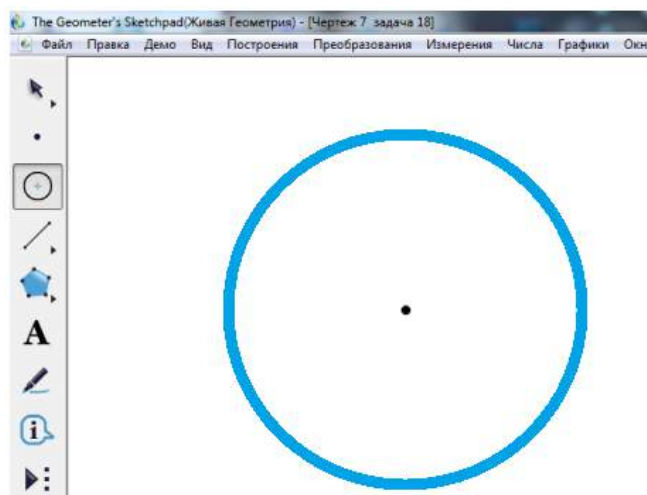


Рис.6. Окружность (способ 1)

Способ 2 (по центру и радиусу):

- 1) Выделить точку;
- 2) выделить отрезок без концов;
- 3) в пункте меню «Построения» воспользоваться командой «Окружность по центру и радиусу».

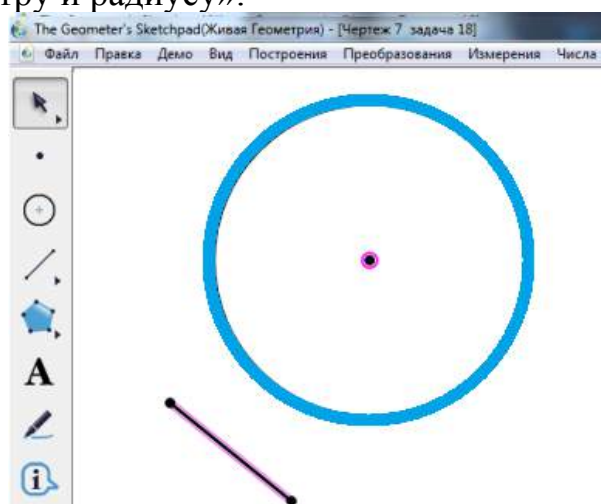


Рис.7. Окружность (способ 2)

В указанном месте появится окружность (рис. 7) с центром в выделенной точке и радиусом, равным выделенному отрезку.

1.3.5. Построение луча

- 1)левой клавишей мыши нажать на инструмент «Линейка»;
- 2) нажать на инструмент «Линейка» еще раз;
- 3) не отпуская клавишу, перевести в положение с изображением луча;
- 4) щелкнуть левой клавишей мыши на экране;
- 5) провести курсор по экрану, удерживая клавишу;
- 6) отпустить клавишу.

В указанном вами месте появится луч (рис. 8), начало которого будет там, где нажали клавишу (п.2), а точка на луче – там, где клавишу отпустили (п.6).

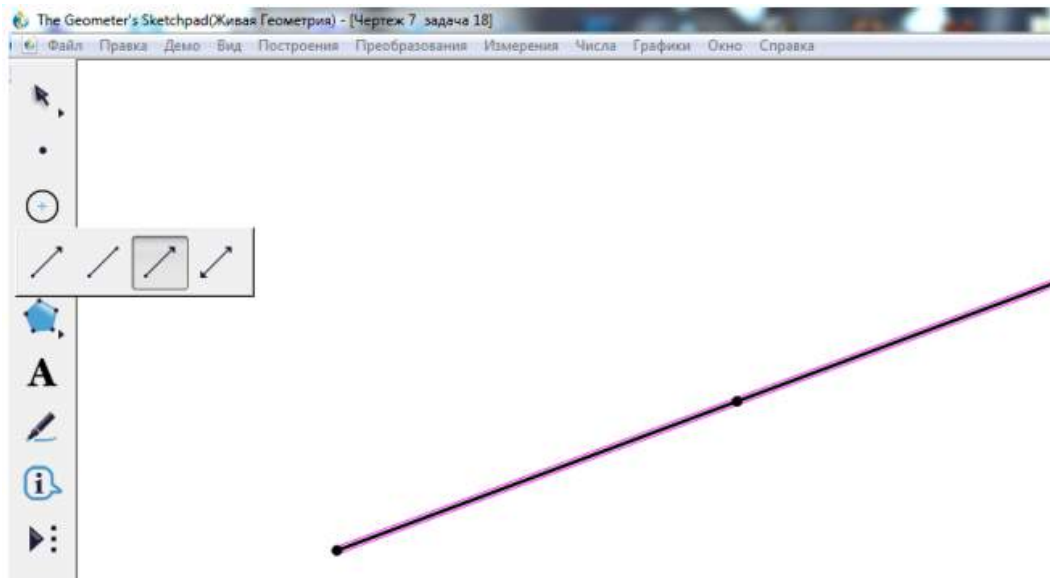


Рис.8. Луч

7) убрать лишнюю точку на луче с помощью инструмента «Стрелка»: выделить мышью вспомогательную точку и в меню «Вид» воспользоваться командой «Спрятать точки».

1.3.6. Построение прямой

- 1) левой клавишей мыши нажать на инструмент «Линейка»;
- 2) нажать на инструмент «Линейка» еще раз;
- 3) не отпуская клавишу, перевести в положение с изображением прямой;
- 4) щелкнуть левой клавишей мыши на экране;
- 5) провести курсор по экрану, удерживая левую клавишу мыши;
- 6) отпустить клавишу.

В указанном месте появится прямая, одна точка, которой будет там, где нажали клавишу (п.2), а другая точка – там, где отпустили клавишу (п.6).

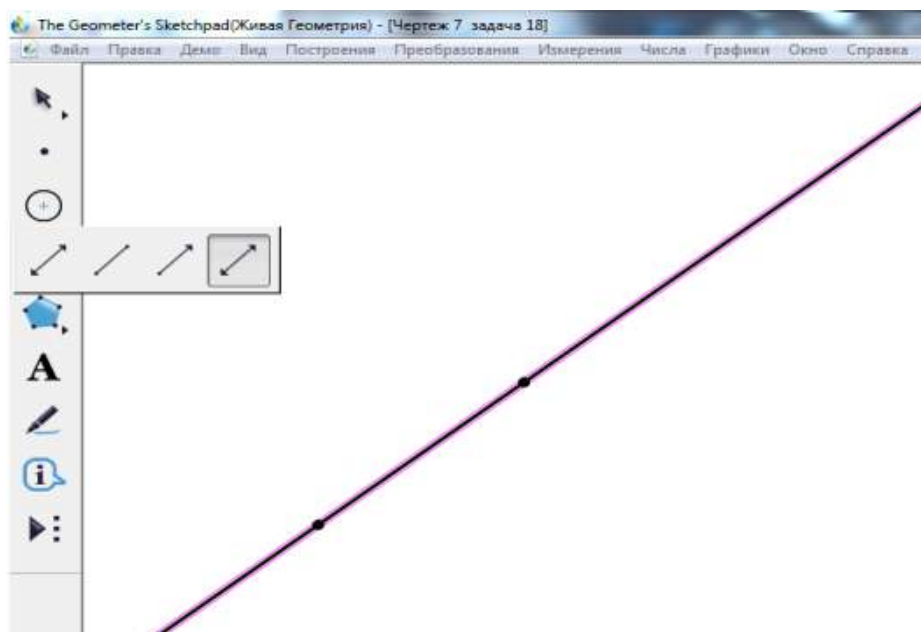


Рис.9. Прямая

7) убрать лишнюю точку на луче с помощью инструмента «Стрелка»: выделить мышью вспомогательную точку и в меню «Вид» воспользоваться командой «Спрятать точки».

1.3.7. Построение угла

1) Построить два луча с началом в одной точке (п. 1.3.5).

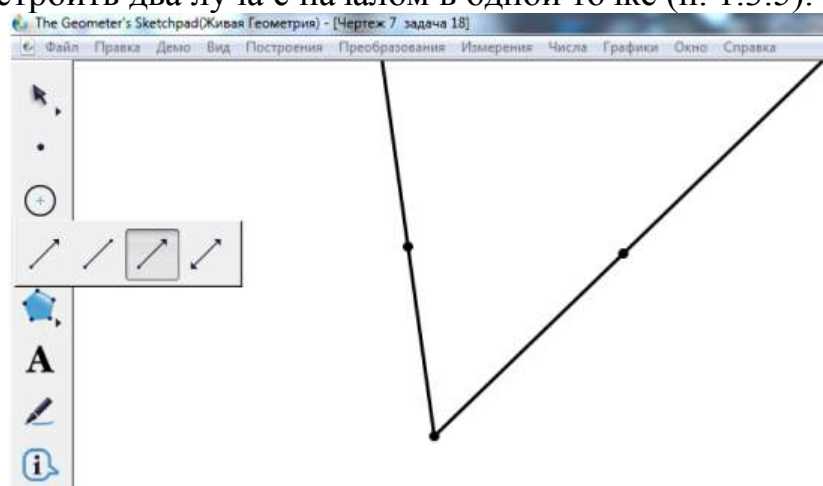


Рис.10. Угол

1.4. Построения к исследовательским заданиям в среде «Живая Геометрия»

1.4.1. Построение биссектрисы угла:

- 1) Выделить точку на одной стороне угла, вершину угла и точку на другой стороне угла;
- 2) в меню «Построения» воспользоваться командой «Биссектриса» (рис. 11).

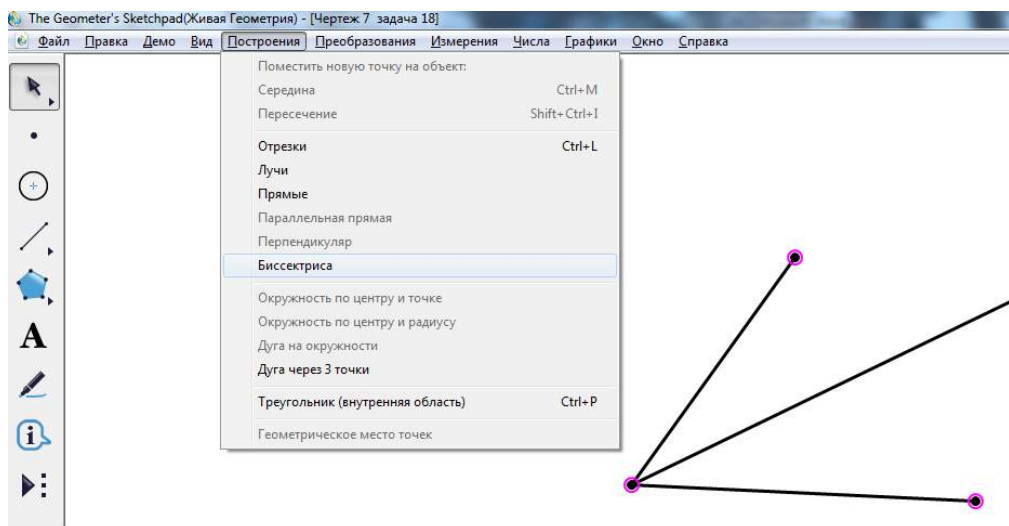


Рис.11. Биссектриса угла

1.4.2. Построение середины отрезка:

- 1) Выделить отрезок;
- 2) в меню «Построения» воспользоваться командой «Середина отрезка» (рис. 12).

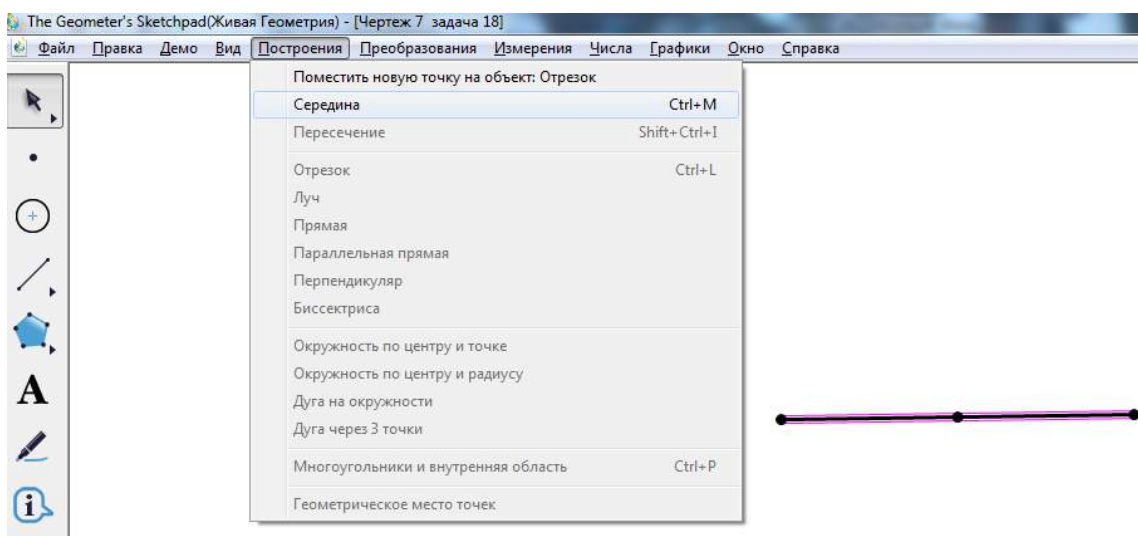


Рис.12. Середина отрезка

1.4.3. Построение пересечения фигур:

- 1) Выделить две фигуры,
 - 2) в меню «Построения» воспользоваться командой «Пересечение»
- (рис. 13).

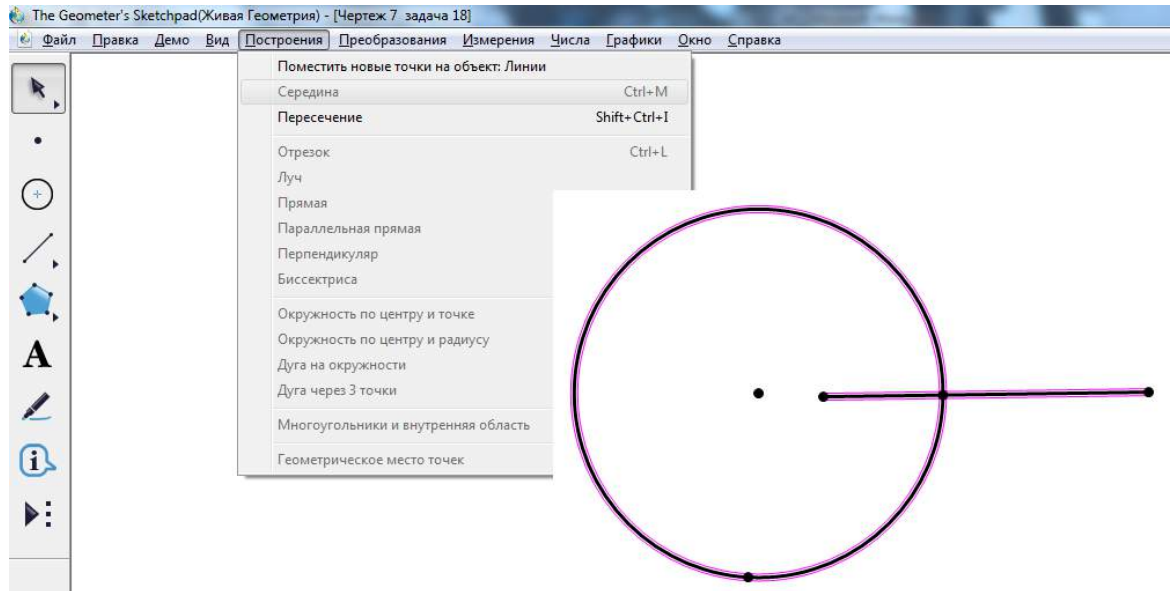


Рис.13. Пересечение фигур

1.4.4. Построение прямой, перпендикулярной данной:

- 1) Выделить точку и прямую,
 - 2) в меню «Построения» воспользоваться командой «Перпендикулярная прямая»
- (рис. 14).

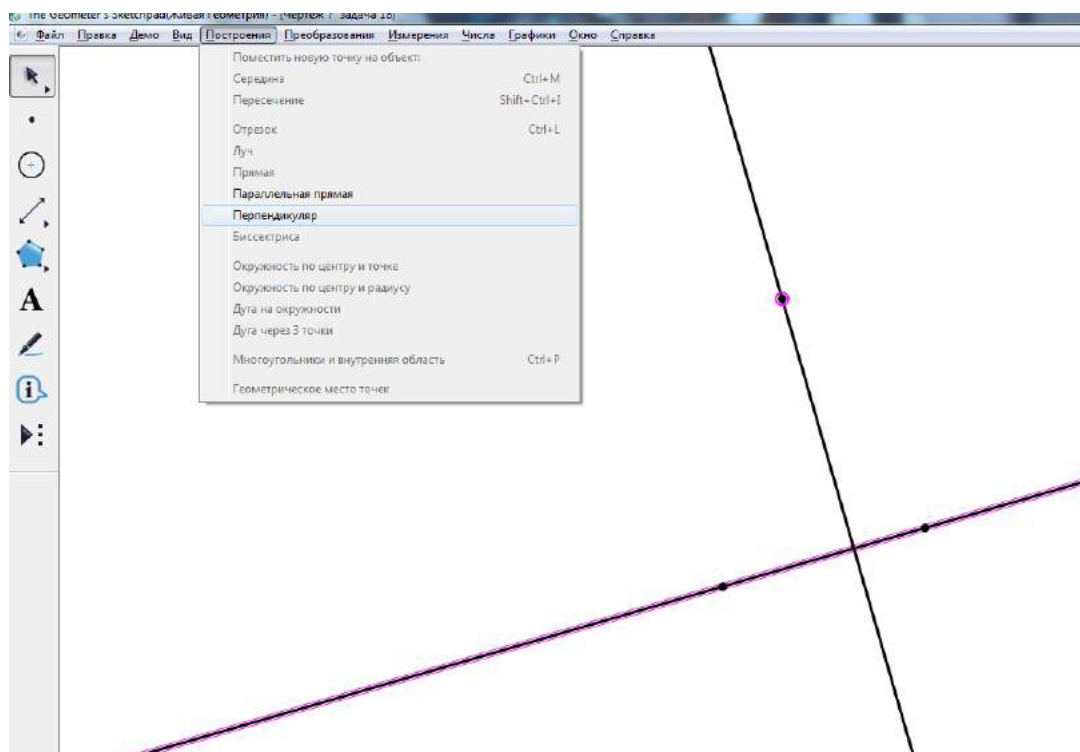
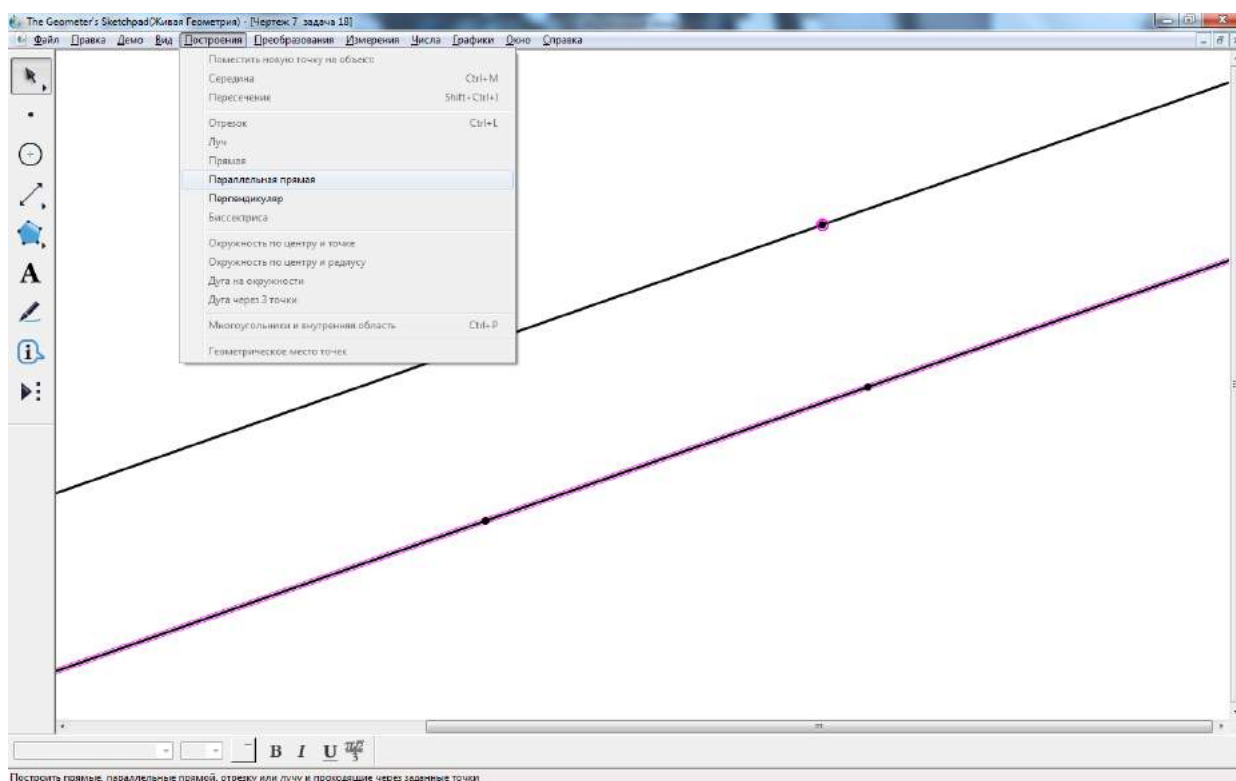


Рис.14. Перпендикулярные прямые

1.4.5. Построение прямой, перпендикулярной данной:

- 1) Выделить точку и прямую,
- 2) в меню «Построения» воспользоваться командой «Перпендикулярная прямая» (рис. 15).



1.4.6. Построение треугольника по трем сторонам, равным данным отрезкам a , b , c :

- 1) Построить отрезок AB , равный отрезку a ;
- 2) построить окружности $окр (A, R=b)$ и $окр (B, R=c)$;
- 3) отметить точку C пересечения окружностей;
- 4) построить отрезки AC и BC .

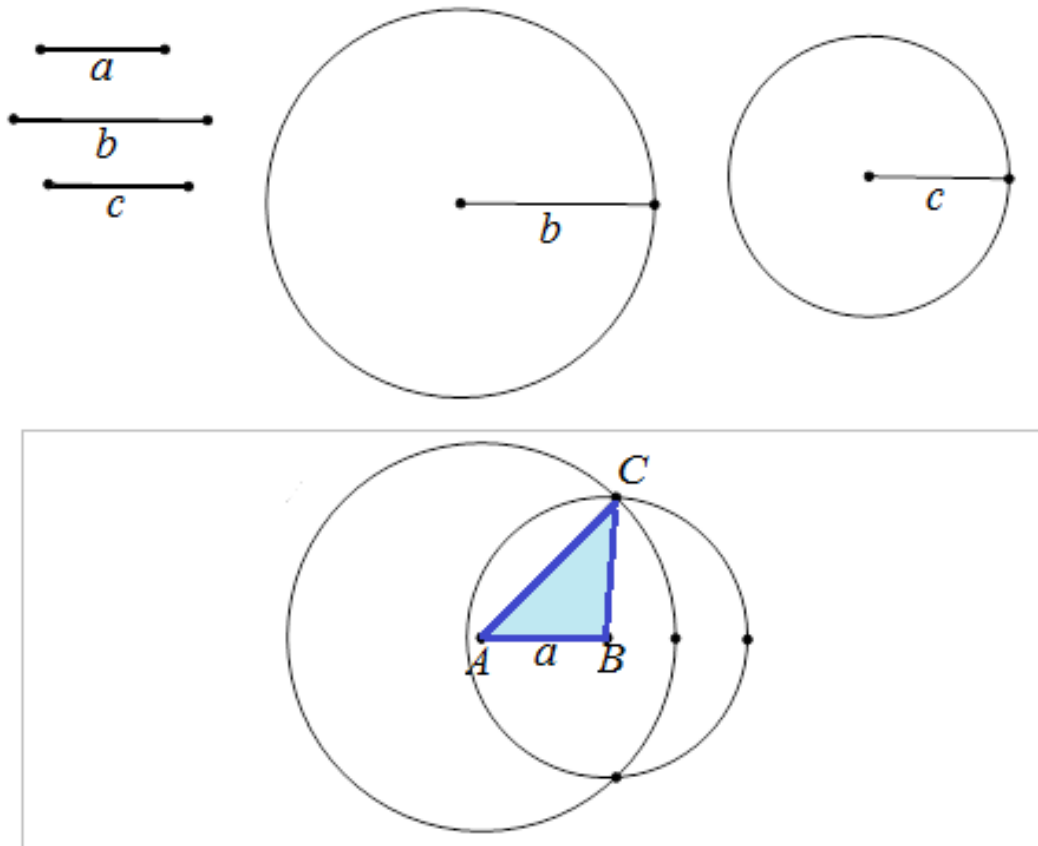


Рис.16. Треугольник

1.4.7. Построение касательной к окружности

Построим касательную к окружности через данную точку вне данного круга:

- 1) Построить отрезок, соединяющий центр O окружности и данную точку A ;
- 2) построить середину отрезка – точку B ;

- 3) построить окружность с центром в точке B и диаметром OA ;
 - 4) отметить точки пересечения окружностей (построенной и исходной) – точки касания C и D ;
 - 5) провести прямую через данную точку A и одну из точек касания.
- Эта прямая – искомая касательная (рис.17), таких прямых две AC и AD .

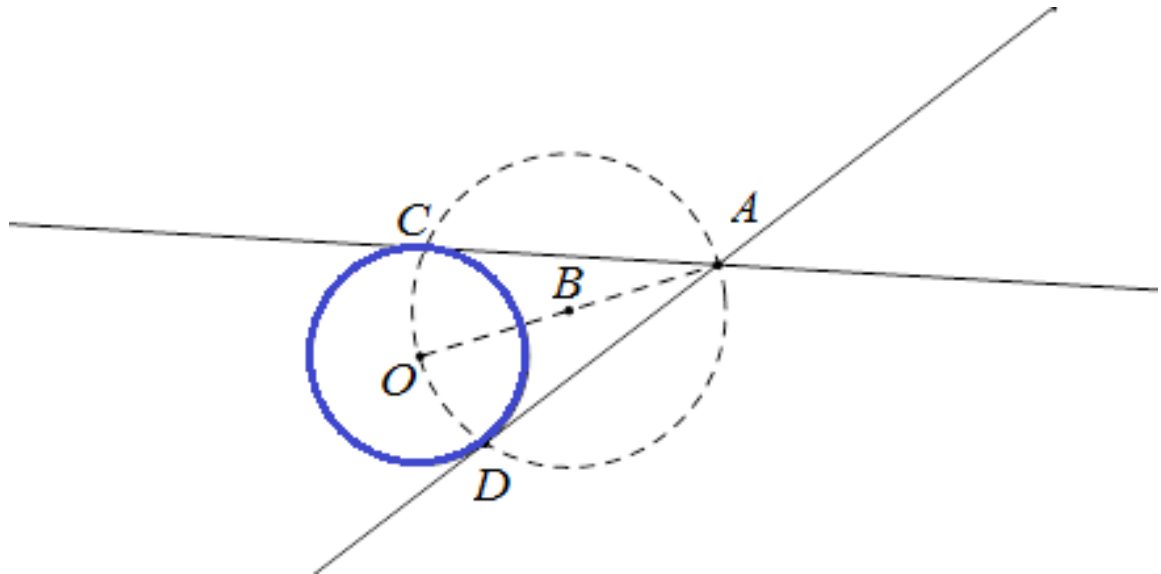


Рис.17. Касательная к окружности

Все рассмотренные построения будут необходимы при построении образов точек и фигур при инверсии (инверсия рассматривается на одной из моделей Пуанкаре). Приведем также основные теоретические сведения об инверсии и ее свойствах.

1.5. Инверсия плоскости

Определение 1.

Пусть в плоскости дана окружность с центром в точке O радиуса a . Точечное преобразование плоскости в себя, при котором каждой точке M ставится в соответствие точка M' , лежащая на луче OM и удовлетворяющая условию $OM \cdot OM' = a^2$, называется **инверсией** относительно данной окружности.

Окружность называется **окружностью инверсии** (основной или базисной), центр O окружности – **центром инверсии**, радиус окружности – **радиусом инверсии**, а квадрат радиуса a^2 – **степенью инверсии**.

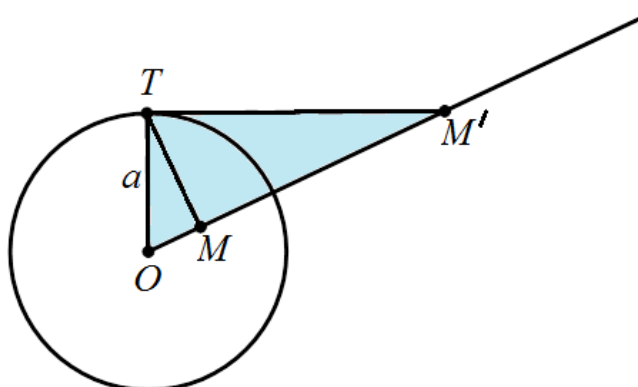


Рис.18. Инверсия точки относительно окружности

Точки M и M' , соответствующие друг другу в инверсии, а также две фигуры, соответствующие друг другу в инверсии, называются **взаимно обратными** относительно основной окружности.

Свойства:

1. Внутренние точки окружности инверсии преобразуются во внешние и наоборот; точки самой окружности инверсии остаются неподвижными, т.е. преобразуются сами в себя.
2. Преобразование, обратное для данной инверсии, есть также инверсия, т.е. если точка M переходит при инверсии в точку M' , то одновременно точка M' переходит в точку M .
3. Окружности, не проходящие через центр инверсии, преобразуются в окружности, не проходящие через центр инверсии.
4. Окружности, проходящие через центр инверсии, преобразуются в прямые, не проходящие через центр инверсии.
5. Прямые, не проходящие через центр инверсии, преобразуются в окружности, проходящие через центр инверсии.
6. Прямые, проходящие через центр инверсии, преобразуются сами в себя.

7. Прямые, не проходящие через центр инверсии, преобразуются в окружности, проходящие через центр инверсии, причем касательные к этой окружности в центре инверсии параллельны данным прямым.

8. Прямые, параллельные и не проходящие через центр инверсии, преобразуются в окружности, касающиеся друг друга в центре инверсии и обратно.

9. При инверсии угол между двумя кривыми в точке их пересечения сохраняется (как угол между касательными к ним в этой точке).

10. Как бы ни были расположены в плоскости две произвольные окружности, или окружность и прямая, или две параллельные прямые, всегда можно их преобразовать друг в друга при помощи инверсии, если к инверсии причислить его предельный случай – симметрию относительно прямой.

11. Всякую окружность (или прямую) можно при помощи инверсии преобразовать саму в себя так, чтобы две фиксированные точки этой окружности (или прямой) переходили друг в друга.

12. Ортогональные траектории *эллиптического пучка* окружностей, пересекающихся попарно в точках A и B , образуют *гиперболический пучок* окружностей, имеющий точки A и B предельными точками и прямую AB линией центров.

13. Ортогональные траектории *параболического пучка* окружностей образуют также параболический пучок окружностей с тем же центром пучка и линией центров, перпендикулярной к линии центров данного пучка.

14. Ортогональные траектории *гиперболического пучка* окружностей с предельными точками A и B образуют эллиптический пучок окружностей, попарно пересекающихся в точках A и B .

1.6. Исследовательские задания

Таким образом, мы рассмотрели основные построения на евклидовой плоскости, реализуемые в среде «Живая геометрия». Для организации исследовательской деятельности обучающихся с использованием компьютера, возможен следующий порядок действий [Лит]:

1. **Создание геометрической модели** сюжетной части задачи (предлагаемая задача не может быть взята «с потолка» – она либо отражает какую-то прикладную проблему, либо является развитием уже имеющихся результатов).

2. **Наводящие соображения** (геометрическая задача появляется в результате анализа прикладной ситуации. Формулировка геометрической задачи, самостоятельно найденная обучающимся, способствует более полному ее пониманию).

3. **Формулировка гипотезы** (прежде чем перейти к работе с компьютером, чрезвычайно полезно сделать предположение относительно ответа. Для этого ученикам предлагается мысленно представить ситуацию и предугадать возможный результат. Эти предположения могут возникнуть в результате правдоподобных рассуждений (у нас – наводящих соображений), как это советует делать Д. Пойа. Такими наводящими соображениями являются аналогия, разбор частных случаев, проверка обратного утверждения и т.д. В некоторых случаях к наводящим соображениям мы относим рекомендации по решению задачи. Результатом использования наводящих соображений может являться появление гипотезы относительно ответа на поставленный вопрос).

4. **Компьютерный эксперимент** (эксперимент либо опровергает возникшую гипотезу, либо корректирует её, либо подтверждает. Если гипотеза уже возникла после наводящих соображений, то компьютер выступает как средство ее проверки. Если же гипотеза не появилась, то компьютер выступает как средство ее генерирования).

5. **Поиск** альтернативного решения. Расширение задачи (обобщение, частные случаи).

Таким образом, мы рассмотрели основные построения на евклидовой плоскости, реализуемые в среде «Живая геометрия». Использование компьютера в геометрии особенно эффективно:

- 1) для поиска и конструирования объекта, удовлетворяющего условию;
- 2) для наблюдения за изменяющимися геометрическими объектами, за величинами, с ними связанными.

Пример

Задание (Передача информации)

Информацию из одной точки надо передать лучом лазера в другую точку, причем напрямую это сделать не возможно. Физик использует для этого систему из двух плоских зеркал, расположенных под острым углом, от которых должен отразиться луч лазера. Куда направить этот луч?

Геометрическая формулировка

Внутри данного острого угла заданы две точки L и T . Постройте ломаную $LABT$, такую, что точки A и B лежат на разных сторонах угла и при этом звенья ломаной образуют равные углы с лучами OA и OB (рис. 20).

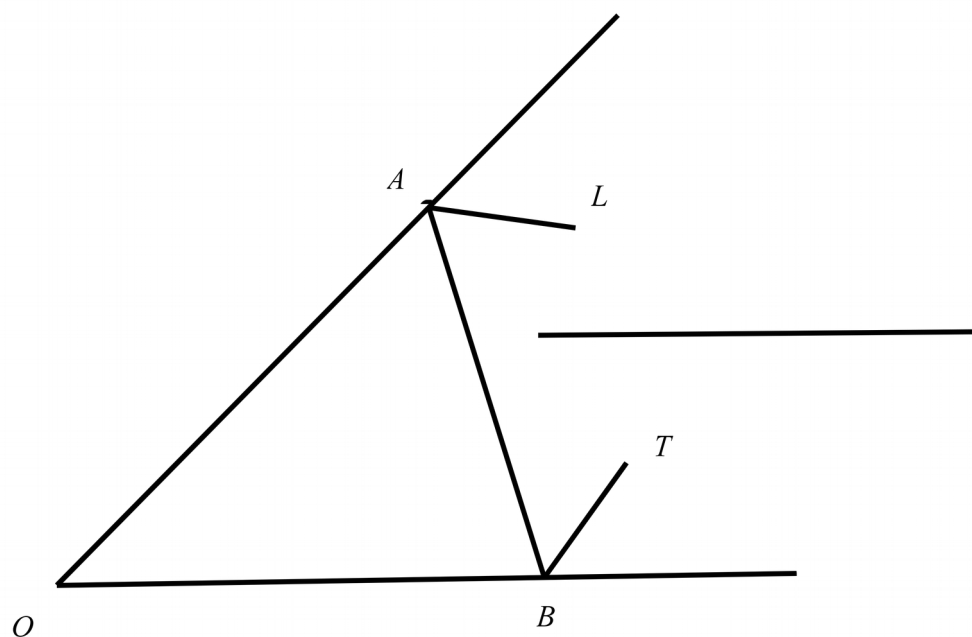


Рис. 19.

Необходимые знания

Неравенство треугольника. Осевая симметрия.

Наводящие соображения

Известно, что луч света всегда идет по кратчайшему пути. Поэтому достаточно найти кратчайшую ломаную с концами в данных точках.

Компьютерный эксперимент

Постройте угол и две точки A и B на его сторонах. Затем постройте точки L и T внутри угла. Постройте отрезки LA , AB и BT , измерьте их длины и найдите их сумму (т.е. длину ломаной $LABT$). Перемещая точки A и B по сторонам угла, найдите, при каком положении этих точек длина ломаной $LABT$ будет наименьшей.

Рациональное рассуждение

Известно, что при отражении от прямой (осевой симметрии) достигается минимум длины ломаной (рис. 20). То есть ломаная ACB – кратчайшая из всех двухзвенных ломаных, соединяющих точки A и B , причем одна из вершин ломаной лежит на данной прямой. Поэтому при последовательном отражении от двух прямых мы также получим минимальную длину ломаной.

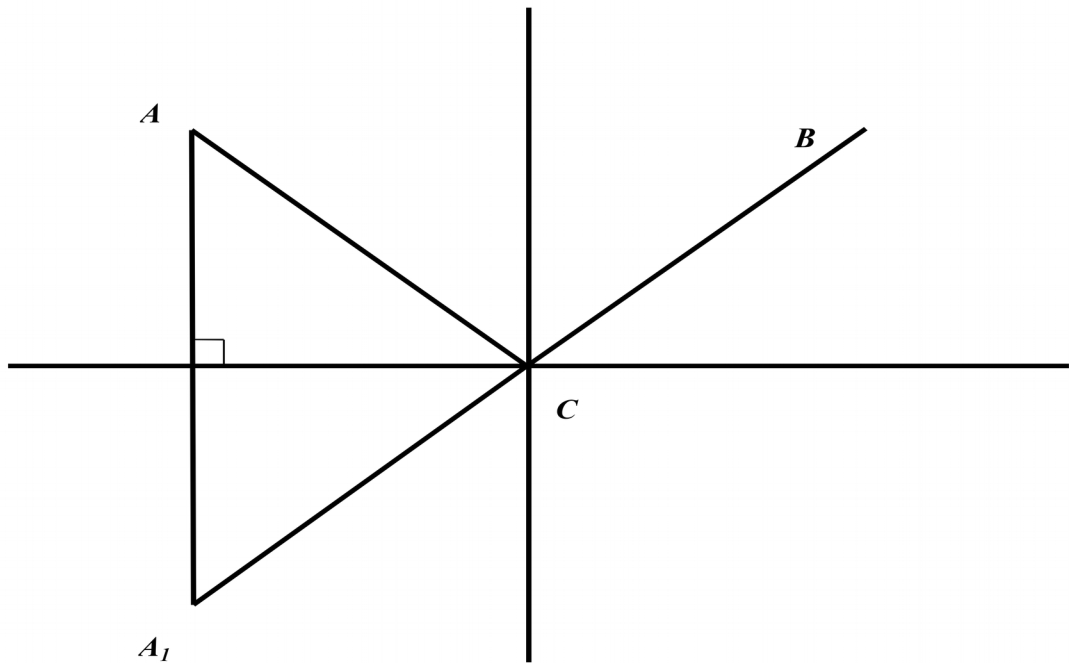


Рис. 20.

Решение:

Отразим каждую точку относительно соответствующей стороны угла, L относительно OM_1 и T относительно OM_2 . Кратчайший путь от L_1 до T_1 – отрезок, соединяющий точки. Этот отрезок пересекает лучи OM_1 и OM_2 в точках A и B соответственно. Поскольку $LA = L_1A$ и $TB = T_1B$, $LABT$ – кратчайший путь (рис. 21).

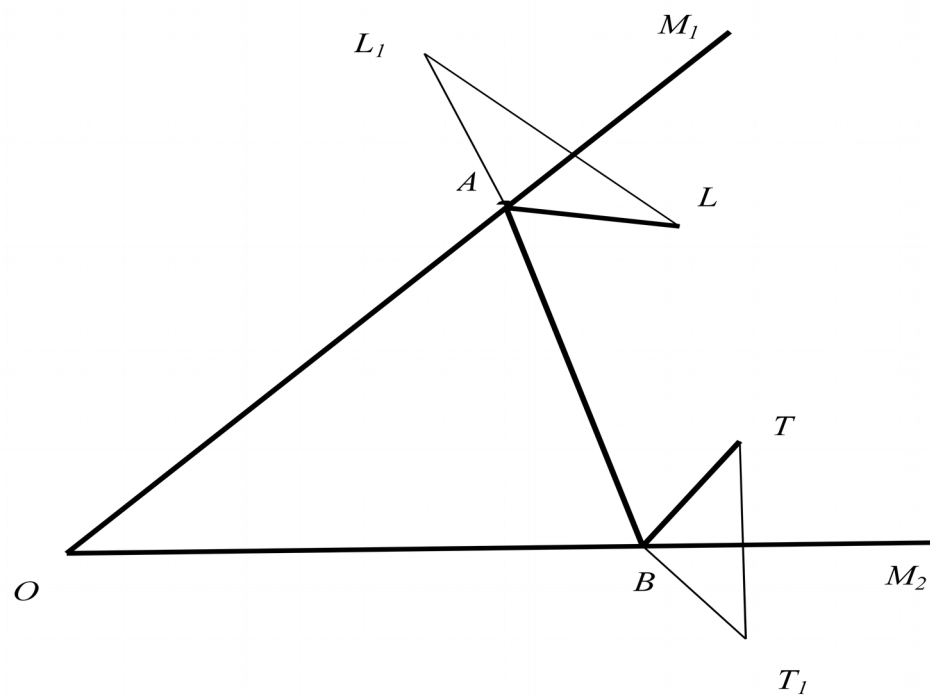


Рис. 21.

Докажем это. Пусть $A_1 \neq A$ и $A \in OM_1$. Пусть $B_1 \neq B$ и $B \in OM_2$. Рассмотрим ломанную LA_1B_1T . Поскольку точка L_1 симметрична точке L относительно прямой OM_1 , то $L_1A = L_1A_1$. Аналогично $TB_1 = T_1B_1$ (рис. 22). Следовательно длина LA_1B_1T равна длине $LA_1B_1T_1$.

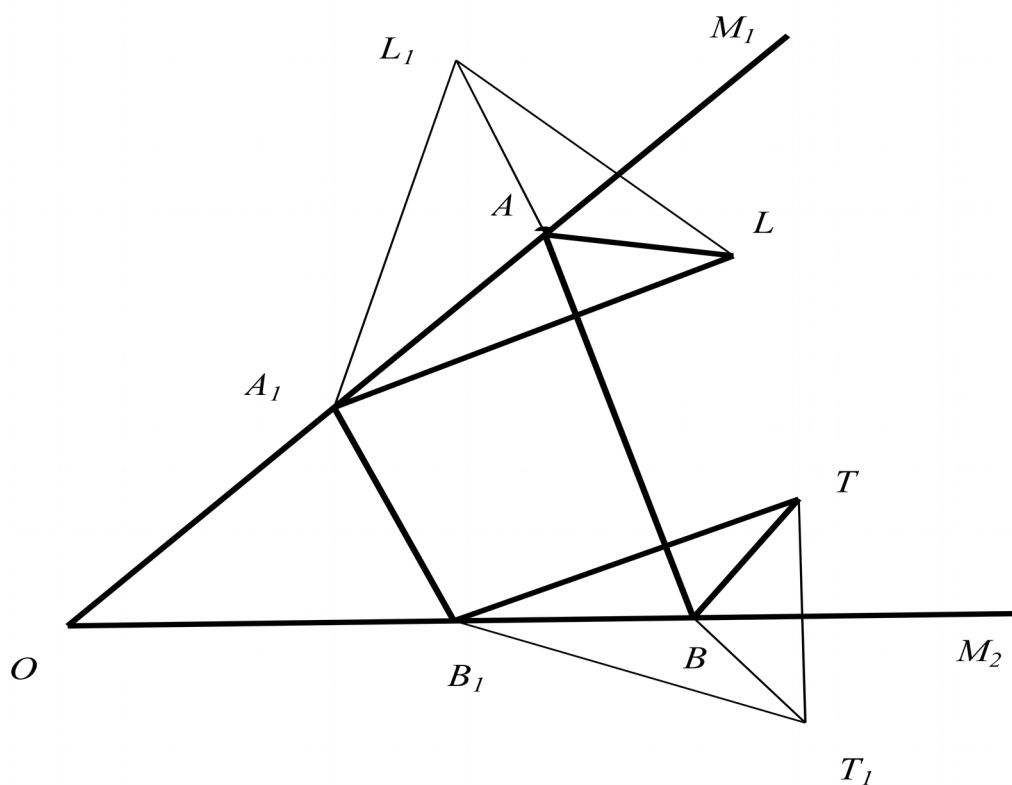


Рис. 22.

Длина отрезка L_1T_1 меньше, чем длина ломаной $LA_1B_1T_1$:

$$L_1T_1 < L_1A_1 + A_1B_1 + B_1T_1 \rightarrow L_1A + AB + BT_1 < L_1A_1 + A_1B_1 + B_1T_1.$$

Поскольку $L_1A = LA$ и $BT_1 = BT$, то $LA + AB + BT < LA_1 + A_1B_1 + B_1T$,

поэтому длина ломаной $LABT$ меньше, чем длина ломаной LA_1B_1T для точек A_1 и B_1 , если они не совпадают с точками A и B соответственно.

ГЛАВА 2

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА МОДЕЛИ ПУАНКАРЕ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

2.1. Понятие о геометрии Лобачевского

Геометрия Лобачевского – геометрическая теория, основанная в 1826 г. Николаем Ивановичем Лобачевским на тех же основных посылах – аксиомах абсолютной геометрии, что и обычная евклидова геометрия. Была создана и развита которой впервые сообщил о ней в. Исключение составляет аксиома о параллельных, которая заменяется на аксиому о параллельных Лобачевского.

Евклидова аксиома параллельных: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, лежащая с данной прямой в одной плоскости и не пересекающая ее.

Аксиома параллельных Лобачевского: через точку, не лежащую на данной прямой, проходят, по крайней мере, две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие ее.

Геометрия Лобачевского называется также гиперболической неевклидовой геометрией. Несмотря на противоречие аксиомы привычным представлениям, геометрия применяется в физике и астрономии.

Для доказательства непротиворечивости геометрической теории и использования в других теориях было создано несколько математических моделей: модели Пуанкаре в круге (первая), на полуплоскости (вторая) и на гиперboloиде, евклидова и проективная модели Кэли-Клейна и Бельтрами в круге и псевдосфере.

В работе рассмотрена вторая модель Пуанкаре планиметрии Лобачевского – в полуплоскости.

2.2.. Биографические сведения о создателях

Николай Иванович Лобачевский (1792–1856). Место рождения математика Николая Ивановича Лобачевского – Нижний Новгород. В девятилетнем возрасте, после смерти отца, он был перевезен матерью в Казань и в 1802 году принят в местную гимназию. После ее окончания в 1807 г. Николай стал студентом только что основанного Казанского Императорского университета.

В 1811 году, по окончании университета, Лобачевский Николай Иванович, был утвержден магистром по математике и физике и оставлен при учебном заведении. В 1814 г. За два научных исследования – по алгебре и механике, его возвели в адъюнкт-профессоры (доценты). Далее Лобачевский Николай Иванович, сам начал заниматься преподаванием, постепенно увеличивая круг читаемых им курсов (математика, астрономия, физика) и серьезно задумываясь о перестройке математических начал. Результатом кропотливого труда стало открытие новой геометрии (1826).

Главный труд русского математика «Пангеометрия» был записан учениками под диктовку ослепшего Лобачевского за год до его смерти. Его открытия в геометрии были оценены десятки лет спустя.



Рис. 19. Н.И. Лобачевский



Рис. 20. А. Пуанкаре

Жюль-Анри Пуанкаре (1854–1912). Родился ученый в городе Нанси во Франции 29 апреля 1854 г. Отец – Леон Пуанкаре – был врачом и читал лекции на медицинском факультете университета. Мать – Евгения – воспитывала детей. Маленький Жюль-Анри рос рассеянным и одаренным: знал правила грамматики, историю, географию и биологию, быстро освоил все четыре арифметических действия и легко считал в уме.

Став бакалавром словесности и бакалавром наук, Пуанкаре Анри начал изучать элементарную математику. В 1881 г. самый авторитетный научный журнал Франции опубликовал статью Пуанкаре о фуксовых функциях (в теории функций комплексного переменного), которая стала прорывом в математической науке. За следующие два года появились более двух десятков статей. Европейские математики начали пристально следить за каждым шагом нового математического светила.

В 1886 г. Пуанкаре стал во главе кафедры математической физики и теории вероятностей в Парижском университете, а в 1887-м его избрали членом Академии наук Франции. Открытия следовали за открытиями: теория автоморфных функций, комбинаторная топология, дифференциальная геометрия, алгебраическая топология, теория вероятностей, функциональный анализ. Им предложены две интерпретации геометрии. В «Теории фуксовых групп», посвященной конечным группам дробно-линейных преобразований комплексного переменного, Пуанкаре заметил, что верхняя полуплоскость комплексного переменного, переводимая в себя этими преобразованиями, является моделью плоскости Лобачевского.

2.3. Модель Пуанкаре в евклидовой полуплоскости

Пусть в евклидовой плоскости дана некоторая прямая l (рис. 23). Составим «словарь интерпретации (модели)».

l

Рис.23. Модель Пуанкаре

Определение 2.

Плоскостью Лобачевского (коротко: Л-плоскостью) называется верхняя евклидова полуплоскость, определяемая прямой l , причем сама прямая исключается.

Определение 3.

Точками Лобачевского (коротко: Л-точками) называются евклидовы точки верхней полуплоскости, определяемой прямой l (точки самой прямой исключаются).

Определение 4.

Прямыми Лобачевского (коротко: Л-прямыми) называются:

- 1) евклидовы полуокружности верхней полуплоскости, ортогональные к оси l , т.е. имеющие центры на этой прямой,
- 2) евклидовы полупрямые – лучи, перпендикулярные к прямой l , с началами на этой прямой и расположенные в верхней полуплоскости.

Определение 5.

Будем говорить, что «некоторая Л-точка **инцидентна** с некоторой Л-прямой» или что «некоторая Л-точка **лежит на** Л-прямой», если

соответствующая евклидова точка в обычном смысле слова лежит на соответствующей евклидовой полуокружности или полупрямой.

Можно доказать, что построенная модель удовлетворяет всем аксиомам планиметрии Лобачевского (используем для доказательства аксиоматику Гильберта).

2.4. Аксиомы на модели Пуанкаре

I. Аксиомы связи (соединения, инцидентности)

Если A и B – две точки верхней полуплоскости (рис.24), то через них проходит либо единственная полуокружность с центром O на прямой l , либо единственная полупрямая, перпендикулярная к прямой l . Таким образом, в новой терминологии имеем:

I.1. Через любые две Л-точки проходит одна и только одна Л-прямая.



Рис.24. Аксиомы связи

I.2. На каждой прямой лежат, по крайней мере, две различные точки.

I.3. Существуют, по крайней мере, три точки, не лежащие на одной прямой.

II. Аксиомы порядка

II.1. $A|BC \rightarrow A|CB$

II.2. Из любых трех различных точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

II.3. Для любых двух различных точек A и B существуют C и D такие, что $C|AB$, $A|BD$.

Определение 6.

Пусть A , B , C – три Л-точки, лежащие на Л-прямой a . Будем говорить, что Л-точка C лежит между A и B , если точка C лежит между точками A и B на соответствующей полуокружности или полупрямой в обычном евклидовом смысле.

Выполнение аксиом следует из того, что они имеют место для точек полуокружности или полупрямой евклидовой геометрии.

Определим понятия Л-отрезка, внутренних и внешних Л-точек Л-отрезка.

Определение 7.

AB называется отрезком; точки A и B называются *концами* отрезка; точки, лежащие между A и B (если такие точки существуют), называются *точками* отрезка AB или *внутренними точками* отрезка AB ; все остальные точки прямой AB называются *внешними точками* к отрезку AB .

II.4. Для любых трех не лежащих на одной прямой точек, если прямая не проходит ни через одну из этих точек и пересекает один из определяемых ими отрезков, то она пересекает один и только один из двух оставшихся отрезков.

Рассмотрим уравнение окружности с центром на прямой l при условии, что начало координат расположено на этой прямой и прямая l принята за ось абсцисс. Пусть окружность γ имеет центр $O(a; 0)$ и радиус r :

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2$$

Можно показать, что для того, чтобы эта полуокружность пересекала дугу AB другой верхней полуокружности с центром на l во внутренней точке дуги, необходимо и достаточно, чтобы левая часть уравнения γ имела в точках A и B значения противоположных знаков.

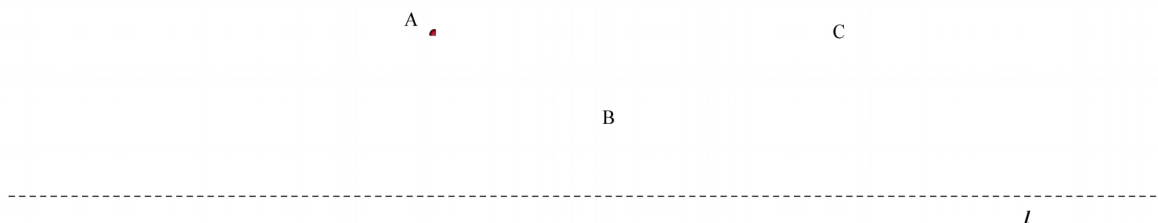


Рис.25

Рассмотрим криволинейный треугольник ABC , образованный дугами трех пересекающихся верхних полуокружностей, имеющих центры на прямой l . Пусть некоторая четвертая полуокружность пересекает дугу AB во внутренней точке и не проходит через точки A , B и C . В первом случае четвертая полуокружность пересекает во внутренней точке дугу BC , во втором случае – дугу AC . (рис. 25).

Если мы выразим этот факт в новой терминологии, то получим содержание аксиомы II.4 для Л-точек и Л-отрезков. Далее можно дать определение понятий Л-луча и Л-угла.

Определение 8.

Множество всех Л-точек Л-прямой a , лежащих по одну и ту же сторону от Л-точки O , то есть принадлежащих к одному классу, называется Л-лучом

или Л-полупрямой, исходящей из Л-точки O , называемой началом или вершиной Л-луча.

Определение 9.

Пара Л-лучей h, k , выходящих из Л-точки O и не принадлежащих одной Л-прямой, называется **Л-углом**, который обозначается знаком $\angle(h, k)$ или $\angle(k, h)$. Если A и B – Л-точки, лежащие соответственно на Л-лучах h и k , то Л-угол обозначается также $\angle AOB$ или $\angle BOA$. Л-точка O называется *вершиной* угла, Л-лучи h и k – *сторонами* угла.

III. Аксиомы конгруэнтности

Определение 10.

Два Л-отрезка AB и CD будем называть конгруэнтными, если существует такая конечная последовательность инверсий с центрами на прямой l , в результате которых соответствующая дуга AB одной евклидовой полуокружности преобразуется в дугу CD другой.

III.1. Пусть даны две полуокружности a и b с центрами на прямой l . На первой дан отрезок дуги AB , а на второй зафиксирована точка C (рис. 26). По свойству инверсии 7 существует инверсия с центром на оси l , преобразующая полуокружность a в полуокружность b .

Пусть при этом точки A и B переходят в некоторые точки A' и B' на полуокружности b . Тогда по свойству инверсии 8 существует инверсия с центром на оси l , преобразующая полуокружность b в себя так, что либо точка A' переходит в C , либо B' переходит в C . В первом случае точка B' перейдет в некоторую точку D' полуокружности b , во втором случае точка A' перейдет в некоторую точку D'' полуокружности b . Точки D' и D'' расположены по разные стороны от C .

l

Рис.26. Равенство отрезков

В соответствии с определением понятия конгруэнтности Л-отрезков будем иметь $\langle AB \rangle \equiv \langle CD' \rangle$ и $\langle AB \rangle \equiv \langle CD'' \rangle$ (рис. 26).

Для того, чтобы доказать, что $\langle AB \rangle \equiv \langle BA \rangle$, достаточно отобразить полуокружность a в себя так, чтобы точки A и B перешли друг в друга, что возможно в силу свойства инверсии 8.

III.2. Движение сохраняет отношение инцидентности.

III.3. Движение сохраняет отношение «лежать между».

Определение 11.

Два Л-угла $\angle(h, k)$ и $\angle(h', k')$ будем называть конгруэнтными, если существует такая последовательность инверсий с центрами на прямой l , в результате которых дуги полуокружностей, изображающих стороны первого Л-угла, переходят в дуги полуокружностей, изображающих стороны второго.

III.4. Пусть дан Л-угол $\angle(h, k)$ с вершиной A и Л-луч h' с началом A' (рис.24). Пользуясь свойствами инверсии 7 и 8, найдем последовательность инверсий, в результате которых Л-прямая a перейдет в Л-прямую a' так, что A перейдет в A' и Л-луч h – в Л-луч h' . При этом Л-прямая b перейдет в Л-прямую b' , проходящую через A' , а Л-луч k перейдет в Л-луч k' Л-прямой b' .

По определению Л-угол $\angle(h, k)$ конгруэнтен Л-углу $\angle(h', k')$. Взяв в качестве окружности инверсии окружность a' , отобразим Л-луч k' в Л-луч k'' , расположенный по другую сторону Л-луча h' (рис. 27). По определению Л-угол $\angle(h, k)$ конгруэнтен Л-углу $\angle(h', k'')$.

l

Рис.27. Равенство углов

Пользуясь свойствами инверсии 7 и 8, мы можем преобразовать Л-луч h в k и обратно. Следовательно, Л-угол $\angle(h, k)$ конгруэнтен Л-углу $\angle(k, h)$. Повторяя последовательность инверсий, убедимся, что Л-угол $\angle(h, k)$ конгруэнтен самому себе.

Инверсия с центром на прямой l играет для равенства геометрических фигур в модели Пуанкаре такую же роль, что и движение в евклидовой плоскости. Поэтому инверсию называют «Л-движением».

III.5. Композиция двух движений есть движение.

III.6. Для любой упорядоченной пары реперов существует и только одно движение, при котором второй репер является образом первого репера.

IV. Аксиомы непрерывности

Понятие «лежать между» для Л-точек A, B, C , принадлежащих Л-прямой сводится к понятию «лежать между» для евклидовых точек A, B, C верхней полуокружности с центром на оси l . В свою очередь, для них можно рассматривать понятие «лежать между» и их ортогональные проекции A', B', C' на ось l , если установить между точками верхней полуокружности и их проекциями на l взаимно однозначное соответствие. Для точек евклидовой прямой l аксиома Дедекинда IV имеет место, тогда она автоматически переносится на точки верхней полуокружности, а тем самым на Л-точки Л-прямой.

Таким образом, в нашей интерпретации выполняются все аксиомы I–IV абсолютной геометрии. Остаётся исследовать, как обстоит дело с аксиомой параллельности.

Аксиома Дедекинда. Любое дедекиндово сечение на множестве точек ориентированной прямой имеет хотя бы одну граничную точку.

Таким образом, в интерпретации выполняются все аксиомы I–IV абсолютной геометрии.

V. Аксиома параллельных

Пусть дана верхняя полуокружность a с центром на l и не принадлежащая ей точка A (рис. 28). Существуют две и только две верхние полуокружности b и c (одна из них может обратиться в луч, ортогональный к l) с центрами на l , проходящие через A и касающиеся полуокружности a в точках M и N оси l .

l

Рис. 28. Параллельность

Очевидно, что через точку A проходит бесконечное множество верхних полуокружностей с центрами на l , не имеющих общих точек с a (внутри заштрихованных криволинейных углов, образованных полуокружностями b и c). Через A проходит бесконечное множество верхних полуокружностей с центрами на l , пересекающих a (внутри незаштрихованных углов).

В пучке Л-прямых, проходящих через Л-точку A , существует бесконечное множество Л-прямых, не пересекающих Л-прямую a , и бесконечное множество Л-прямых, пересекающих Л-прямую a .

Это значит, что в модели Пуанкаре имеет место аксиома Лобачевского, причем роль граничных Л-прямых, т.е. параллельных Лобачевского, играют полуокружности b и c (в пучке они отделяют друг от друга Л-разных классов), сами не имеют общих точек с a (точки касания M и N , лежащие на оси l , исключены).

Полуокружность e , проходящая через A и ортогональная к a , играет роль перпендикуляра, опущенного из Л-точки A на Л-прямую a , а Л-угол α , образуемый им с Л-лучом AN или AM , играет роль угла параллельности Лобачевского.

Таким образом, получили модель планиметрии Лобачевского, основанную на понятиях и образах планиметрии Евклида.

2.5. Элементарные построения и преобразования плоскости на модели Пуанкаре

2.5.1. Построение Л-прямой

Случай 1: Л-прямая – евклидова полуокружность.

- 1) Выбрать инструмент «Линейка», построить прямую l – абсолют;

Определение 12.

На модели Пуанкаре в евклидовой плоскости фиксируется горизонтальная прямая l . Она носит название «абсолют». Точками плоскости Лобачевского считаются точки плоскости, лежащие выше абсолюта l .

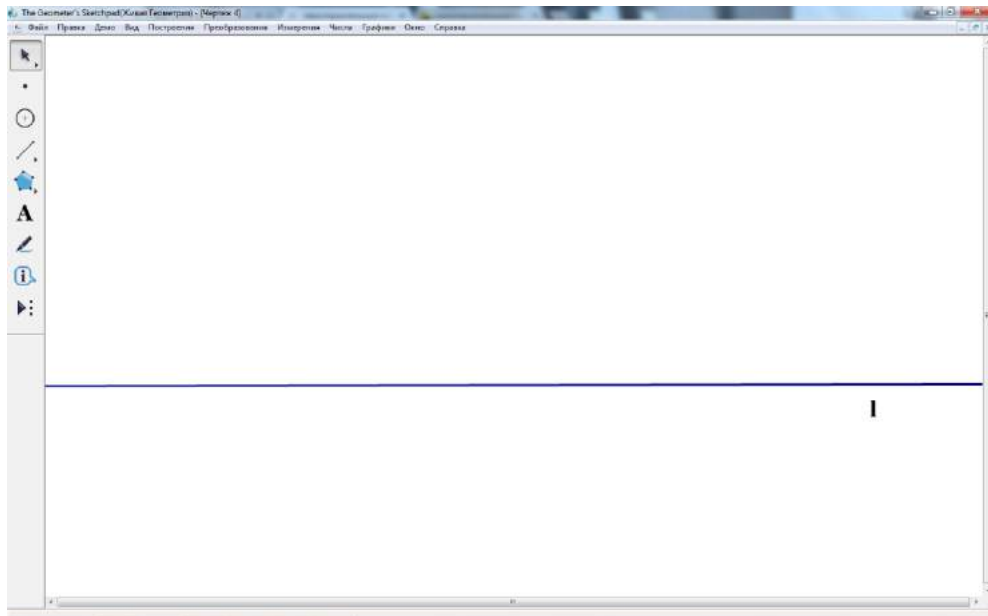


Рис.29. Прямая – абсолют

2) выбрать инструмент «Циркуль», построить окружность a ;

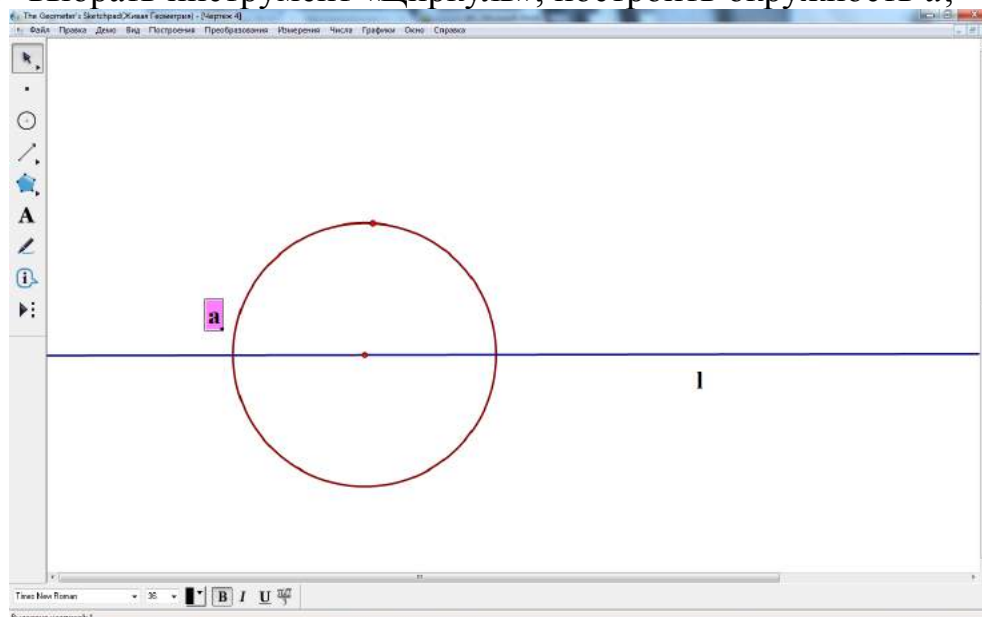


Рис.30. Окружность a

3) выделить окружность и прямую, в меню «Построения» воспользоваться командой «Пересечения»;

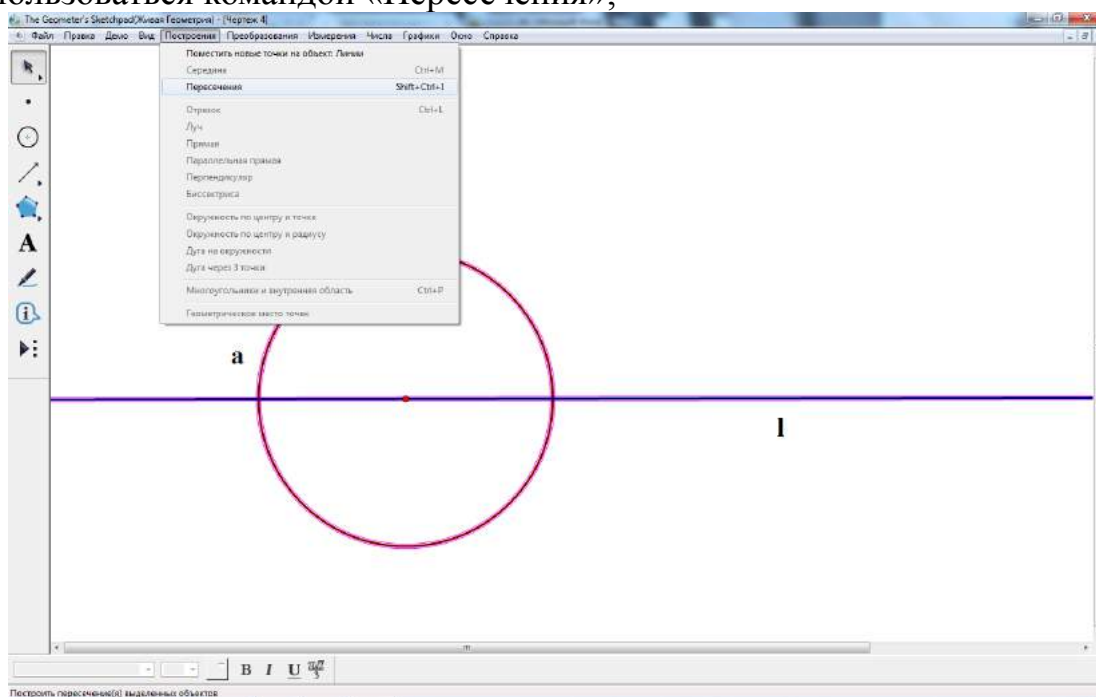


Рис.31. Выделенная окружность a

4) выделить полученные точки и окружность, в меню «Построение» воспользоваться командой «Дуга на окружности»;

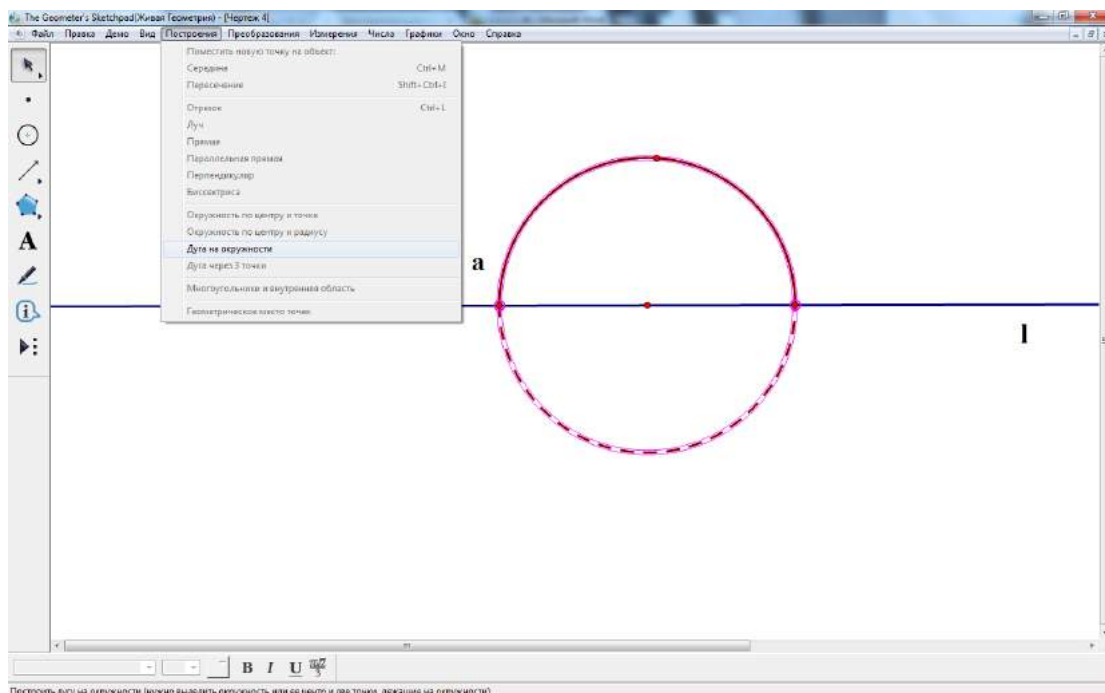


Рис.32. Дуга окружности *a*

5) убрать окружность: с помощью инструмента «Стрелка» выделить окружность и щелкнув правой клавишей мыши и воспользоваться командой «Спрятать окружность».

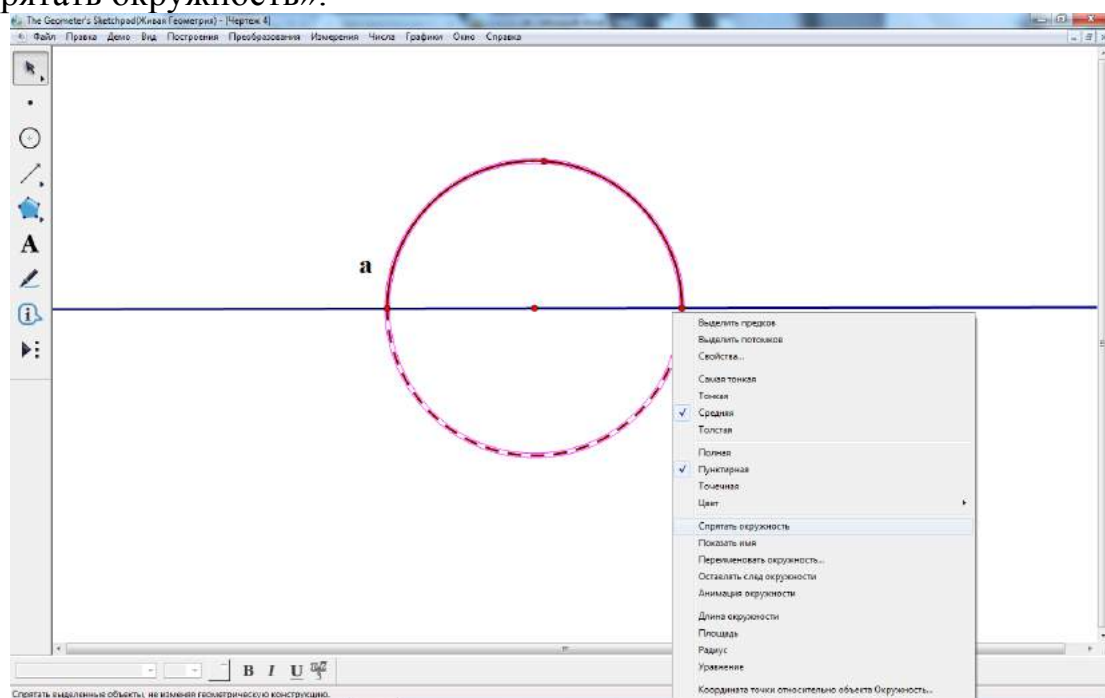


Рис.33. Дуга окружности

Случай 2: Л-прямая – евклидов луч.

- 1) Выбрать инструмент «Линейка», построить луч (см. п.1.3.5).

2.5.2. Построение пересекающихся прямых

Способ 1 – две пересекающихся полуокружности:

- 2) Выбрать инструмент «Линейка», построить прямую l – абсолют;
- 3) выбрать инструмент «Циркуль», построить окружности a и b ;

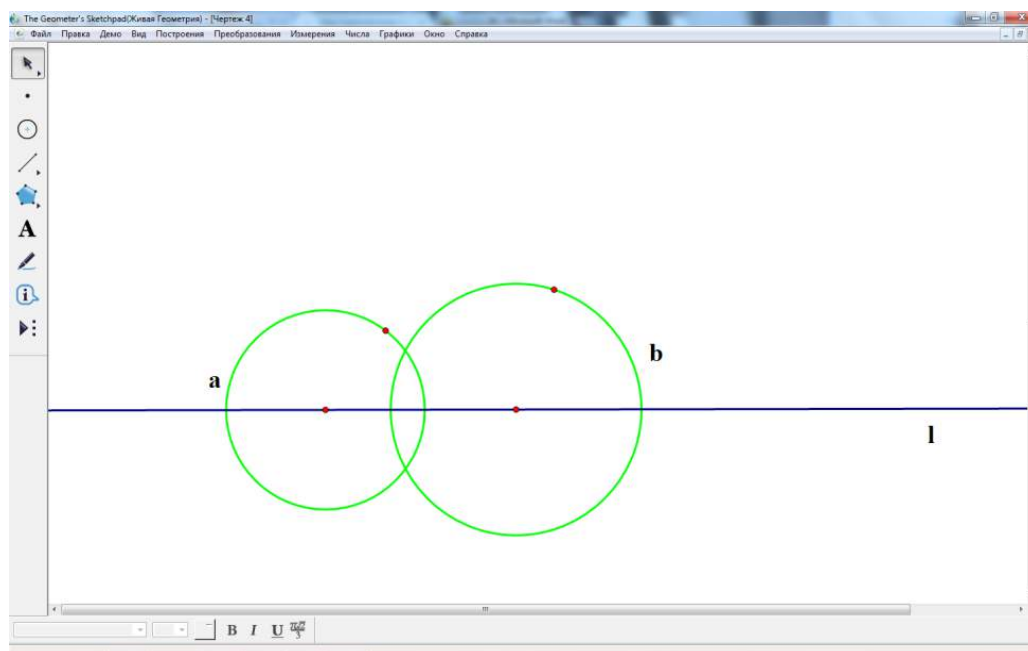


Рис.34. Пересекающиеся прямые

- 4) выбрать окружность и прямую, в меню «Построения» воспользоваться командой «Пересечения».

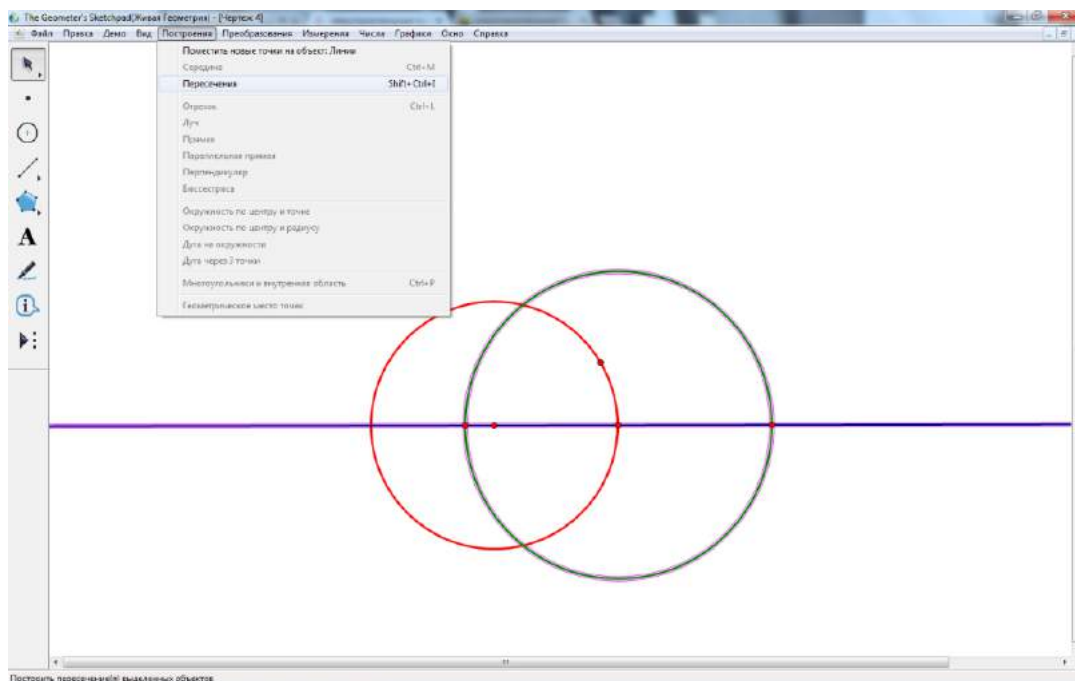


Рис.35. Пересечение

5) выбрать точки пересечения и окружность, в меню «Построения» воспользоваться командой «Дуга на окружности»;

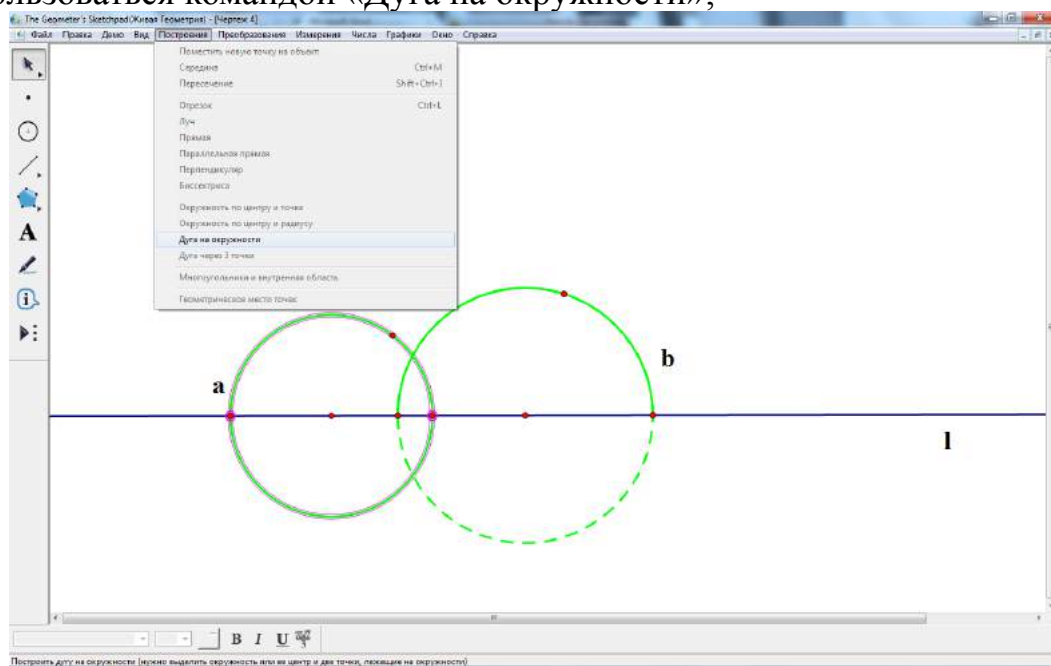


Рис.36 Дуга

6) выбрать инструмент «Стрелка» и, щелкнув правой клавишей мыши по окружности, выбираем команду «Спрятать окружность»;

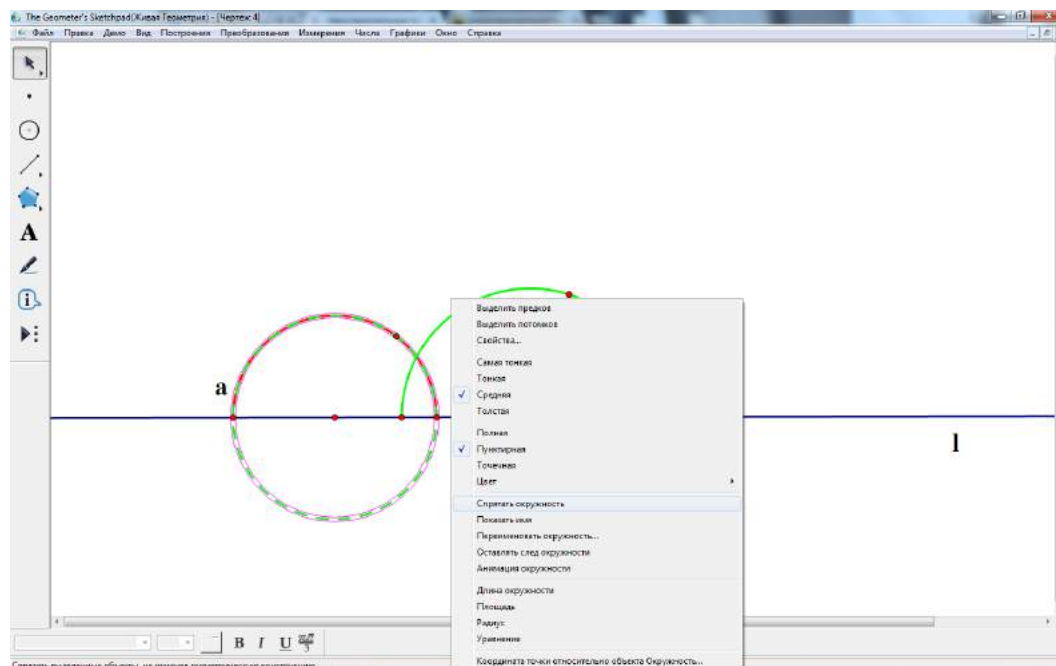


Рис.37.

7) выбрать инструмент «Стрелка» и, щелкнув правой клавишей мыши по вспомогательной точке, выбираем команду «Скрыть точку»;

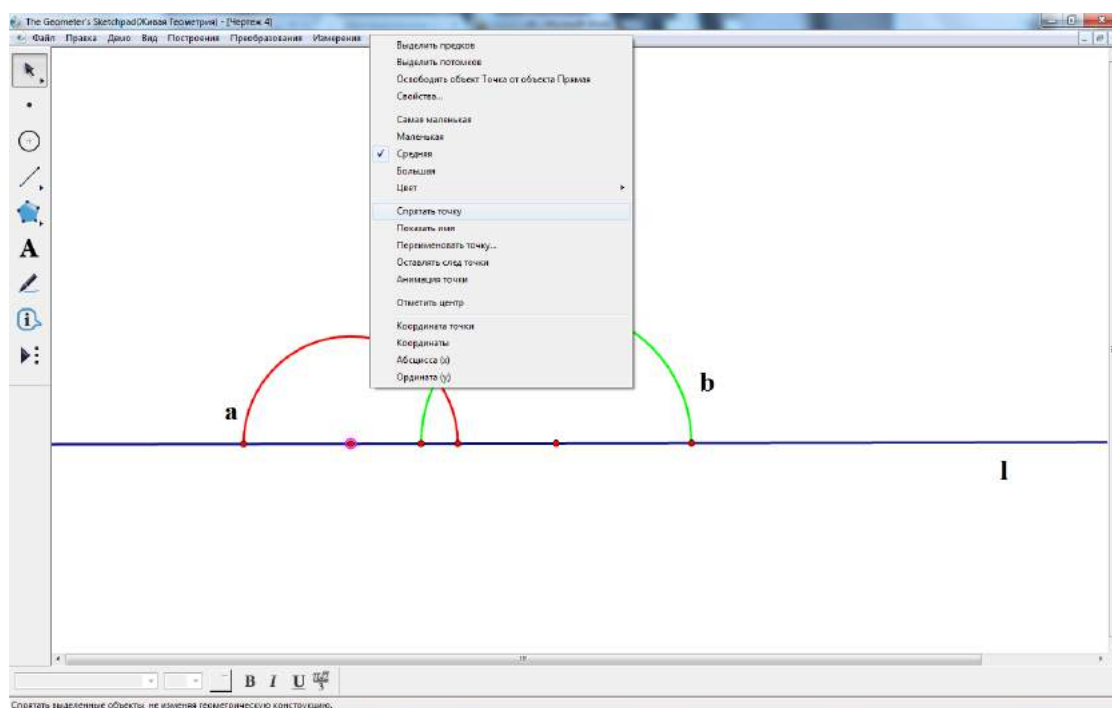


Рис.38.

8) выбрать обе полуокружности, в меню «Построения» воспользоваться командой «Пересечения».

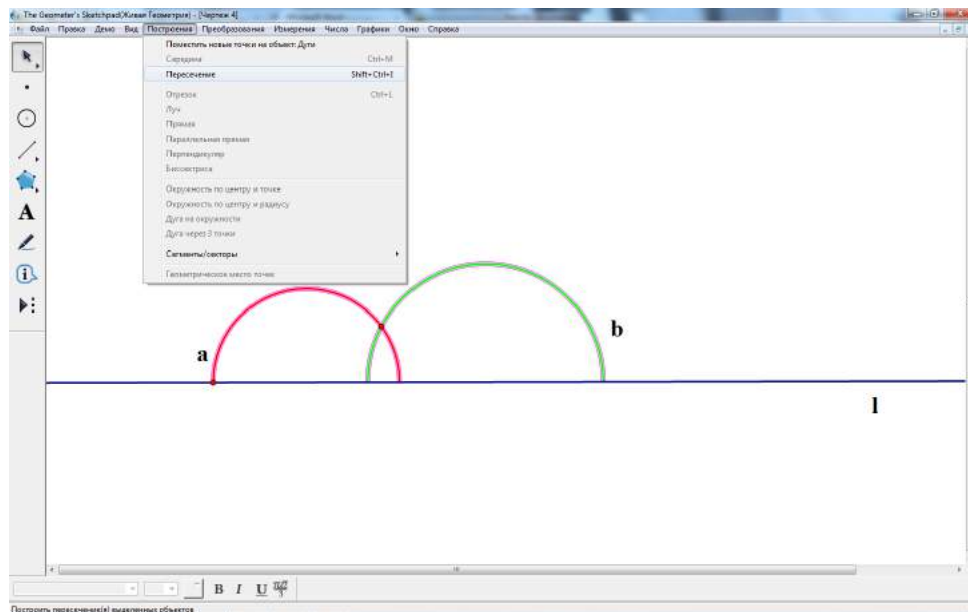


Рис.39. Пересекающиеся прямые (евклидовы полуокружности)

Способ 2. Полуокружность и Л-прямая:

- 1) Выбрать инструмент «Линейка», построим прямую l ;
- 2) выбрать инструмент «Циркуль», построить окружность a ;
- 3) выбрать инструмент «Точка» на прямой l внутри окружности a ;
- 4) выделить эту точку и прямую l ;
- 5) в меню «Построения» воспользоваться командой «Перпендикуляр»;

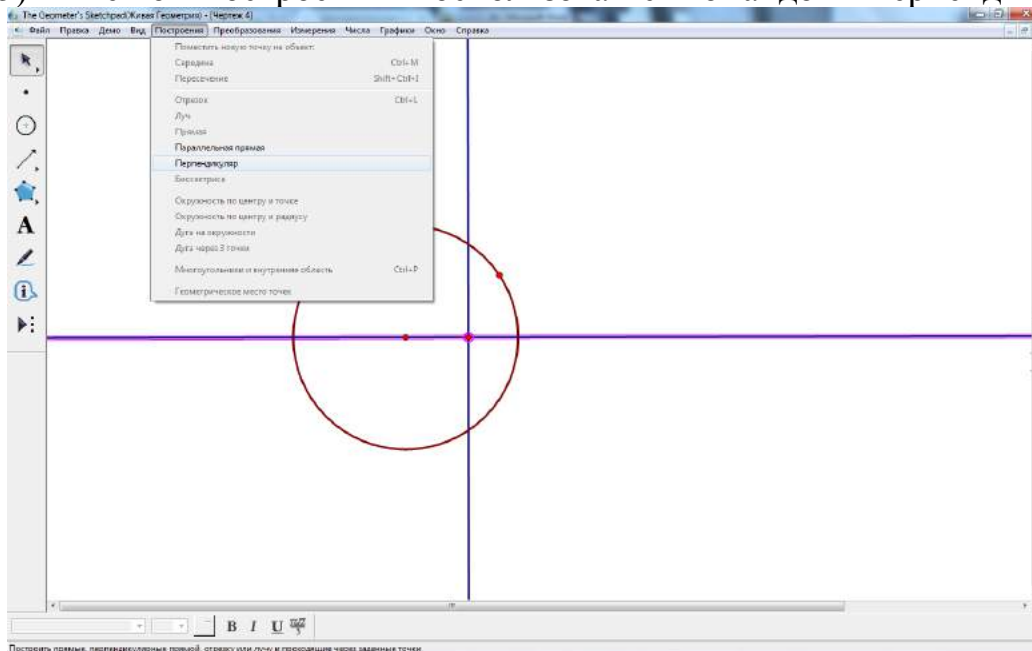


Рис.40. Перпендикуляр

- 6) выбрать инструмент «Линейка», построить луч на данном перпендикуляре с началом на прямой l .

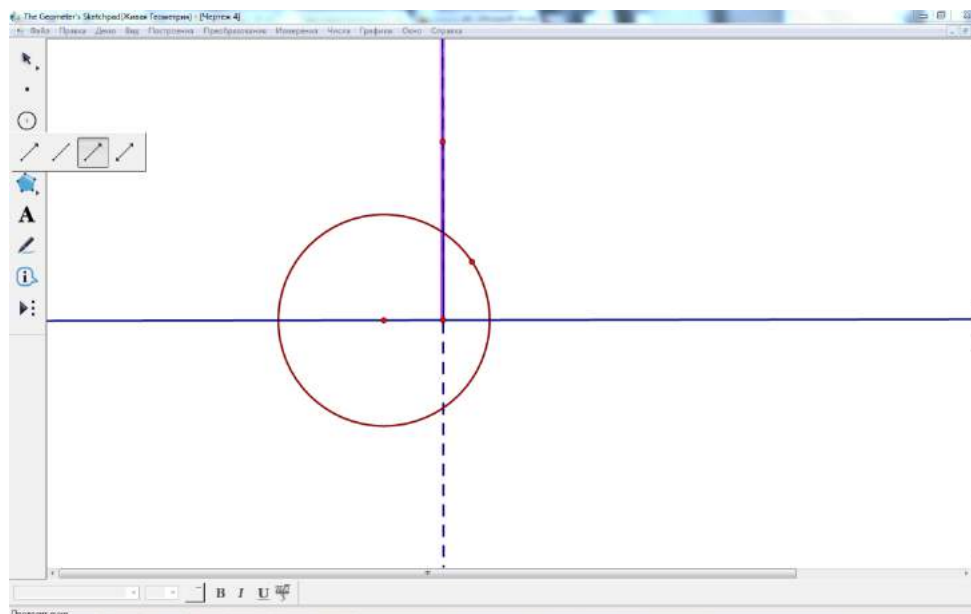


Рис.41.

7) выбрать окружность и прямую l ; в меню «Построения» воспользоваться командой «Пересечение»;

8) выбрать точки пересечения и окружность, воспользуйтесь командой «Построение дуги».

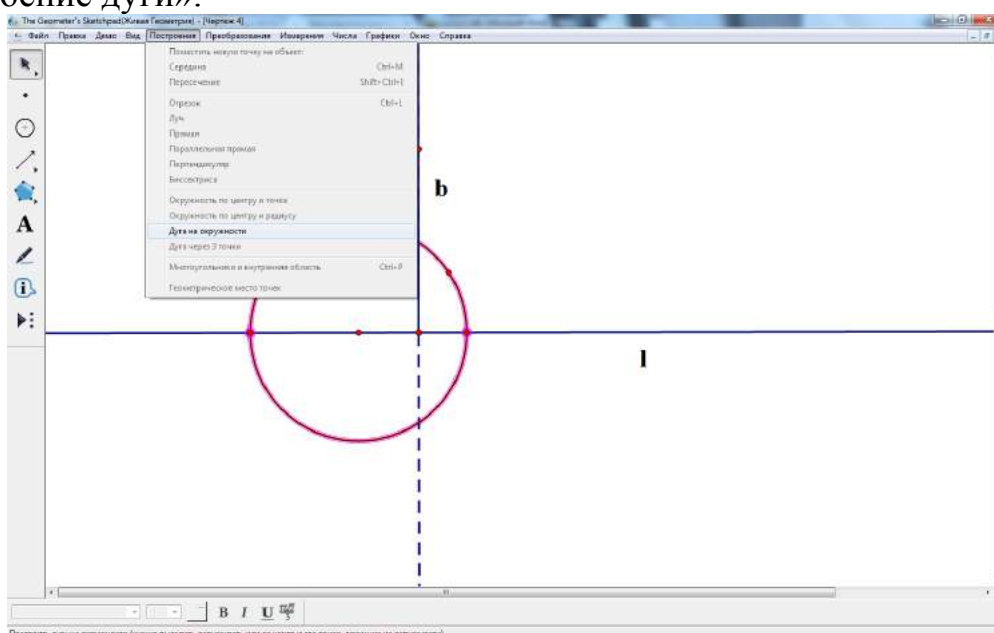


Рис.42

9) убрать перпендикуляр, окружность и лишние вспомогательные точки – выбрать инструмент «Стрелка» и, щелкнув правой клавишей мыши по объекту, выбрать команду «Спрятать».

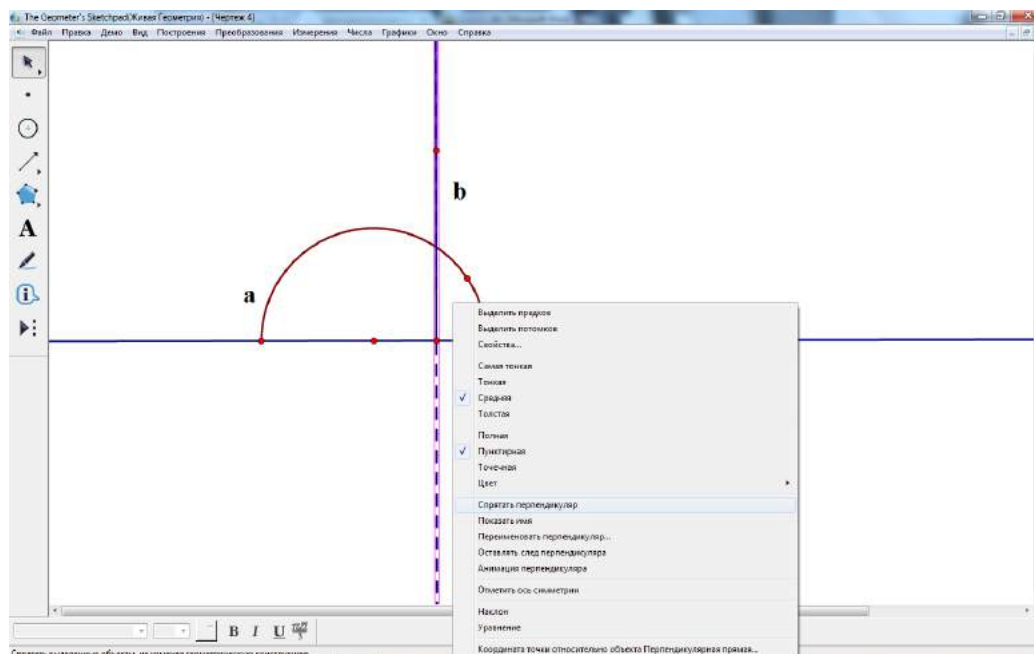


Рис.43.

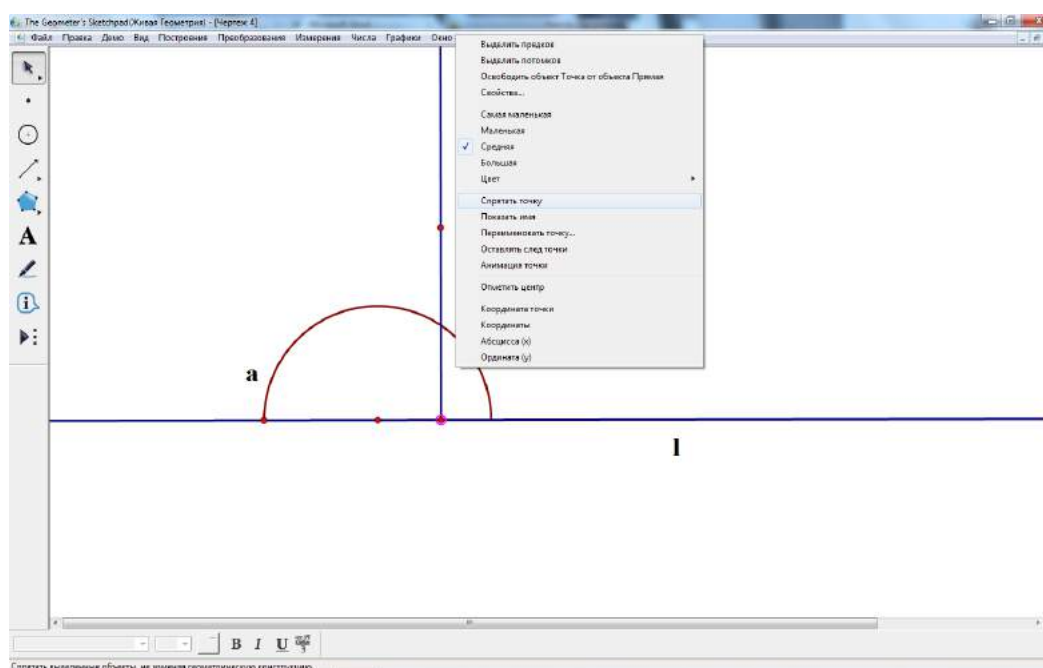


Рис.44.

10) выбрать полуокружность и прямую, в меню «Построения» воспользуемся командой «Пересечение».

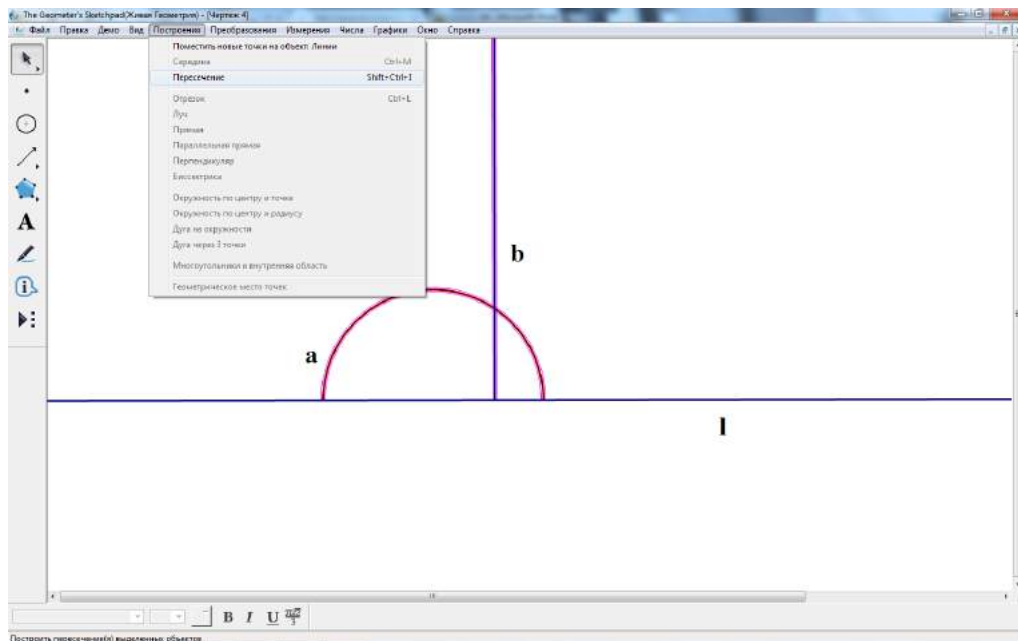


Рис.45. Пересекающиеся прямые (евклидовы полуокружность и луч)

2.5.3. Построение параллельных (параллельных в данном направлении, сходящихся) прямых

Определение 12:

Пусть a и b две ориентированные прямые. Прямая b называется параллельной a в данном направлении, если

- 1) $b \cap a = \emptyset$
- 2) для любых точек $A \in a$, $B \in b$ любой внутренний луч из $\angle ABb$ пересекает a . (рис. 46).

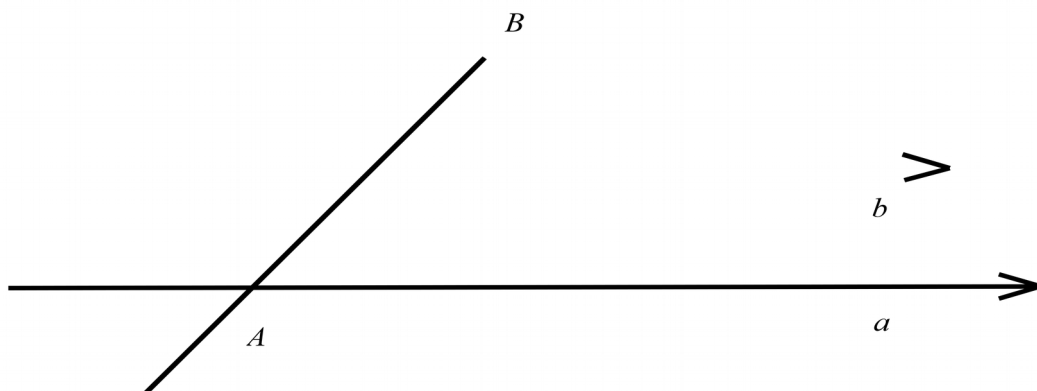


Рис.46.

Построение:

- 1) Выбрать инструмент «Линейка», построить прямую l ;
- 2) построить Л-прямую a ;
- 3) выбрать любую точку пересечения полуокружности с прямой l и прямую l , воспользоваться командой «Перпендикуляр» в меню «Построения»;

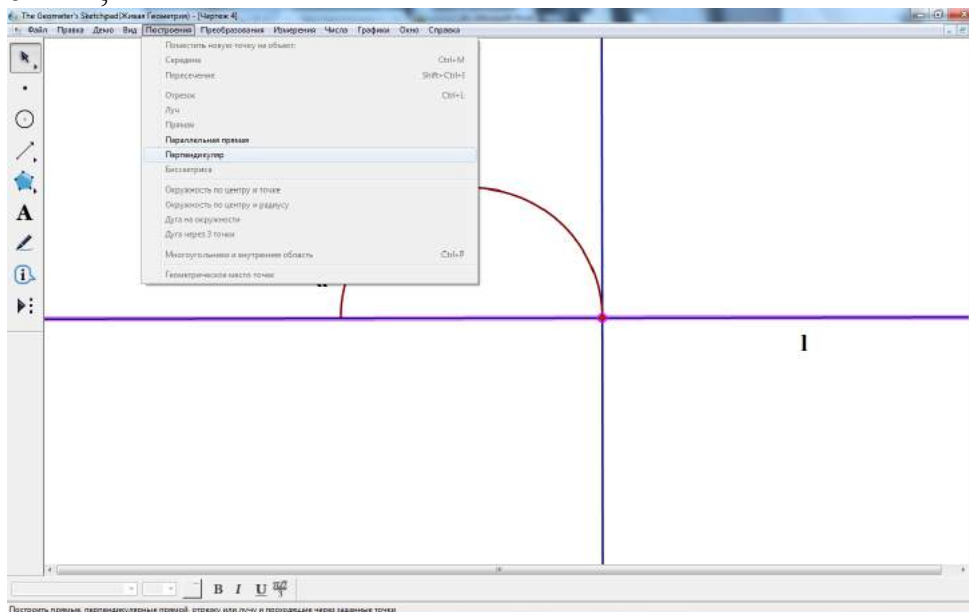


Рис.47.

- 4) выбрать инструмент «Линейка», построить луч c , лежащий на данном перпендикуляре с началом на прямой l ;

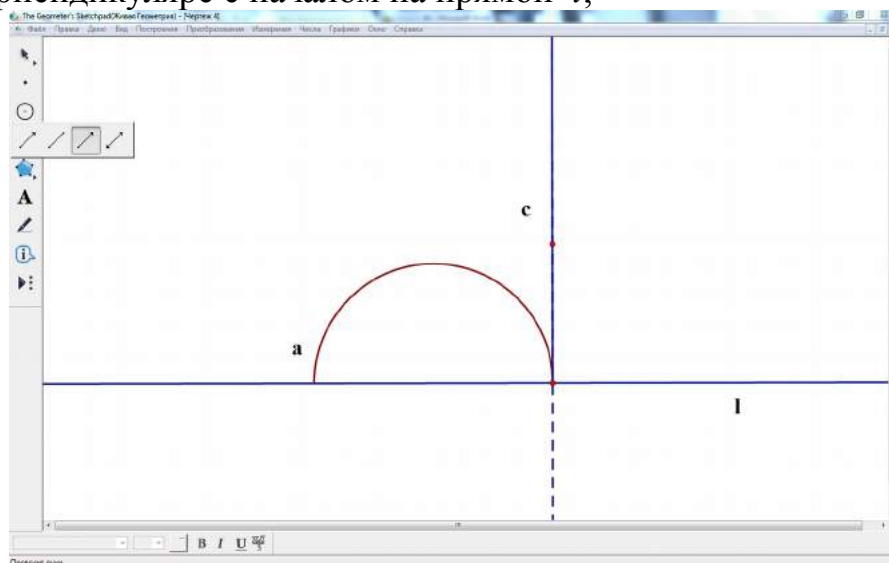


Рис.48.

5) убрать перпендикуляр: с помощью инструмента «Стрелка» выделить перпендикуляр правой клавишей мыши и воспользоваться командой «Спрятать перпендикуляр»;

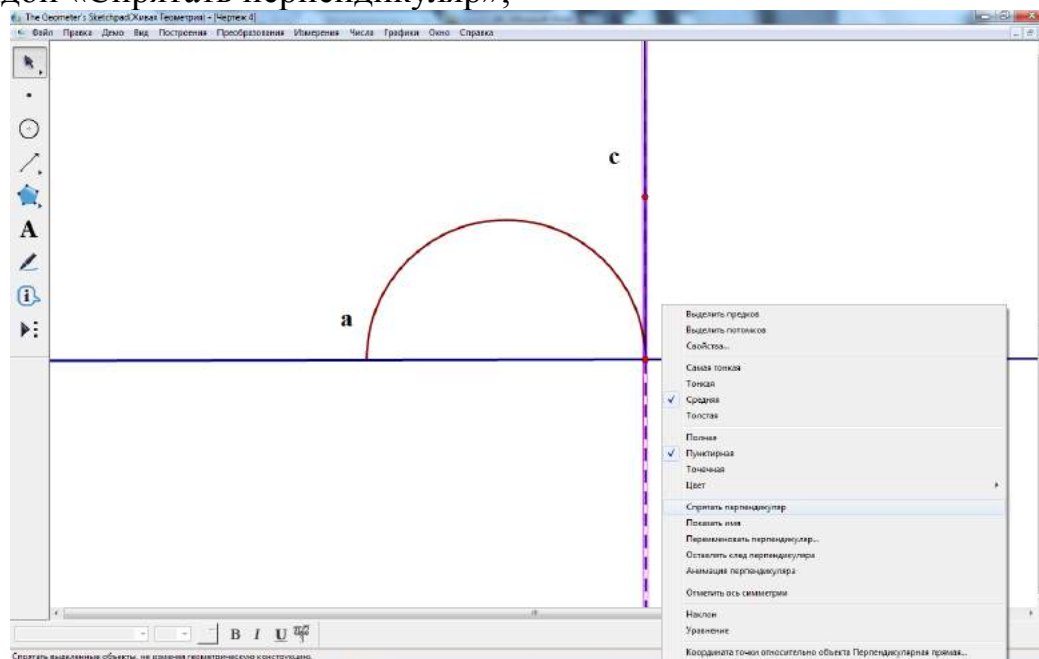


Рис.49

6) построить по аналогии полуокружности b и d .

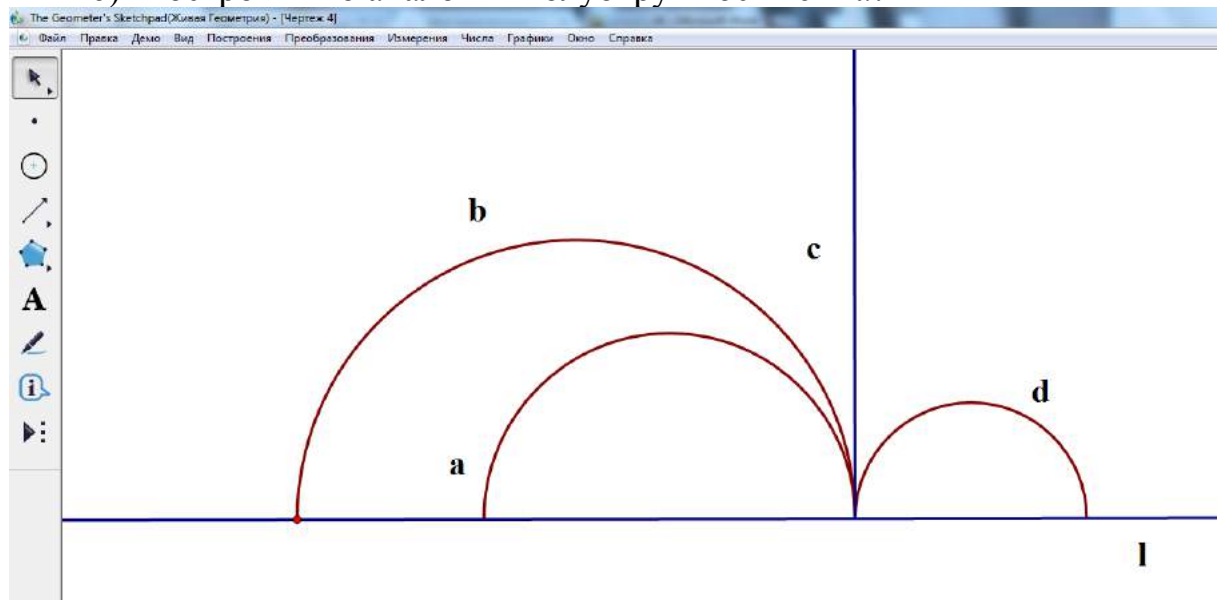


Рис.50. Параллельные прямые

2.5.4. Построение сверхпараллельных (расходящихся) прямых

Определение 13:

Прямая b называется сверхпараллельной относительно a точки, если $B \in b$, $b \cap a = \emptyset$ и b не параллельна a относительно точки B ни в том, ни в другом направлении.

- 1) Выбрать инструмент «Линейка» и построим прямую – абсолют;
- 2) Выбрать точку на прямой, выделим прямую, точку и воспользоваться командой «Перпендикуляр» в меню «Построения»;

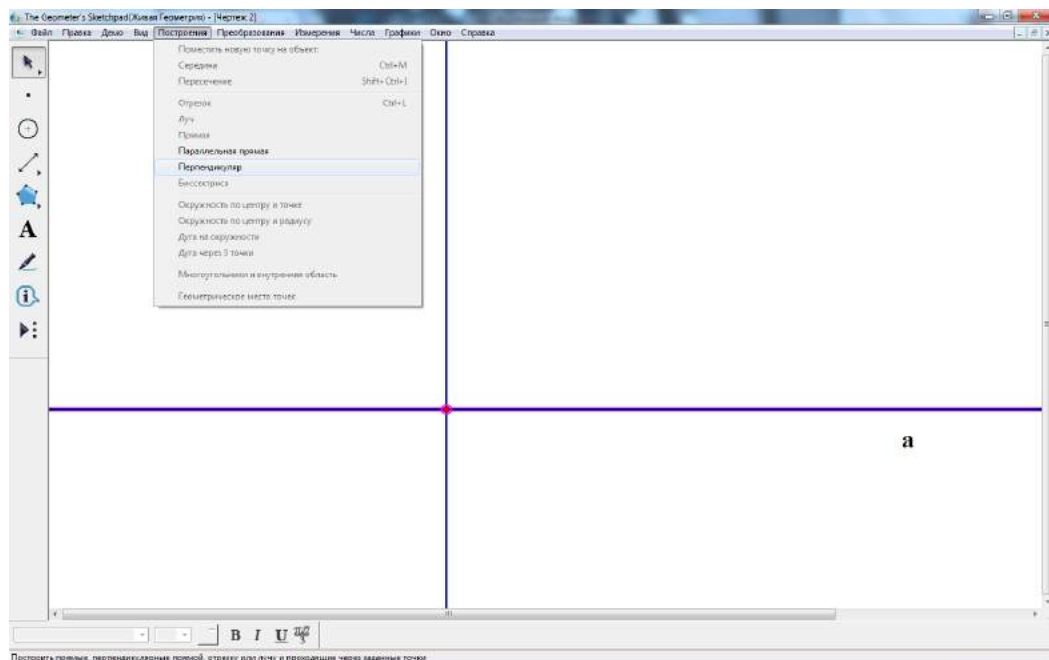


Рис.51. Абсолют и перпендикуляр

- 3) используя инструмент «Линейка», построить луч b ;
- 4) убрать перпендикуляр: с помощью инструмента «Стрелка» выделить перпендикуляр правой клавишей мыши и воспользоваться командой «Спрятать перпендикуляр»;

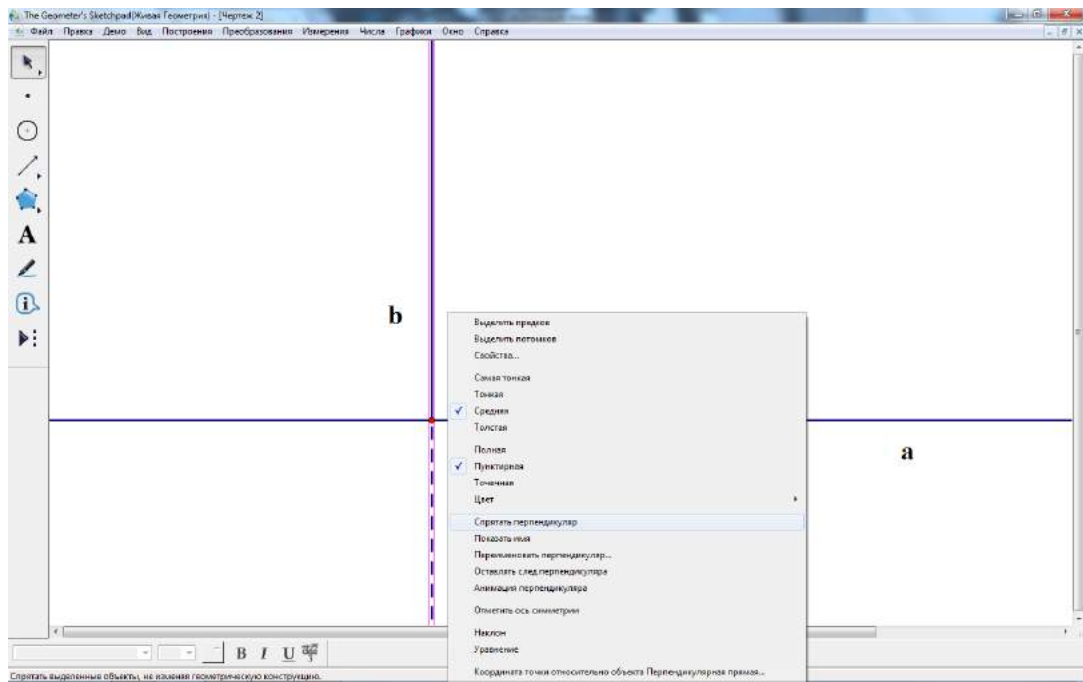


Рис.52.

- 5) построить точку A на луче b ;
- 6) через точку A провести прямые p и q с помощью инструмента «Линейка»;

«Линейка»;

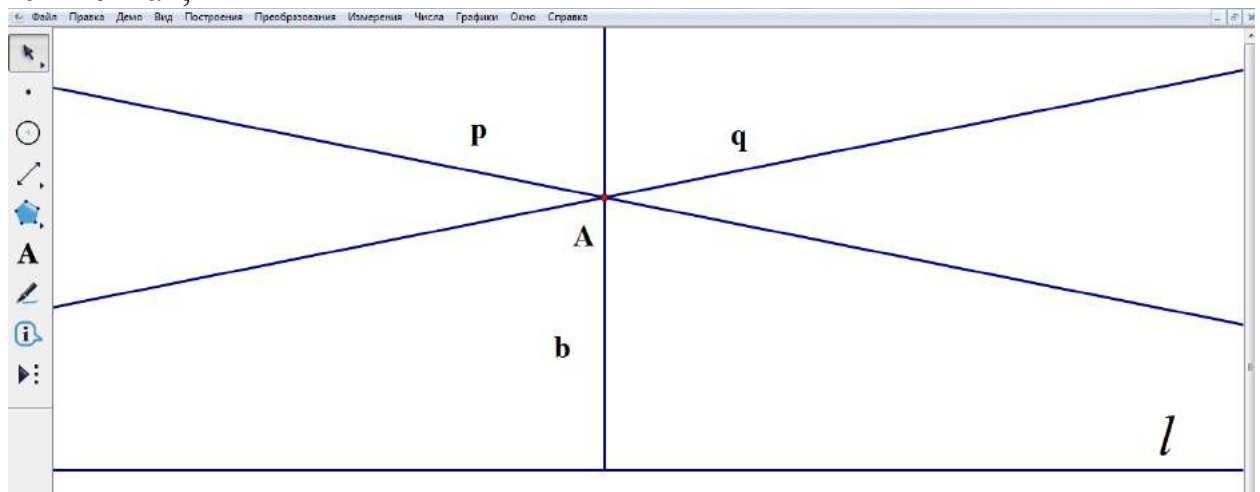


Рис. 53.

- 7) построить сверхпараллельные с помощью инструмента «Линейка».

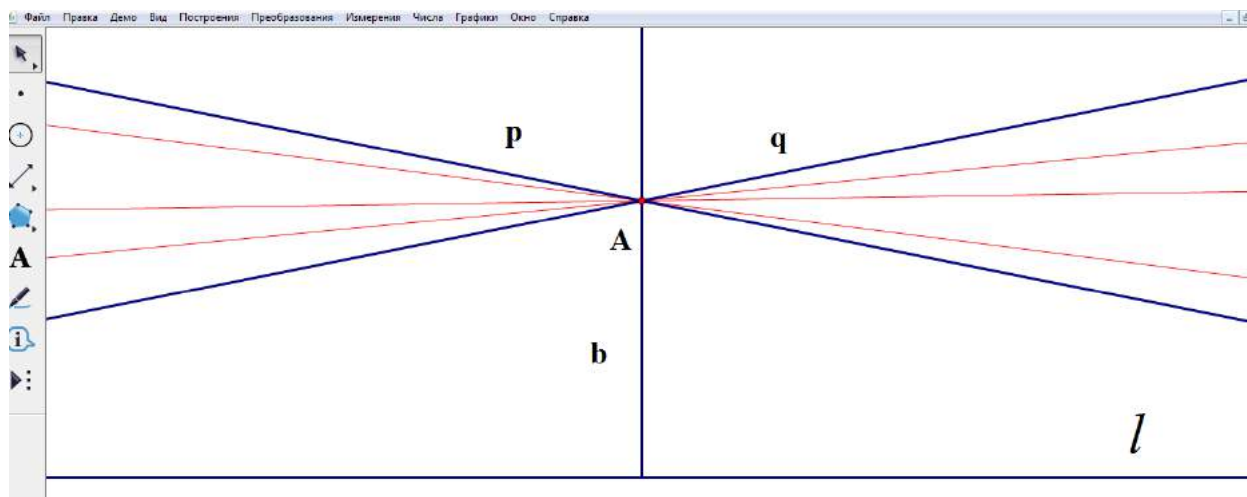


Рис.54. Сверхпараллельные прямые

Построение сверхпараллельных на Модели Пуанкаре

1) Выбрать инструмент «Линейка» и построим прямую – абсолют;

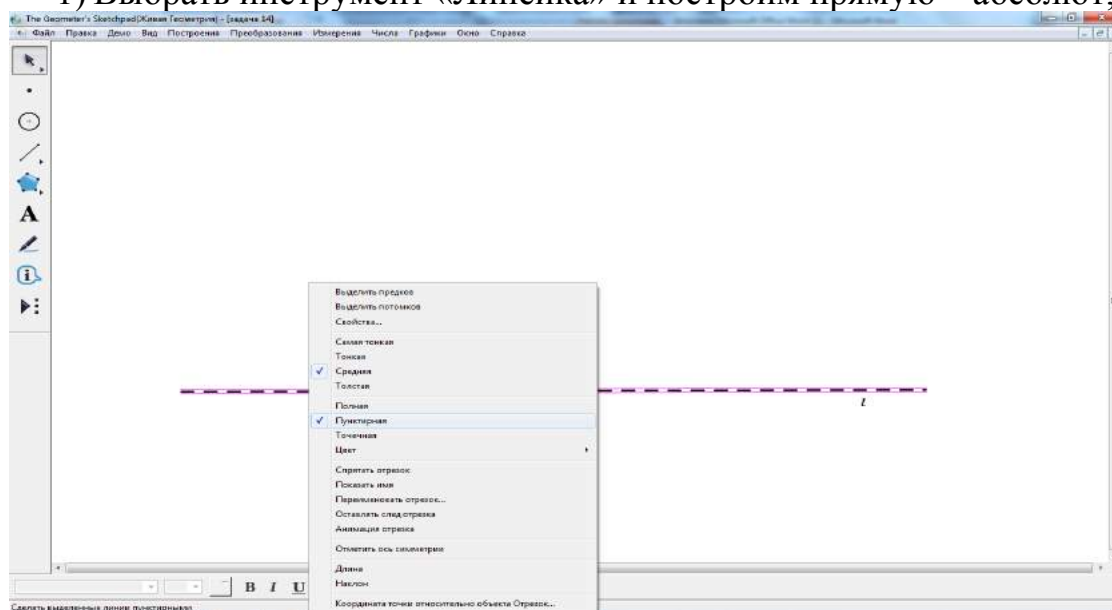


Рис.55

2) построить Л–прямую a ;

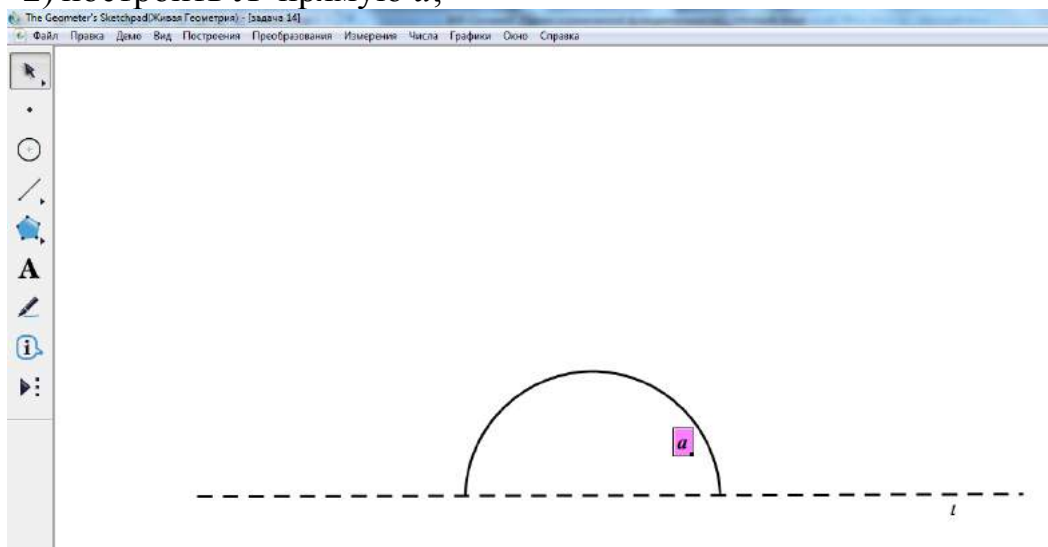


Рис.56

3) Выбрав любую точку F на Л-прямой a , построить еще две Л-прямые c и b , проходящие через нее;

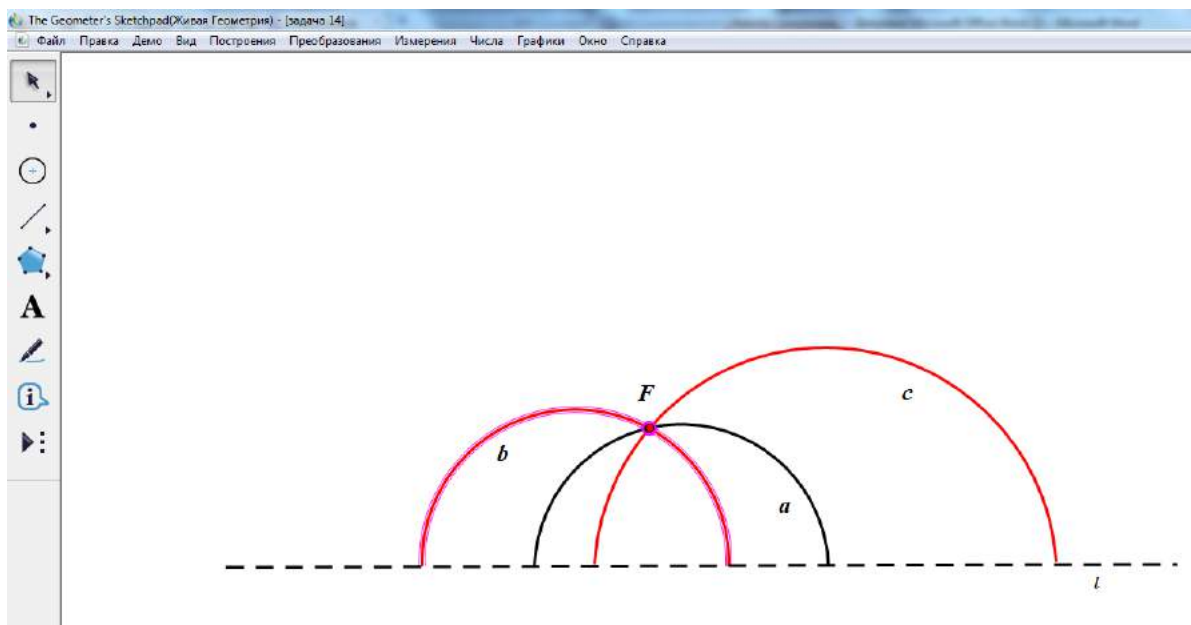


Рис.57

4) Выбрать точки пересечения прямых c и b с прямой-абсолютом l вне полуокружности a .

5) Построить Л-прямую d .

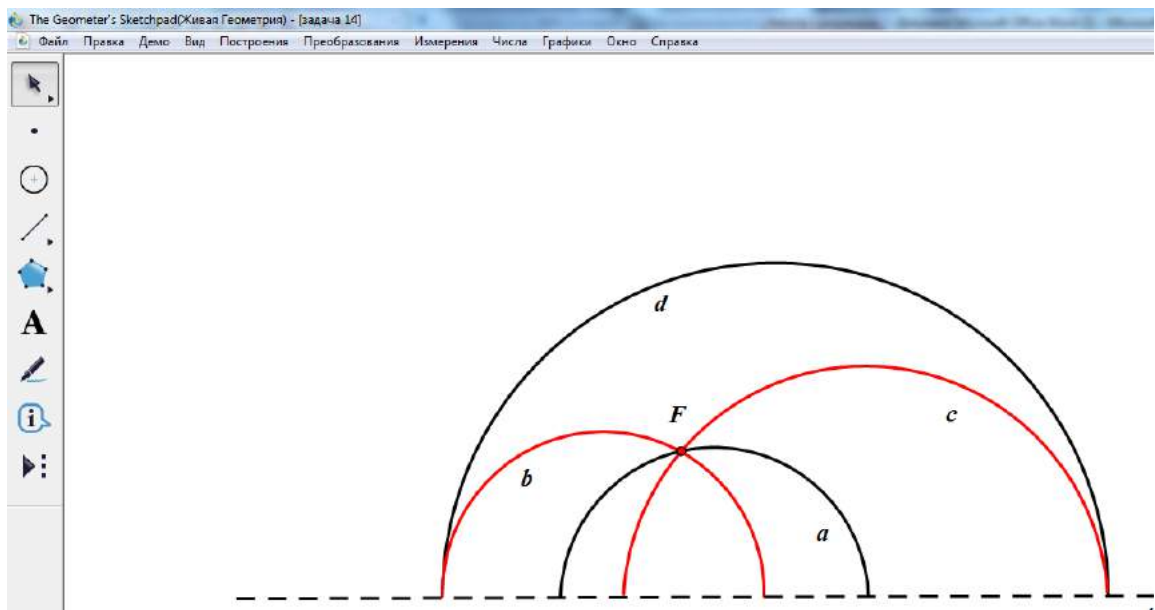


Рис.58

6) Построить полуокружности, проходящие через точку F , внутри полуокружности d (сверхпараллельные прямые к d , сама прямая d параллельна в одном направлении прямой b , в другом – a).

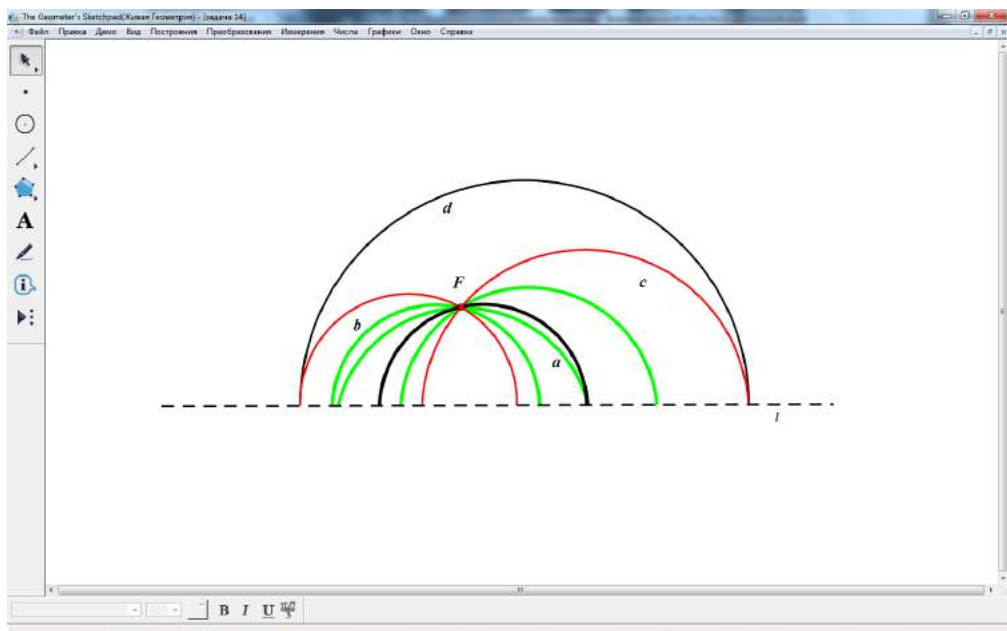


Рис.59

2.6. Исследовательские задания

В качестве основного средства организации исследовательской работы может выступать система исследовательских заданий.

Исследовательские задания – это предъявляемые обучающимся задания, содержащие проблему, решение которой требует проведения теоретического анализа, применения одного или нескольких методов научного исследования, с помощью которых учащиеся открывают ранее неизвестное для них знание.

Исследовательские задачи – задачи, решение которых предполагает выполнение нескольких этапов исследования.

К исследовательским заданиям относятся:

- познавательные задачи;
- творческие задачи;
- исследование.

Познавательные задачи – специально подобранные учебные задачи, которые должны отражать практику окружающей действительности. Одним из составляющих элементов организации познавательной деятельности на занятии является постановка и решение проблемы. Проблема – сложная познавательная задача, решение которой представляет существенный практический или теоретический интерес.

Творческие задачи могут носить форму загадки, могут быть составлены на основе необычного и интересного текста, содержать вопрос или задание (например, на доказательство).

Исследование. Такие задания входят в структуру задач на построение различных геометрических фигур.

Исследовательские задачи являются основной формой организации исследовательской деятельности. Создать проблемную ситуацию, поставить проблемный вопрос возможно на любом занятии, так как сама по себе проблемная ситуация подразумевает поиск решения, а значит и исследование проблемы с разных сторон. Начинать нужно с заданий доступных каждому обучающемуся. «Успех исследовательской деятельности обеспечивается правильным планированием видов и форм заданий, использованием

эффективных систем заданий, а также умелым руководством учителя этой деятельностью» [11].

Задача 1 (построение).

На первой модели Пуанкаре построить прямую равного наклона для двух параллельных в данном направлении прямых.

Решение:

Прямая называется *секущей равного наклона* к прямым a и b если $\angle BAa = \angle ABb$ (рис. 60).

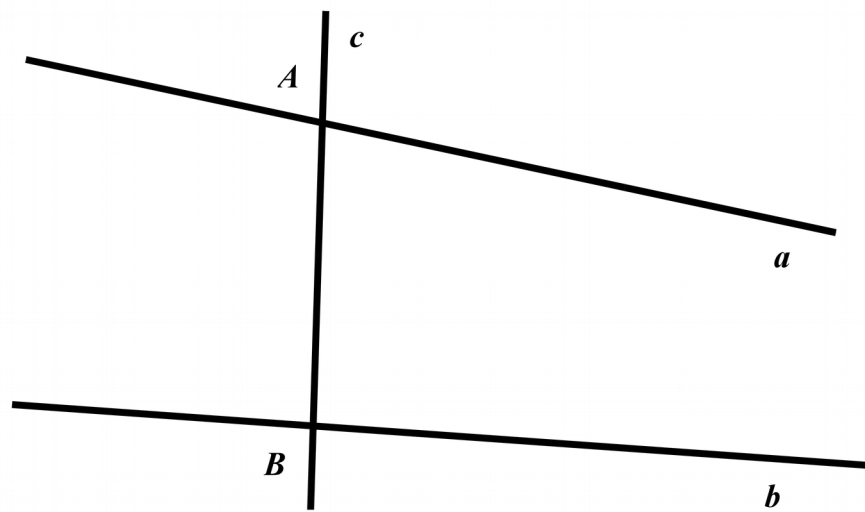


Рис.60

Рассмотрим случай, когда a и b – евклидовы полуокружности и A их общий конец. Если A_1 и B – вторые концы a и b , то p – полуокружность с центром $O \in l$ таким что $|OA_1| \cdot |OB| = r^2$ (так как $I_p(a) = b$, то $I_p(A) = A_1$, $I_p(A_1) = B$). Прямая t есть евклидова полуокружность с диаметром $[A_1B]$. Если M лежит с той же стороны от t , что a и b , то строим прямую m : $m \ni M$, $m \perp p$. Прямая m – искомая прямая равного наклона для a и b (рис. 61).

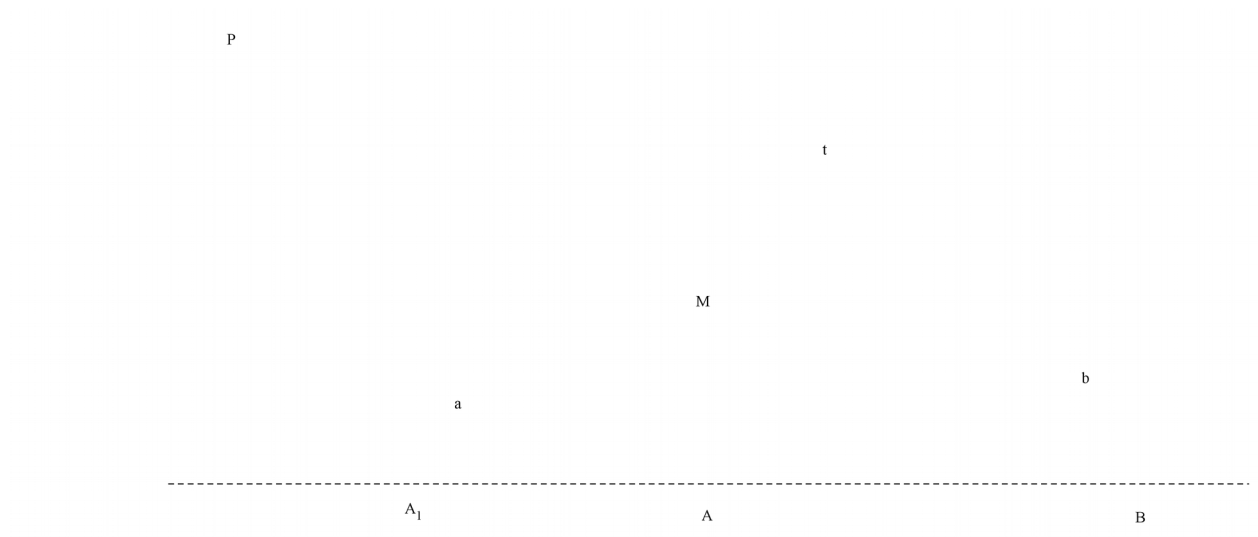


Рис.61.

Пошаговое построение рисунка:

1) Построим a и b – евклидовы полуокружности.



Рис.62.

2) Построим евклидову полуокружность p .

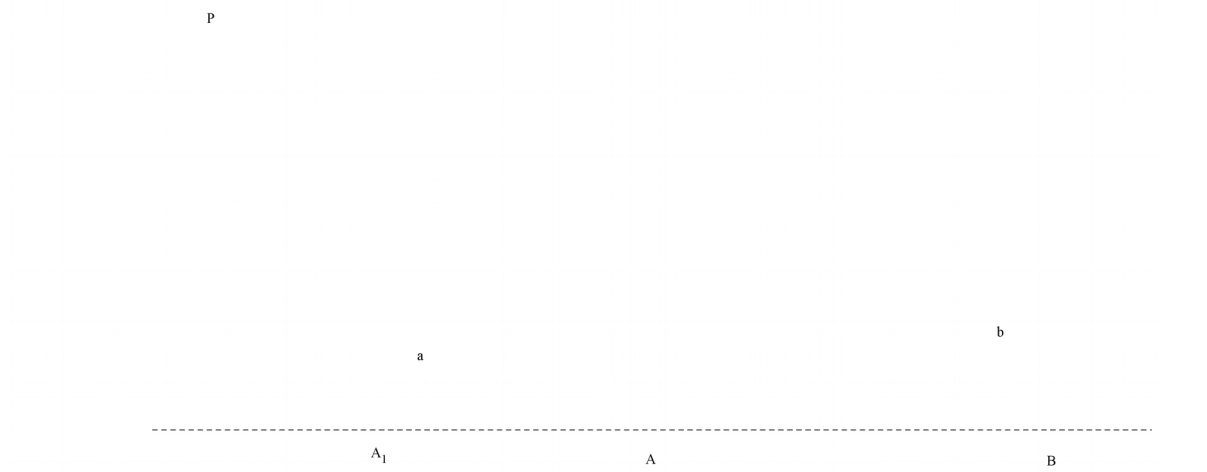


Рис.63.

3) Построим t – евклидову полуокружность с диаметром $[A_1B]$.

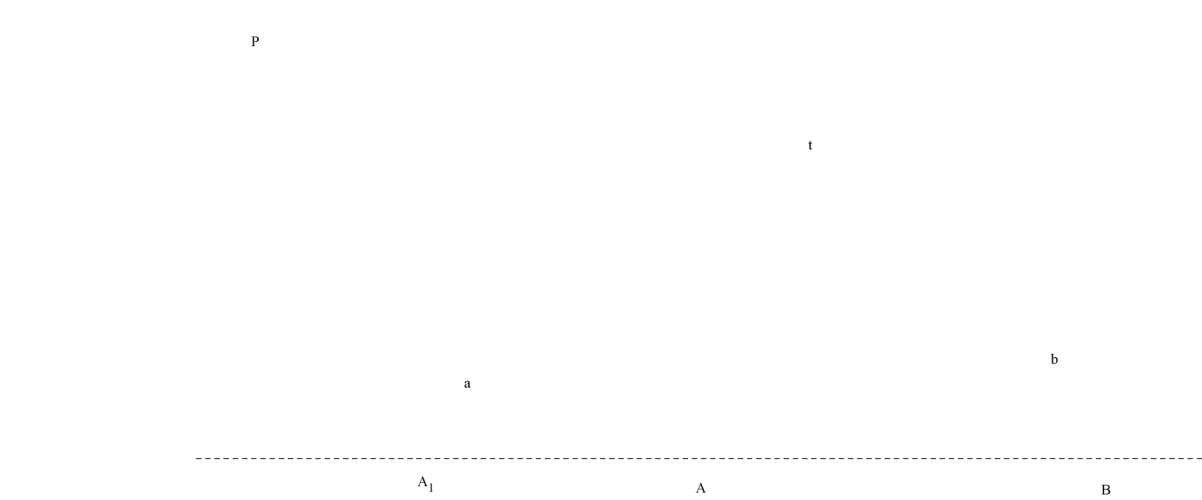


Рис.64.

4) Построим прямую m : $m \ni M, m \perp p$

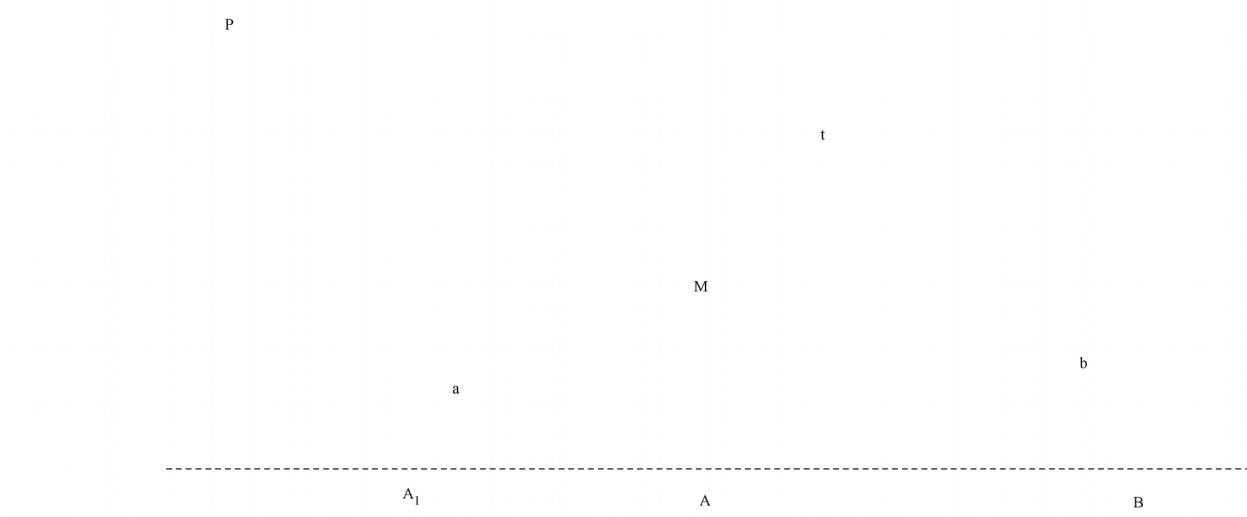


Рис.65.

Задача 2

На первой модели Пуанкаре построить прямую, перпендикулярную одной стороне острого угла и параллельную второй его стороне.

Дано: $\angle pOq < \frac{\pi}{2}$

Построить: прямую t : $t \perp p, t \parallel q$.

Решение:

1) Прямая p – евклидов луч, перпендикулярный l с началом $P \in l$ и ориентированная в сторону от l , q – евклидова полуокружность, ориентированная к точке $Q \in l$. Так как $t \parallel q$, то

$t \ni Q$. И так ω – евклидова полуокружность $(P, |PQ|)$

1) Построим p – евклидов луч

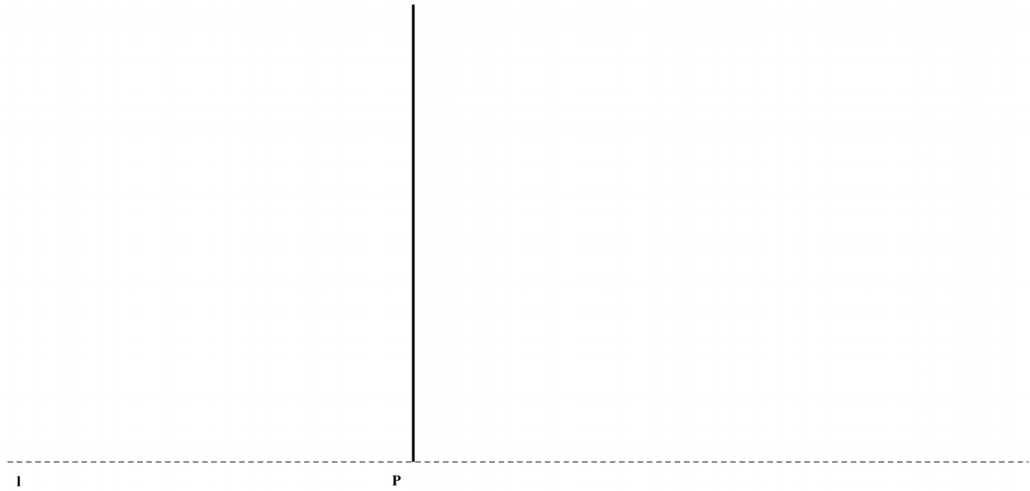


Рис.66.

2) Построим евклидову полуокружность q

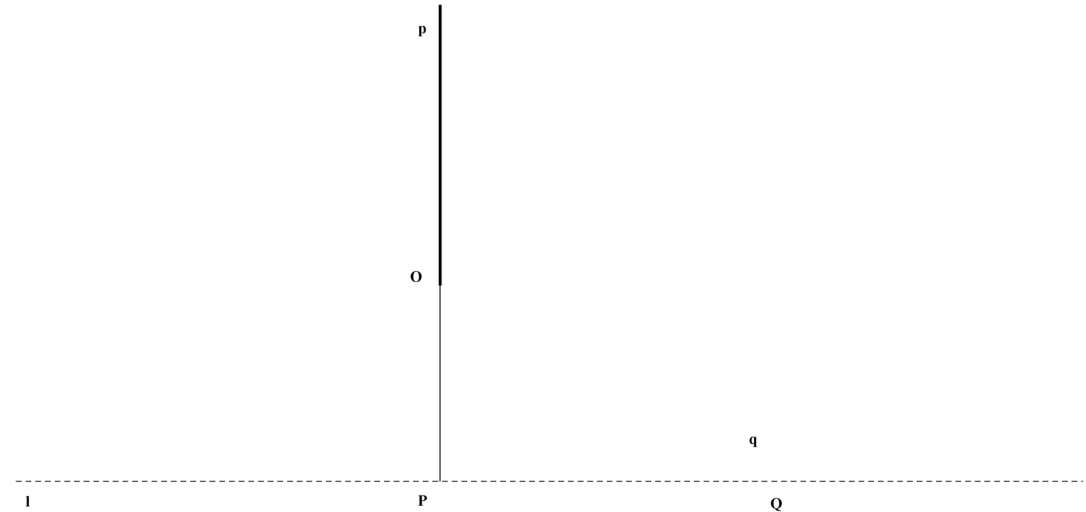


Рис.67.

3) Построим t евклидову полуокружность

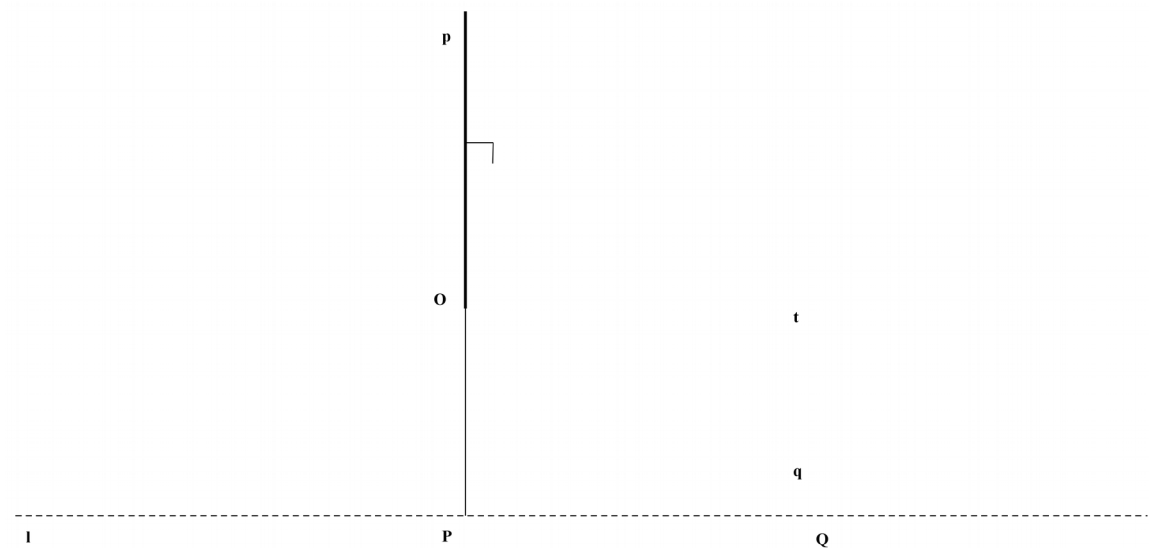


Рис.68.

2) Прямая q – евклидов луч, перпендикулярный l и направленный в сторону от l ; p – евклидова полуокружность. Так как $t \parallel q$ и t направлена от l , то t – евклидов луч. Так как $t \perp p$, а p – евклидова полуокружность, то $t \ni C$, где C – центр полуокружности p .

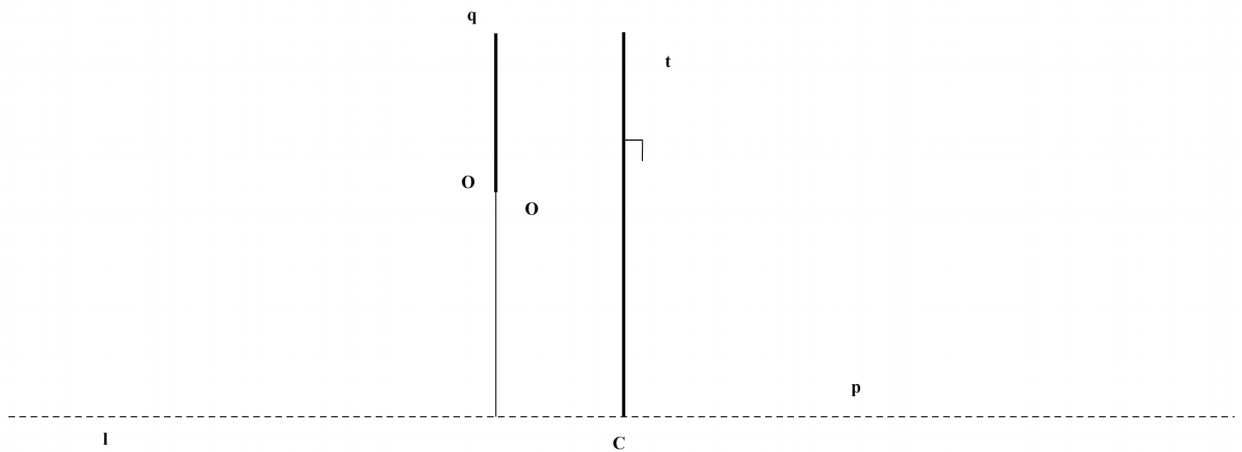


Рис.69.

1) Построим q – евклидов луч



Рис.70.

2) Построим p евклидову полуокружность

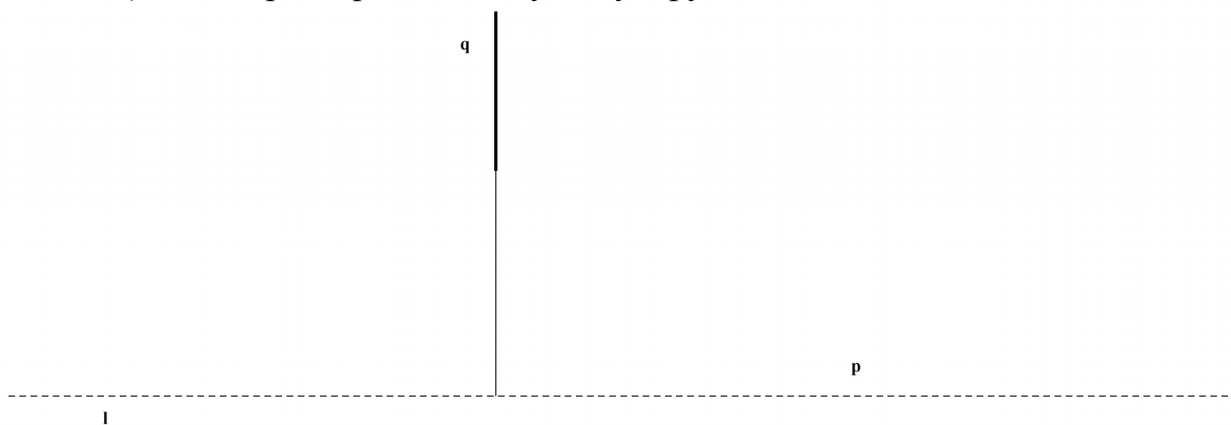


Рис.71.

3) Построим t – евклидов луч

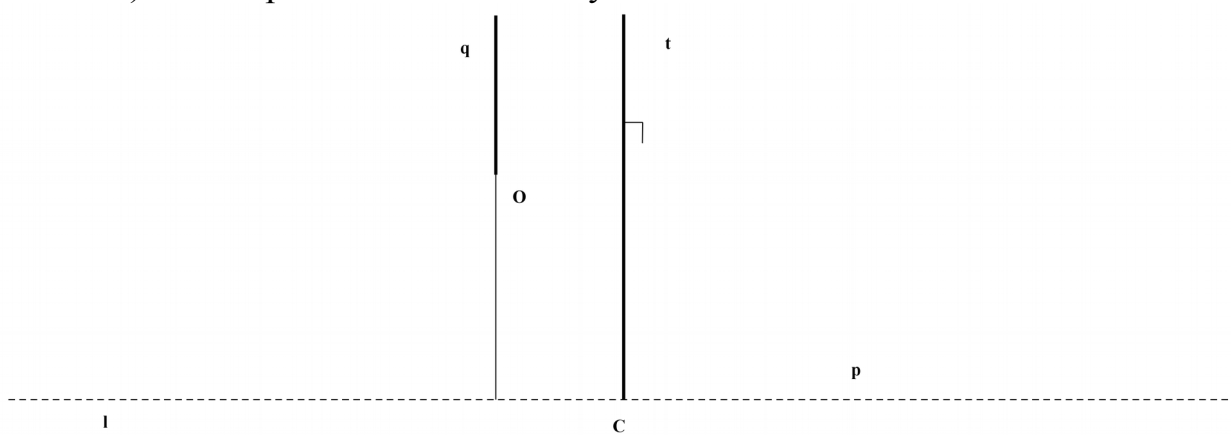


Рис.72.

Задание 3 (доказательство)

Доказать, что сумма $\angle$ -углов $\angle$ -треугольника меньше двух прямых.

Для доказательства воспользуемся тем фактом, что сумма двух острых углов прямоугольного треугольника меньше прямого угла.



Рис. 73

Построения:



Доказательство:

Из п. 6 следует, что $\triangle ABD$ – прямоугольный

Из п. 7 следует, что $\angle DAB + \angle ABD < \frac{\pi}{2}$

Из п. 6 следует, что $\triangle ADC$ – прямоугольный

Из п. 9 следует, что $\angle DCA + \angle CAD < \frac{\pi}{2}$

Из п. 8 и п. 10 следует, что $\angle DAB + \angle ABD + \angle DCA + \angle CAD < \pi$

Из п. 11 следует, что $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB < \pi$

Задание 4 (Исследование)

Выяснить, как расположена Л-прямая, проходящая через середины двух сторон Л-треугольника, по отношению к третьей стороне?

l

Рис. 74

1. $\triangle ABC$ – данный Л-треугольник
2. $AO_1 = O_1B, AO_2 = O_2C$
3. O_1O_2 – Л-прямая
4. $AP \perp O_1O_2, P \in O_1O_2$
5. Пусть O_1, O_2 – центры симметрии
6. $Z_{O_1}(A) = B, Z_{O_1}(P) = P_1, Z_{O_2}(A) = C, Z_{O_2}(P) = P_2$
7. Из п. 6 следует, что $BP_1 = AP, CP_2 = AP$
8. Из п. 7 следует, что $BP_1 = CP_2$
9. BCP_2P_1 – четырёхугольник, $\angle O_1P_1B = 90^\circ, \angle O_2P_2C = 90^\circ$
10. AP – отрезок дуги s
11. s – ось симметрии точек P_1 и P_2
12. Из п. 9 следует, что s – ось симметрии точек B и C
13. $BC \perp s, O_1O_2 \perp s$
14. Из п. 13 следует, что BC, O_1O_2 – расходящиеся

Задание 5 (доказательство)

Из Л-точки A к Л-прямой a можно провести только одну перпендикулярную Л-прямую p .

Переформулируем на языке модели: Из евклидовой точки A в верхней евклидовой полуплоскости к евклидовой полуокружности с центром на прямой l или к евклидовому лучу с началом на прямой l , перпендикулярному к l , можно провести только одну евклидову полуокружность с центром на l (или луч с началом на прямой l , перпендикулярный к l).

Получилась «новая» теорема евклидовой геометрии, справедливость которой следует из того, что все аксиомы, с помощью которых доказывается теорема в этой модели имеют место.

Построение:

Строим, имея в виду общий случай, радикальную ось окружности a и точки A как геометрическое место центров окружностей, проходящих через точку A и секущих ортогонально окружность a . Пересечение этой радикальной оси с прямой l и даст центр U искомой окружности (рис.).

l

Рис.75.

Для построения радикальной оси поступаем, например, так: из A проводим к окружности a касательную AB ; из середины C отрезка AB проводим перпендикуляр CU к «линии центров» AO . Окружность с центром U и радиусом UA – искомая (рис.75). На (рис.76) показан частный случай

l

Рис.76.

На (рис.77), иллюстрирующем постулат Лобачевского, AB – перпендикуляр к a .



Рис.77.

Задание 6 (построение)

Чтобы разделить отрезок AB «пополам», можно поступить так: восставить в концах отрезка перпендикуляры AP и BQ , взять на них точки P и Q по разные стороны от AB так, чтобы $AP \equiv BQ$. Прямая PQ пересекает AB в искомой середине C .



Рис.78.

Доказательство:

Далее, $AP \equiv P'A$ в силу симметрии; в этом можно убедиться и расчётом длин.

Задание 7 (построение)

Две сверхпараллельные Л-прямые a и b имеют общий перпендикуляр и притом только один.

Это значит, что существует лишь одна окружность, пересекающая ортогонально две данные окружности без общих точек и имеющая центр на их линии центров (рис.79).

Построение:

l

Рис.79.

Построение ведём, например, так: проводим общую касательную AB к окружностям a и b , делим её пополам в точке C и опускаем перпендикуляр на l , то есть строим радикальную ось двух данных окружностей. Проводим окружность с центром O радиусом r , равным длине касательной на O к двум данным окружностям. Окружность с центром O и есть изображение в данной модели общего перпендикуляра к двум сверхпараллельным Л-прямым.

Задание 8 (построение)

Каков бы ни был острый Л-угол α , всегда существует перпендикуляр p к одной его стороне a , параллельный другой стороне b .

Построение:

Проводим окружность p с центром O и радиусом OU , где O точка радикальной оси CO окружности a и точки U (Рис.80).

l

Рис.80.

Задание 9 (построение)

Сумма Л-углов Л-треугольника меньше двух прямых.

Этот факт иллюстрируется на (рис.81) и даёт «новую» теорему, относящуюся к окружностям с центрами на одной прямой.

l

Рис.81.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данное исследование было посвящено разработке материалов и исследовательских заданий по планиметрии Лобачевского в программной среде «Живая геометрия».

На основе анализа применения среды «живая геометрия» был разработан общий метод создания инструментов пользователя в программе Живая геометрия».

Проанализирована математическая литература по теме «Планиметрия Лобачевского», на основе которой составлена система задач и даны методические рекомендации по решению этих задач в программной среде «Живая геометрия».

На основе приведенных результатов сформулирован вывод: Программная среда «Живая геометрия» позволяет продемонстрировать тему Планиметрия Лобачевского интересно и легко, развивая умственную деятельность учащихся их абстрактное и логическое мышление.

Материалы выпускной квалификационной работы могут использоваться при изучении темы планиметрия Лобачевского.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреева З.И. Основания геометрии: элементы геометрии Лобачевского: метод. рекоменд. /сост. З.И. Андреева, Г.Г. Шеремет; Перм. ун-т. – Пермь, 2007. – 47 с.
2. Атанасян Л.С. Элементы геометрии Лобачевского. Планиметрия. Синтаксис-Пресс, 1997.
3. Атанасян Л.С. Геометрия: в двух частях / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. – М.: Просвещение, 1986. – Ч. 1. – 268 с.
4. Бокова К.Д. Геометрия Лобачевского / К.Д. Бокова, И.Г. Майоров, Д.В. Козлова, Н.Ю. Потапова // Юный ученый. – 2016. – № 6.1. – С. 13-15.
5. Дубровский В.Н. Динамическая геометрия в школе // Компьютерные инструменты в школе. – 2008. – № 1.
6. Дубровский В.Н. Динамическая геометрия в школе. Геометрические построения. Геометрические места точек // Компьютерные инструменты в школе. – 2008. – № 2.
7. Дубровский В.Н. Динамическая геометрия в школе. Геометрические преобразования // Компьютерные инструменты в школе. – 2008. – № 3.
8. Дубровский В.Н. Динамическая геометрия в школе. Измерения и вычисления // Компьютерные инструменты в школе. – 2008. – № 4.
9. Дубровский В.Н. Динамическая геометрия в школе. Работа с графиком средствами динамической геометрии // Компьютерные инструменты в школе. – 2008. – № 5.
10. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. – М.: ФИЗМАТЛИТ; 2003. – 67 с.
11. Иванов С.Г. Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика» /С.Г. Иванов, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2013. – 144 с.
12. Иванов С.Г. Сочетание дискуссии с экспериментом на уроке математики // Компьютерные инструменты в школе. – 2009. – № 2.

13. Живая геометрия // сайт И.С. Храповицкого: – Режим доступа: <http://janka-x.livejournal.com/>
14. Каган В.Ф. Лобачевский / В.Ф. Каган – М. – Л. Изд-во АН СССР, 1948.
15. Лаптев Б.Л. Николай Иванович Лобачевский и его геометрия / Б.Л. Лаптев. – М.: Просвещение, 1976.
16. Лобачевский Н. И. Сочинения по геометрии / Н. И. Лобачевский – М. – Л.: ГИТТЛ, 1946–1949.
17. Смилга В.П. В погоне за красотой. Занимательное введение в неевклидову геометрию / В.П. Смилга – М. : Молодая гвардия, 1988.
18. Широков П.А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. – М. : Наука, 1983.