

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра высшей математики

Выпускная квалификационная работа

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДЕЛИМОСТИ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ
В СТАРШЕЙ ШКОЛЕ**

Работу выполнил
студент группы Z161
специальности 050201.65
«Математика»
Ушков Станислав
Алексеевич

подпись

«Допущена к защите в ГАК» Зав. кафедрой высшей математики _____ Дата подпись	Научный руководитель: кандидат пед. наук, доцент Корзнякова Юлия Викторовна _____ подпись
--	--

Пермь
ПГГПУ
2016

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА I. ОСНОВЫ ДЕЛИМОСТИ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ	5
1.1. Основные понятия.....	5
1.2. Свойства делимости.....	6
1.3. Деление с остатком	7
1.4. Простые и составные числа. Основная теорема арифметики	9
1.5. НОД и НОК.....	12
1.6. Количество и сумма делителей натурального числа	16
1.7. Признаки делимости.....	17
ГЛАВА II. ОРГАНИЗАЦИЯ ПОДГОТОВКИ ШКОЛЬНИКОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ДЕЛИМОСТЬ	21
2.1. Типы задания 19 ЕГЭ по математике.....	21
2.2. Занятие 1. Делимость целых чисел	23
2.3. Занятие 2. Числовые наборы и деление с остатком	32
2.3. Занятие 3. Разные задачи на числа	38
2.4. Дистанционная форма контроля за знаниями учащихся	46
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	48
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	50

ВВЕДЕНИЕ

Одной из целей математического образования, нашедшей отражение в федеральном компоненте государственного стандарта по математике, является интеллектуальное развитие учащихся. Эта цель выходит на одно из ведущих мест при изучении математики.

Поскольку одним из основных отличий задания 19 от остальных задач ЕГЭ является ее явно выраженный нестандартный характер, а сведения, необходимые для решения этой задачи, могут относиться к самым различным разделам школьного курса, построение решения может потребовать нетривиальных идей и методов.

Перечисленные обстоятельства обусловили **актуальность** выбранной темы.

Объект исследования: процесс подготовки учащихся к ЕГЭ по математике.

Предмет исследования: процесс подготовки учащихся к решению задачи 19 из ЕГЭ по математике профильного уровня.

Цель работы: организация системы подготовки школьников к решению задания 19 ЕГЭ по математике (профильный уровень).

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи:**

- изучить и проанализировать учебную и методическую литературу по вопросам делимости целых чисел в старшей школе;
- выделить типы задания 19 ЕГЭ по математике (профильный уровень);
- указать способы решения выделенных типов задания 19;
- разработать занятия для подготовки учащихся к решению задач на делимость в процессе подготовки к ЕГЭ по математике (профильный уровень).

Работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Во введении обоснована актуальность, представлены объект, предмет исследования, изложены цели и задачи данной работы.

Первая глава содержит теоретический материал по теме «Делимость в кольце целых чисел».

Во второй главе представлены способы решения задач на делимость в профильном уровне ЕГЭ по математике, проиллюстрированные примерами.

В заключении обобщены результаты работы, сделаны выводы.

Список литературы содержит 27 библиографических источников.

ГЛАВА I. ОСНОВЫ ДЕЛИМОСТИ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

1.1. Основные понятия

Натуральные числа – это ряд чисел $1, 2, 3, \dots$, представляющих собой число предметов или более строго – мощности (количества элементов) непустых конечных множеств. Множество натуральных чисел обозначается N .

Целые числа – расширение множества натуральных чисел N , получаемое добавлением к N нуля и отрицательных чисел вида $-n$. Множество целых чисел обозначается Z . Необходимость рассмотрения целых чисел продиктована невозможностью, в общем случае, вычесть из одного натурального числа другое – можно вычитать только меньшее число из большего.

Разделить целое число a на целое число b – это значит найти такое k , при умножении которого на b получается a , то есть $b \cdot k = a$. Если для целых чисел a и b такое целое число k существует, то говорят, что a делится на b .

Определение. Целое число a делится на целое число b , не равное нулю, если существует целое число k такое, что $a = b \cdot k$.

Если a делится на b , то b называется делителем числа a .

Например, -48 делится на 8 , так как существует такое целое число k , что $-48 = 8 \cdot k$, а именно $k = -6$; число 35 не делится на 4 , так как не существует такого целого числа k , при котором верно равенство $35 = 4 \cdot k$.

Вместо « a делится на b » говорят также: « a кратно b », «число b – делитель числа a », «число b делит a ».

Обозначают: $a : \mathbb{Z} b$ (a делится на b).

Отметим, что предложение « a делится на b » представляет собой некоторое высказывание о соотношении между этими числами.

Замечание: понятие делимости относится только к целым числам. Для рациональных чисел аналогичное понятие было бы бессодержательным, так как для любых двух рациональных чисел a и b , где $b \neq 0$ всегда существует

рациональное число, являющееся их частным. Поэтому в дальнейшем, говоря о делимости, под «числом» будет подразумеваться целое число.

1.2. Свойства делимости

Рассмотрим простейшие свойства делимости. Для любых целых чисел a, b, c справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Если $a : b$ и c – частное от деления, то c – единственное.

Теорема 2. $a : a$

Теорема 3. Если $a : b$ и $b : c$, то $a : c$.

Теорема 4. Если $a : b$ и $b : a$, то или $a = b$, или $a = -b$.

Теорема 5. Если $a : b$ и $|b| > |a|$, то $a = 0$.

Теорема 6. Если $a : b$ и $a \neq 0$, то $|a| \geq |b|$.

Теорема 7. Для того чтобы $a : b$ необходимо и достаточно чтобы $|a| : |b|$.

Теорема 8. Если $a_1 : b, a_2 : b, \dots, a_n : b$, то $(a_1 \pm a_2 \dots \pm a_n) : b$.

Теорема 9. Если сумма чисел и $k - 1$ слагаемое этой суммы делится на некоторое число c , то и k -е слагаемое делится на c .

Свойства делимости находят применение при решении задач.

Пример 1. Пусть a делится на b и c делится на d . Выясним, делится ли произведение ac на bd .

Решение. Из определения делимости следует, что $a = b \cdot k$, $c = d \cdot m$, где k и m - целые числа. Отсюда $ac = (bk) \cdot (dm) = (bd) \cdot (km)$.

Так как k и m – целые числа, то km является целым числом. Значит, существует такое целое число, при умножении которого на bd , в произведении получается ac , то есть по определению, ac делится на bd .

Пример 2. Докажем, что при любом натуральном n , большем 1, число $n^4 + 4$ является составным.

Решение. Разложим сумму $n^4 + 4$ на множители:

$$n^4 + 4 = n^4 + 4 + 4n^2 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 \\ = (n^2 + 2 + 2n)(n^2 + 2 - 2n)$$

При $n \in \mathbb{N}$ и $n > 1$ каждый из множителей является натуральным числом, большим 1. Для первого множителя это очевидно, для второго это можно доказать, выделив из него квадрат двучлена: $n^2 + 2 - 2n = n^2 - 2n + 1 + 1 = (n - 1)^2 + 1$. Значит, при $n \in \mathbb{N}$ и $n > 1$ число $n^4 + 4$ имеет два натуральных делителя, больших 1, то есть является составным числом.

1.3. Деление с остатком

Определение. Разделить целое число a на целое число b с остатком – это значит представить его в виде $a = bq + r$, где q и r целые числа, $0 \leq r < |b|$.

Основную роль во всей арифметике целых чисел играет теорема о делении с остатком.

Теорема 10. Для любых целых a и b существует единственная пара чисел q и r , удовлетворяющих условиям, $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$.

Замечание. В частности, если $r = 0$, то $a = bq$ и a делится на b .

Замечание. Если $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$, то q называется неполным частным, а r – остатком от деления a на b .

Из теоремы о делении с остатком следует, что при фиксированном целом $m > 0$ любое целое число, a можно представить в одном из следующих видов:

$$a = m \cdot q \\ a = m \cdot q_1 + 1 \\ a = m \cdot q_2 + 2 \\ \dots \dots \dots \\ a = m \cdot q_{m-1} + (m - 1)$$

При этом, если $a < m$, то будем иметь :

$$a = m \cdot 0 + a, \text{ если } a > 0 \text{ и } a = m \cdot (-1) + (m + a), \text{ если } a < 0.$$

Пример 3. Доказать, что для любого целого числа n выражение $n^3 - n$ делится на 3.

Доказательство. Если $n = 3$, то $n^3 - n = 24 : 3$ и доказываемое утверждение очевидно.

Если $n \neq 3$, то в соответствии с теоремой о делении с остатком, имеет место представление $n = 3 \cdot q + r$, где $q, r \in \mathbb{Z}$, а число r может принимать одно из значений: 1 или 2. Получим выражение $n^3 - n$ через q и r :

$$n^3 - n = (3q + r)^3 - (3q + r) = 27q^3 + 27q^2r + 9qr^2 - 3q + (r^3 - r).$$

Очевидно, что первые четыре слагаемых левой части полученного выражения делятся на 3. При $r = 1$ выражение $r^3 - r$ принимает значение, равное 0, а при $r = 2$ – значение, равное 6, т. е. при любом возможном значении r выражение $r^3 - r$ делится на 3. Следовательно, на 3 делится вся сумма $n^3 - n$.

Пример 4. Найдём все числа, принадлежащие интервалу (25000, 30000), которые при делении на 1965 дают остаток, равный 125.

Искомые числа обозначим через x , тогда, по теореме о делении с остатком, существует такое целое число q , что выполняется равенство:

$$x = 1965 \cdot q + 125.$$

Найдём возможные значения q , пользуясь неравенствами $25000 < x < 30000$.

$$\begin{cases} 25000 < x < 30000, \\ x = 1965 \cdot q + 125, \end{cases}$$

$$25000 < 1965 \cdot q + 125 < 30000$$

$$24875 < 1965 \cdot q < 29875$$

$$12,659 \dots < q < 15,203 \dots$$

Так как $q \in \mathbb{Z}$, то q может принимать одно из значений: 13, 14, 15. Тогда искомые числа будут:

$$x_1 = 1965 \cdot 13 + 125 = 25670,$$

$$x_2 = 1965 \cdot 14 + 125 = 27635,$$

$$x_3 = 1965 \cdot 15 + 125 = 29600.$$

1.4. Простые и составные числа. Основная теорема арифметики

Натуральное число, имеющее только два делителя: 1 и само число, называется простым числом.

Натуральное число, имеющее натуральный делитель, отличный от него самого и 1, называется составным числом.

Число 1 не причисляется ни к простым, ни к составным числам.

Основная теорема арифметики утверждает возможность разложения любого целого числа, которое больше единицы, на простые множители. Для формулировки и доказательства основной теоремы арифметики рассматриваются две вспомогательные теоремы.

Теорема 11. Любое целое положительное и отличное от единицы число a либо делится на простое число p , либо a и p – взаимно простые числа.

Доказательство. Наибольший общий делитель чисел a и p делится на p . Так как p – простое число по условию, то его положительными делителями являются лишь 1 и p , следовательно, НОД(a, p) равен либо 1, либо p . В первом случае НОД(a, p) = 1, откуда следует, что числа a и p – взаимно простые. Во втором случае НОД(a, p) = p , а так как a делится на НОД(a, p), то a делится на p .

Теорема. Если произведение нескольких целых положительных и отличных от единицы множителей делится на простое число p , то хотя бы один множитель делится на p .

Доказательство. Каждый из множителей согласно предыдущей теореме либо взаимно прост с числом p , либо делится на p . Если бы все множители были взаимно просты с p , то произведение этих множителей было бы взаимно просто с p в силу свойств взаимно простых чисел. Поэтому, хотя бы один из множителей делится на p .

Основная теорема арифметики.

Теорема 12. Любое целое число, которое больше 1, можно разложить на произведение простых множителей, причем это разложение единственно, если не учитывать порядок следования множителей.

Доказательство. Пусть a – целое число, большее единицы.

Сначала докажем возможность разложения числа a на простые множители.

Пусть p_1 – наименьший положительный и отличный от 1 делитель числа a . В силу теоремы, доказанной в разделе таблица простых чисел, число p_1 – простое. Тогда по определению делимости существует такое целое число a_1 , что $a = p_1 \cdot a_1$. Если a_1 больше единицы, то существует его наименьший простой делитель p_2 , откуда $a_1 = p_2 \cdot a_2$ и $a = p_1 \cdot p_2 \cdot a_2$. Если a_2 больше единицы, то существует его наименьший простой делитель p_3 , поэтому $a_2 = p_3 \cdot a_3$, откуда $a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot a_3$. И так продолжаем этот процесс, пока не получим $a_n = 1$, что неизбежно, так как $a, a_1, a_2, \dots$ – последовательность убывающих целых положительных чисел. Итак, мы всегда можем получить разложение числа a на простые множители вида $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ (при $n = 1$ имеем $a = p_1$, это разложение соответствует случаю, когда число a простое).

Осталось доказать единственность полученного разложения.

Предположим, что помимо разложения $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ существует еще одно разложение числа a на простые множители $q_1, q_2, \dots, q_m$, вида $a = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_m$. Тогда должно быть справедливо равенство $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_m$. Покажем, что при $n \neq m$ это равенство невозможно, а при $n = m$ произведения $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ и $q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_m$ тождественно равны.

Правая часть последнего равенства делится на q_1 , тогда в силу предыдущей теоремы хотя бы один из множителей $p_1, p_2, \dots, p_n$ должен делиться на q_1 . Допустим, на q_1 делится p_1 , но так как числа p_1 и q_1 простые,

то p_1 делится на q_1 только тогда, когда $q_1 = p_1$. Это позволяет нам сократить обе части равенства $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$ на $q_1 = p_1$, получаем

$p_2 \cdot \dots \cdot p_n = q_2 \cdot \dots \cdot q_n$. Рассуждая аналогично про p_2 и q_2 , приходим к равенству $p_3 \cdot \dots \cdot p_n = q_3 \cdot \dots \cdot q_n$. И так действуем дальше, пока в какой либо части равенства не сократятся все множители. При $n \neq m$ мы получим или равенство $1 = q_{n+1} \cdot \dots \cdot q_m$, или равенство $p_{m+1} \cdot \dots \cdot p_n = 1$, которые невозможны для простых чисел $q_{n+1}, \dots, q_m$ и $p_{m+1}, \dots, p_n$. Если же $n = m$, то мы получим тождество $1 = 1$, которое указывает на тождественное равенство разложений $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ и $a = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$. Этим доказана единственность разложения числа на простые множители.

Пример 5. Представить число 985608 в виде канонического разложения на простые множители.

Для этого будем последовательно делить данное число на простые числа, начиная с наименьшего простого числа 2. Процесс факторизации данного числа схематично можно представить в виде:

985608	2
492804	2
246402	2
123201	3
41067	3
13689	3
4563	3
1521	3
507	13
169	13
13	1
1	

Таким образом, каноническое разложение на простые множители имеет вид: $985608 = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 13^2$.

Пример 6. Найти пять наименьших натуральных чисел n , для которых число $n^2 - 1$ является произведением трёх различных простых чисел p_1, p_2, p_3 .

Очевидно, что любое натуральное число n может быть либо чётным, либо нечётным, т. е. может быть записано одним из следующих способов: $n = 2k$ или $n = 2k + 1$, где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

1. Если $n = 2k + 1$, то $n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$. По условию, $n^2 - 1$ есть произведение трёх простых различных чисел p_1, p_2, p_3 , но при указанных n это условие невыполнимо.

2. Если $n = 2k$, то $n^2 - 1 = (2k)^2 - 1 = 4k^2 - 1 = (2k - 1)(2k + 1)$.

При $k = 1, k = 2, k = 3, k = 4, k = 5, k = 6$ условие задачи не выполняется.

При $k = 7$ $n^2 - 1 = 195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$, т. е. $n_1 = 14$.

При $k = 8$ $n^2 - 1 = 255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$, т. е. $n_2 = 16$.

При $k = 9$ условие задачи не выполняется.

При $k = 10$ $n^2 - 1 = 399 = 3 \cdot 7 \cdot 19$, т. е. $n_3 = 20$.

При $k = 11$ $n^2 - 1 = 483 = 3 \cdot 7 \cdot 23$, т. е. $n_4 = 22$.

При $k = 12, k = 13, k = 14, k = 15$ условие задачи не выполняется.

При $k = 16$ $n^2 - 1 = 1023 = 3 \cdot 11 \cdot 31$, т. е. $n_5 = 32$.

1.5. НОД и НОК

Определение. Наибольшим общим делителем (НОД) натуральных чисел x и y , называется такое наибольшее натуральное число, на которое делятся и x , и на y .

Свойства наибольшего общего делителя.

Наибольший общий делитель обладает рядом свойств:

1. Наибольший общий делитель чисел a и b равен наибольшему общему делителю чисел b и a , то есть, $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, a)$.

Это свойство НОД напрямую следует из определения наибольшего общего делителя.

2. Если a делится на b , то множество общих делителей чисел a и b совпадает со множеством делителей числа b , в частности, $\text{НОД}(a, b) = b$.

Доказательство. Любой общий делитель чисел a и b является делителем каждого из этих чисел, в том числе и числа b . С другой стороны, так как a кратно b , то любой делитель числа b является делителем и числа a в силу того, что делимость обладает свойством транзитивности, следовательно, любой делитель числа b является общим делителем чисел a и b . Этим доказано, что если a делится на b , то совокупность делителей чисел a и b совпадает с совокупностью делителей одного числа b . А так как наибольшим делителем числа b является само число b , то наибольший общий делитель чисел a и b также равен b , то есть, $\text{НОД}(a, b) = b$.

В частности, если числа a и b равны, то $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, a) = \text{НОД}(b, b) = a = b$. К примеру, $\text{НОД}(132, 132) = 132$.

Доказанное свойство наибольшего делителя позволяет нам находить НОД двух чисел, когда одно из них делится на другое. При этом НОД равен одному из этих чисел, на которое делится другое число. Например, $\text{НОД}(8, 24) = 8$, так как 24 кратно восьми.

3. Если $a = b \cdot q + c$, где a , b , c и q – целые числа, то множество общих делителей чисел a и b совпадает со множеством общих делителей чисел b и c , в частности, $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, c)$.

Обоснуем это свойство НОД.

Так как имеет место равенство $a = b \cdot q + c$, то всякий общий делитель чисел a и b делит также и c (это следует из свойств делимости). По этой же причине, всякий общий делитель чисел b и c делит a . Поэтому совокупность общих делителей чисел a и b совпадает с совокупностью общих делителей чисел b и c . В частности, должны совпадать и

наибольшие из этих общих делителей, то есть, должно быть справедливо следующее равенство $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, c)$.

4. Если m – любое натуральное число, то $\text{НОД}(m \cdot a, m \cdot b) = m \cdot \text{НОД}(a, b)$.

Обоснование этого свойства наибольшего общего делителя таково. Если умножить на m обе стороны каждого из равенств алгоритма Евклида, то получим, что $\text{НОД}(m \cdot a, m \cdot b) = m \cdot r_k$, а r_k – это $\text{НОД}(a, b)$. Следовательно, $\text{НОД}(m \cdot a, m \cdot b) = m \cdot \text{НОД}(a, b)$.

На этом свойстве наибольшего общего делителя основан способ нахождения НОД с помощью разложения на простые множители.

5. Пусть p – любой общий делитель чисел a и b , тогда $\text{НОД}(a:p, b:p) = \text{НОД}(a, b):p$, в частности, если $p = \text{НОД}(a, b)$ имеем $\text{НОД}(a:\text{НОД}(a, b), b:\text{НОД}(a, b)) = 1$, то есть, числа $a:\text{НОД}(a, b)$ и $b:\text{НОД}(a, b)$ – взаимно простые.

Так как $a = p \cdot (a:p)$ и $b = p \cdot (b:p)$, и в силу предыдущего свойства, мы можем записать цепочку равенств вида $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(p \cdot (a:p), p \cdot (b:p)) = p \cdot \text{НОД}(a:p, b:p)$, откуда и следует доказываемое равенство.

Только что доказанное свойство наибольшего общего делителя лежит в основе приведения обыкновенных дробей к несократимому виду.

Теорема 13. Наименьшее общее кратное двух положительных целых чисел a и b равно произведению чисел a и b , деленному на наибольший общий делитель чисел a и b , то есть, $\text{НОК}(a, b) = a \cdot b : \text{НОД}(a, b)$.

Доказательство. Пусть M – какое-нибудь кратное чисел a и b . То есть, M делится на a , и по определению делимости существует некоторое целое число k такое, что справедливо равенство $M = a \cdot k$. Но M делится и на b , тогда $a \cdot k$ делится на b .

Обозначим $\text{НОД}(a, b)$ как d . Тогда можно записать равенства $a = a_1 \cdot d$ и $b = b_1 \cdot d$, причем $a_1 = a:d$ и $b_1 = b:d$ будут взаимно простыми числами. Следовательно, полученное в предыдущем абзаце условие, что $a \cdot k$ делится на b , можно переформулировать так: $a_1 \cdot d \cdot k$ делится на $b_1 \cdot d$, а это в силу свойств делимости эквивалентно условию, что $a_1 \cdot k$ делится на b_1 .

В этом случае по свойству взаимно простых чисел, так как $a_1 \cdot k$ делится на b_1 , и a_1 не делится на b_1 (a_1 и b_1 – взаимно простые числа), то на b_1 должно делиться k . Тогда должно существовать некоторое целое число t , для которого $k = b_1 t$, а так как $b_1 = b:d$, то $k = b:d \cdot t$. Подставив в равенство $M = a \cdot k$ вместо k его выражение вида $b:d \cdot t$, приходим к равенству $M = a \cdot b:d \cdot t$.

Так мы получили равенство $M = a \cdot b:d \cdot t$, которое дает вид всех общих кратных чисел a и b . Из того, что a и b числа положительные по условию следует, что при $t = 1$ мы получим их наименьшее положительное общее кратное, которое равно $a \cdot b:d$. Этим доказано, что $\text{НОК}(a, b) = a \cdot b:\text{НОД}(a, b)$.

Доказанная связь между наименьшим общим кратным и наибольшим общим делителем двух данных чисел позволяет найти НОК через НОД.

Также нужно записать два важных следствия из рассмотренной теоремы.

1. Общие кратные двух чисел совпадают с кратными их наименьшего общего кратного.

Это действительно так, так как любое общее кратное M чисел a и b определяется равенством $M = \text{НОК}(a, b) \cdot t$ при некотором целом значении t .

2. Наименьшее общее кратное взаимно простых положительных чисел a и b равно их произведению.

Обоснование этого факта достаточно очевидно. Так как a и b взаимно простые, то $\text{НОД}(a, b) = 1$, следовательно, $\text{НОК}(a, b) = a \cdot b$: $\text{НОД}(a, b) = a \cdot b : 1 = a \cdot b$.

1.6. Количество и сумма делителей натурального числа

Теорема 14. Пусть $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_s^{k_s}$ каноническое разложение на простые множители натурального числа n . Тогда число $\tau(n)$ натуральных делителей числа n , включая 1 и само число n , выражается формулой $\tau(n) = (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \dots \cdot (k_s + 1)$.

Доказательство. Любой делитель натурального числа n можно представить в виде $d = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_s^{m_s}$, где m_i – целые числа, удовлетворяющие условиям $0 \leq m_1 \leq k_1, \dots, 0 \leq m_s \leq k_s$.

Так как каждому делителю d можно поставить в соответствие упорядоченный набор $(m_1, m_2, \dots, m_s)$ и наоборот, то количество различных наборов равно количеству различных делителей. Первая позиция в этом наборе может быть заполнена $k_1 + 1$ способами, вторая $k_2 + 1$ способами, ..., последняя $k_s + 1$ способом. Первые две позиции можно заполнить $(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1)$. Далее используя метод математической

индукции легко получить, что имеется $(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \dots \cdot (k_s + 1)$ различных таких строк, т.е. $\tau(n) = (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \dots \cdot (k_s + 1)$.

Теорема доказана.

Теорема 15. Пусть $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_s^{k_s}$ каноническое разложение на простые множители натурального числа n . Тогда число $\sigma(n)$, равное сумме всех натуральных делителей числа n , выражается формулой $\sigma(n) = (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{k_1}) \cdot \dots \cdot (1 + p_s + p_s^2 + \dots + p_s^{k_s})$.

Доказательство. Раскрывая скобки в произведении $(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{k_1}) \cdot \dots \cdot (1 + p_s + p_s^2 + \dots + p_s^{k_s})$, получим сумму всех членов вида $p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_s^{m_s}$, $0 \leq m_1 \leq k_1, \dots, 0 \leq m_s \leq k_s$.

Каждое произведение $p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_s^{m_s}$ входит в сумму только один раз и является делителем n . Следовательно, полученная сумма представляет собой сумму $\sigma(n)$ всевозможных делителей числа n . Эту сумму можно также записать в виде $\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1}}{p_1-1} \cdot \dots \cdot \frac{p_s^{k_s+1}}{p_s-1}$.

Теорема доказана.

1.7. Признаки делимости

Признаки делимости представляют собой некоторые действия, которые позволяют выяснить, делится ли данное целое число a на указанное целое положительное число b , не проводя деление a на b непосредственно.

Признаки делимости обычно предполагают работу не с самим числом a , а с числами, которые составляются из цифр, участвующих в записи числа a .

Некоторые признаки делимости позволяют сделать вывод о делимости числа a на указанное число после анализа одной лишь последней цифры в записи числа.

Признак делимости на 2. Число делится на 2, если его последняя цифра – ноль или делится на 2. Числа, делящиеся на два, называются *чётными*, не делящиеся на два – *нечётными*.

Признак делимости на 4. Число делится на 4, если две его последние цифры – нули или образуют число, которое делится на 4.

Признак делимости на 8. Число делится на 8, если три его последние цифры – нули или образуют число, которое делится на 8.

Признаки делимости на 3 и 9. Число делится на 3, если его сумма цифр делится на 3. Число делится на 9, если его сумма цифр делится на 9.

Признак делимости на 6. Число делится на 6, если оно делится на 2 и на 3.

Признак делимости на 5. Число делится на 5, если его последняя цифра – ноль или 5.

Признак делимости на 25. Число делится на 25, если две его последние цифры – нули или образуют число, которое делится на 25.

Признак делимости на 10. Число делится на 10, если его последняя цифра – ноль.

Признак делимости на 100. Число делится на 100, если две его последние цифры – нули.

Признак делимости на 1000. Число делится на 1000, если три его последние цифры – нули.

Признак делимости на 11. На 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, стоящих на нечётных местах, либо равна сумме цифр, стоящих на чётных местах, либо отличается от неё на число, делящееся на 11.

Пример 7. Вычеркните в числе 181615121 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 12. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.[8]

Решение. Раскладываем делитель – число 12 на простые множители:
 $12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2$.

Следовательно, заданное число после вычеркивания чисел должно делиться на 3 и 4.

На 2 делятся чётные числа, поэтому 1 в конце вычеркиваем сразу. Останется 18161512.

Но нам нужно, чтобы оно делилось на 2 дважды, т.е. делилось на 4.

Признак делимости на 4 утверждает, что для этого на 4 должно делиться двузначное число, образованное последними двумя цифрами.
 $12 \div 4 = 3$, поэтому две последние цифры числа 18161512 вычеркивать нельзя. Они гарантируют делимость числа на 4 (на обе двойки).

Чтобы число делилось на 3, нужно чтобы на 3 делилась сумма его цифр.

$$1 + 8 + 1 + 6 + 1 + 5 + 1 + 2 = 25$$

$25 = 3 \cdot 8 + 1$ – можно вычеркнуть одну из единиц, но по условию задачи нужно вычеркнуть еще две цифры.

$25 = 3 \cdot 7 + 4$ – нет двух цифр для вычеркивания, сумма которых равнялась бы 4, т.к. последние цифры 1 и 2 трогать нельзя;

$25 = 3 \cdot 6 + 7$ – сумма двух вычеркнутых цифр будет равна 7, если вычеркнуть 6 и любую из единиц, кроме последней.

Итак, возможные ответы: 811512 или 181512. Выбираем один из них.

Ответ: 181512.

Пример 8. Доказать, что число $a = 4 \cdot 16^{12} - 2^{40}$ делится на 33.[9]

Доказательство. Так как $4 \cdot 16^{12} = 2^2 \cdot 2^{48} = 2^{50}$, то $a = 2^{50} - 2^{40} = 2^{40}(2^{10} - 1) = 2^{40}(2^5 - 1)(2^5 + 1) = 2^{40} \cdot 32 \cdot 33$, откуда следует, что a делится на 33.

Пример 9. Произведение нескольких различных простых чисел делится на каждое из этих чисел, уменьшенное на 1. Чему может быть равно это произведение?[9]

Решение. Пусть искомое число $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$, где $p_1, p_2, \dots, p_k$ – это простые числа и $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Так как n делится на каждое из чисел $p_1 - 1, p_2 - 1, \dots, p_k - 1$, а они все, кроме возможно числа $p_1 - 1$ – четные. Это значит, что среди сомножителей $p_1, p_2, \dots, p_k$ присутствует число 2, т.е. $p_1 = 2$. Тогда $n = 2 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$.

Рассмотрим число $p_k - 1 = 2q_k$. По условию число $2q_k$ делит $n = 2 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$. Это значит, что q_k является делителем числа $p_2 \cdot \dots \cdot p_{k-1}$. Это возможно, если q_k есть некоторое число или произведение некоторого набора чисел из набора $p_2 \cdot \dots \cdot p_{k-1}$

Учитывая это условие и то, что число $n_1 = 2 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{k-1}$ обладает тем же свойством, что и число n , получаем способ получения искомых

произведений: на каждом этапе следующий множитель p_k определяется набором множителей $2, p_2, \dots, p_{k-1}$.

Поэтому будем строить искомые произведения, начиная с двух сомножителей.

1. Пусть $k = 2$. Тогда $n = 2 \cdot p_2$. Учитывая, что $p_2 - 1 = 2q_2$ и $2q_2$ делит число 2, получаем $q_2 = 1$. Тогда $p_2 = 3$ и $n = 2 \cdot 3 = 6$.

2. Пусть $k = 3$. Тогда $n = 2 \cdot 3 \cdot p_3$. Учитывая, что $p_3 - 1 = 2q_3$ и $2q_3$ делит число $2 \cdot 3$, получаем $q_3 = 3$. Тогда $p_3 = 7$ и $n = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$.

3. Пусть $k = 4$. Тогда $n = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot p_4$. Учитывая, что $p_4 - 1 = 2q_4$ и $2q_4$ делит число $2 \cdot 3 \cdot 7$, получаем возможные значения $q_4 = 3$ или $q_4 = 7$, или $q_4 = 3 \cdot 7 = 21$. Тогда $p_4 = 7$ (уже есть такой множитель) или $p_3 = 17$ (не простое число), или $p_4 = 43$. Тогда $n = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 = 1806$.

4. Пусть $k = 5$. Тогда $n = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 \cdot p_5$. Учитывая, что $p_5 - 1 = 2q_5$ и $2q_5$ делит число $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43$, получаем возможные значения q_5 и p_5 :

$q_5 = 3, p_5 = 7$ (такой множитель есть);

$q_5 = 7, p_5 = 15$ (не простое число);

$q_5 = 3 \cdot 7, p_5 = 43$ (такой множитель есть);

$q_5 = 43, p_5 = 87$ (не простое число, делится на 3);

$q_5 = 3 \cdot 43, p_5 = 257$ (не простое число, делится на 7);

$q_5 = 7 \cdot 43, p_5 = 603$ (не простое число, делится на 3);

$q_5 = 3 \cdot 7 \cdot 43, p_5 = 1807$ (не простое число, делится на 13).

Следовательно, искомого произведения из пяти сомножителей не существует, а значит, не существует подобных произведений и с большим числом сомножителей.

Ответ: 6, 42, 1806.

ГЛАВА II. ОРГАНИЗАЦИЯ ПОДГОТОВКИ ШКОЛЬНИКОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ДЕЛИМОСТЬ

2.1. Типы задания 19 ЕГЭ по математике

Задачи на делимость в ЕГЭ – это задания олимпиадного типа, рассчитанные на сильных учащихся. Для того, чтобы продвинуться в решении задания 19 из ЕГЭ по математике (профильный уровень), необходимо проявить определенный уровень математической культуры, логического мышления, который формируется при решении задач профильного уровня на протяжении всего обучения в школе.

Ограниченность учителя временными рамками урока и временем изучения темы, к сожалению, мало способствует решению на уроке задач творческого характера, нестандартных задач, задач повышенного уровня сложности, при решении которых необходимы знания разделов математики, выходящих за пределы школьного курса.

Обучать школьников решать задание 19 из ЕГЭ по математике (профильный уровень) мы предлагаем в рамках факультативного курса по подготовке к ЕГЭ по математике (профильный уровень).

В настоящее время существует огромное количество методических материалов, электронных источников, методических указаний для подготовки к ЕГЭ. В пособии [7] выделяются следующие типы задания 19:

- среднее арифметическое и среднее геометрическое;
- арифметическая прогрессия;
- геометрическая прогрессия;
- комбинаторика;
- делимость;
- уравнения в целых числах;
- неравенства в целых числах;

- четность – нечетность.

В пособии [9] для подготовки учащихся выделены следующие типы:

- делимость целых чисел. Деление без остатка. Деление с остатком;
- десятичная запись числа;
- сравнения;
- выражения с числами;
- выражения с переменными;
- разные задачи на числа;
- методы решений уравнений и неравенств в целых числах.

На образовательном портале [4] в задании 19 по математике, профильный уровень выделены следующие типы заданий:

- числа и их свойства;
- числовые наборы на карточках и досках;
- последовательности и прогрессии;
- сюжетные задачи: кино, театр, мотки веревки.

В рамках данной работы нами выбрана следующая классификация задания 19:

- делимость целых чисел;
- десятичная запись числа, деление с остатком;
- разные задачи на числа.

На наш взгляд, по теме «Делимость целых чисел» можно провести 3 занятия. Ниже представлено тематическое планирование данных занятий.

Тематическое планирование.

	Тема	Содержание	Кол-во часов	
			Ауд.	Сам.
	Занятие 1. Делимость целых чисел	• Свойства делимости целых чисел; • простые и составные числа; • каноническое разложение натурального	2	4

		числа; • НОД и НОК; • количество и сумма делителей натурального числа.		
	Занятие 2. Десятичная запись числа, деление с остатком	• признаки делимости; • восстановление цифр; • зачеркивание цифр; • приписывание цифр; • перестановки цифр; • теорема о делении с остатком; • алгоритм Евклида.	2	4
	Занятие 3. Разные задачи на числа	• последовательности и прогрессии; • среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел; • суммирование чисел; • сюжетные задачи.	2	4

2.2. Занятие 1. Делимость целых чисел

На первом занятии рассматриваются задачи следующего типа:

- свойства делимости целых чисел;
- простые и составные числа;
- каноническое разложение натурального числа;
- НОД и НОК;
- количество и сумма делителей натурального числа;
- факториал натурального числа.

Повторяется теоретический материал, представленный в главе 1 (1.1, 1.2, 1.4, 1.5, 1.6). Во время повтора теоретического материала учитель ведет дискуссию с учениками, задает вопросы, которые дополняют остаточные знания о делимости чисел. Вопросы задает всем присутствующим, а не конкретному ученику.

17

- Какое число записано?
- Простое или составное?
- Дополнить его до 100.
- Назвать делители этого числа.
- Дополнить данное число до квадрата числа 7.
- Назвать 3 кратных числа для него.
- Назвать число в 5 раз большее.
- Чему равен его квадрат?

Слайд 1.

Установите истинность высказывания:

- Число, кратное 25 делится на 5;
- Существуют ли числа, не имеющие кратных;
- 6- делитель числа 126;
- 18- делитель числа 432;
- 183- простое число;
- 15 и 18- взаимно простые числа;
- $\text{НОК}(4;3)=24$;
- Сумма двух нечетных чисел - четное число;
- $\text{НОД}(12;18)=6$.

Слайд 2.

Далее учитель дает задачу для самостоятельного решения школьниками, возможна работа в группах. При затруднении решения задачи учитель контролирует и направляет процесс. Затем разбирает решение задачи

со школьниками и дает следующую задачу для самостоятельного решения школьниками. Учитель не дает готовое решение задачи, а формирует у школьников практические умения и навыки решения задач каждого типа.

Задача № 1. Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

- а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?
- б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?
- в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?[4]

В первую очередь для решения этой задачи необходимо представить запись числа в виде линейного целочисленного уравнения, то есть:

Пусть данное число равно $100a + 10b + c$, где a , b и c — цифры сотен, десятков и единиц соответственно. Если частное этого числа и суммы его цифр равно k то выполнено $100a + 10b + c = ka + kb + kc$.

Затем, используем условие и решаем уравнение.

Если частное равно 90 то $100a + 10b + c = 90a + 90b + 90c$, $10a = 80b + 89c$, что верно, например, при $c = 0, b = 1, a = 8$: частное числа 810 и суммы его цифр равно 90.

Вывод: для решения этой задачи учащиеся должны обладать знаниями о простейших свойствах целых чисел и навыками для решения линейных уравнений с двумя переменными в целых числах.

Задача № 2. Каждое из чисел 2, 3, ..., 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, ..., 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?[4]

Для решения этой задачи необходимо получить наибольшую и наименьшую суммы по модулю. Для наибольшей суммы берутся все произведения со знаком плюс. Так как числа целые, то и сумма этих чисел

будет числом целым, значит необходимо найти такую сумму, которая будет равна 0 или 1.

Решение. 1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна:

$$(2+\dots+7)(13+\dots+21) = \left(\frac{2+7}{2} \cdot 6\right) \cdot \left(\frac{13+21}{2} \cdot 9\right) = 27 \cdot 153 = 4131.$$

2. Так как сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получится при раскрытии следующих скобок:

$$(-2 + 3 - 4 + 5 + 6 - 7) \cdot (-13 - 14 - 15 - 16 + 17 - 18 + 19 + 20 + 21) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ответ: 1 и 4131.

Задача № 3. Множество A состоит из натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A . [4]

Решение. Наименьшее общее кратное чисел, составляющих множество A . $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Поэтому числа, составляющие множество A – это делители 210. Все делителей 16:

$$1, 2, 3, 5, 7, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 3 \cdot 5, 3 \cdot 7, 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 5 \cdot 7, \\ 3 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Каждый делитель содержит не более одного множителя 2. А произведение всех чисел из A делится $1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$. Поэтому среди чисел, составляющих A , должно быть, по крайней мере семь четных, а их всего восемь:

$$2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Если число 2 входит в A , то любое другое число из A должно делиться на 2. Значит, $A = \{2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210\}$, но произведение этих чисел равно $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4 = (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2)^2$.

Значит, 2 не входит в A , а числа $2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ входят в A , но их всего семь. Поэтому этот набор нужно расширить, добавляя делители 210, не взаимно простые со всеми указанными семью числами. Такой делитель единственный – $3 \cdot 5 \cdot 7$.

Ответ: $A = \{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$.

Задача № 4. Дан набор из n различных натуральных чисел. Известно, что $n > 7$, наименьшее общее кратное всех чисел равно 330 и для любых двух чисел наименьший общий делитель больше единицы. Сумма всех чисел данного набора равна 755. а) Принадлежит ли данному набору чисел хотя бы одно из чисел 2 или 3? б) Принадлежит ли 10 данному набору чисел? в) Укажите все n чисел данного набора. [7]

Решение. а) НОК чисел данного набора равно $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$.
Запишем всевозможные делители числа
 $330: 1; 2; 3; 5; 6; 10; 11; 15; 22; 30; 33; 55; 66; 110; 165; 330$.

Заметим, что единицы среди данного набора нет, так как по условию для любых двух натуральных чисел их НОД больше единицы.

Предположим, что 2 принадлежит данному набору чисел, тогда каждое другое число из данного набора чисел, и их сумма четное, так как НОД для любых двух чисел больше единицы. Но, по условию, сумма равна 755. Значит, число 2 не принадлежит данному набору чисел.

Если предположить, что число 3 принадлежит данному набору чисел, то остальные числа набора, а следовательно, и их сумма делятся на 3. Но 755 не делится на 3, следовательно, 3 не содержится среди данных чисел.

б) Предположим, что 10 принадлежит данному набору чисел. Тогда он не может содержать числа 11 и 33, так как их общий делитель с числом 10 равен 1.

Тогда остается 10 чисел (не считая числа 10), из которых необходимо составить требуемый набор – это числа 5, 6, 15, 22, 30, 55, 66, 110, 165, 330. Если число 5 входит в набор, то набор состоит из чисел, кратных 5: 5, 10, 15, 30, 55, 110, 165, 330 (8 чисел, значит, ни одно нельзя исключить). Сумма чисел этого набора равна $720 \neq 755$. Таким образом, число 5 в набор не входит.

Ясно, что из чисел 15 и 22 в набор может входить только одно, равно как из чисел 6 и 55.

Предположим, не входят 15 и 6. Тогда набор: 10, 22, 30, 55, 66, 110, 165, 330; сумма чисел набора равна $788 \neq 755$.

Предположим, не входят 15 и 55. Тогда набор: 6, 10, 22, 30, 66, 110, 165, 330; сумма чисел набора равна $739 \neq 755$.

Предположим, не входят 22 и 6. Тогда набор: 10, 15, 30, 55, 66, 110, 15, 330; сумма чисел набора равна $781 \neq 755$.

Предположим, что не входят 22 и 55. Тогда набор: 6, 10, 15, 30, 66, 110, 165, 330; сумма чисел набора равна $732 \neq 755$.

Таким образом, 10 не входит в данный набор.

в) Из предыдущих пунктов следует, что числа 1, 2, 3, 4, 5, 10 не входят в данный набор. Если в набор входит число 11, то набор: 11, 22, 33, 55, 66, 110, 165, 330, сумма его чисел делится на 11, а 755 нет. Значит, число 11 не входит в набор. Из чисел 15 и 22, как и из пары 6 и 55, в набор входит не более одного числа. Поочередно, исключая пары (15; 6), (15; 55), (22; 6), (22; 55), найдем, что единственный подходящий набор состоит из чисел 6, 15, 30, 33, 66, 110, 165, 330.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 6, 15, 30, 33, 66, 110, 165, 330.

Задача № 5. Для каждого натурального числа введем число

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Определите наибольшее возможное значение n в каждом из следующих случаев.

а) $\left(\frac{n!}{8}\right)$ не является натуральным числом.

$$\text{б) } (n+2)! - 42(n!) < 0.$$

$$\text{в) } ((n!)^2 - 12n!) \text{ не делится на } 13.[7]$$

Решение. а) Заметим, что $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ – все эти числа не делятся нацело на 8. При $n = 4$ получим $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $\frac{n!}{8} = 3 \in N$. При $n > 4$, соответственно, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n = 24 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$. Отсюда $\frac{n!}{8} = 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n \in N$. Значит наибольшее подходящее значение $n = 3$.

б) Преобразуем выражение:

$$(n+2)! - 42(n!) < 0$$

$$n!(n+1)(n+2) - 42(n!) < 0$$

$$n!((n+1)(n+2) - 42) < 0$$

$$n!(n^2 + 3n - 40) < 0$$

$$n^2 + 3n - 40 < 0$$

$$-8 < n < 5$$

Наибольшее подходящее значение $n = 4$.

в) Ясно, что при $n \geq 13$ число $n!$ делится на 13, а тогда и $(n!)^2 - 12(n!) = n!(n! - 12)$ делится на 13.

Покажем что $12! - 12$ делится на 13.

$$12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot (13-6) \cdot (13-5) \cdot (13-4) \cdot (13-3) \cdot$$

$$(13-2) \cdot (13-1) = 720(13n+720), \text{ где } n - \text{некоторое целое число.}$$

В свою очередь $720 = 13 \cdot 55 + 5$, поэтому $12! = (13 \cdot 55 + 5)(13n + 13 \cdot 55 + 5) = 13 \cdot v + 25$, где v – также некоторое целое число.

Отсюда $12! - 12 = 13 \cdot v + 25 - 12 = 13v + 13 = 13(v+1)$, то есть $12! - 12$ делится на 13.

Покажем теперь, что при $n = 11$ число $n!(n! - 12)$ не делится на 13.

Действительно, в разложении $11!$ на простые сомножители числа 13 не будет.

Предположим, что $11! - 12 = 13s$, где s – некоторое целое число. Так же, как и для числа $12!$, получаем $11! = (13 \cdot 55 + 5)(13t - 13 \cdot 55 - 5) = 13k - 25$, где k – некоторое целое число.

Поэтому $11! - 12 = 13k - 25 - 12 = 13k - 37 = 13(k - 3) - 5 = 13s$.

Отсюда следует, что 5 делится на 13. Получаем противоречие, что и доказывает, что $11!(11! - 12)$ не делится на 13.

Ответ: а) 2, б) 4, в) 11.

Задача № 6. Найти все натуральные числа, последняя десятичная цифра которых 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей (включая единицу и само число).

Решение. Так как искомые натуральные числа имеют нечетное число делителей 15, то все они являются квадратами. Поскольку $15 = 3 \cdot 5$, то возможные разложения искомых чисел в соответствии с формулой о количестве натуральных делителей числа могут иметь вид p^{14} или $q^2 = r^4$, где p, q и r – это простые числа. Первый вариант невозможен, так как искомое число должно оканчиваться на 0. Соответственно, 0 на конце можно получить, если $q = 2, r = 5 \cdot 5$ или $q = 5, r = 2$. В этих случаях получаются числа $2^2 \cdot 5^4 = 2500$ или $5^2 \cdot 2^4 = 400$.

Ответ: 400 и 2500.

После разбора методов решения задач каждого типа, учитель дает задания для самостоятельной работы. Это задания на закрепление не только теоретического материала, но и методов решения задач, а так же формирования практических умений и навыков.

Задания для самостоятельной работы.

1. Найдите хотя бы три десятичных числа, делящихся на 11, в записи которых используются все цифры от 0 до 9?

2. Натуральные числа $3n + 2$ и $8n + 3$ делятся на натуральное число $p \neq 1$. Найти p .

3. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 42 и имеют ровно 42 различных натуральных делителя (включая 1 и само число).

4. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b таких что, если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b , то получится десятичная запись числа a/b .

5. Произведение нескольких различных простых чисел делится на каждое из этих чисел, уменьшенное на 1. Чему может быть равно это произведение?

6. Сколько существует способов разложения числа $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_s^{k_s}$ в произведение двух взаимно простых множителей?

7. Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y , удовлетворяющих неравенству $3x = 8y - 29$.

а) Может ли q/d быть равным 170?

б) Может ли q/d быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение q/d .

8. Найти все пары натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно 78, а наибольший общий делитель равен 13.

9. Найти наибольший общий делитель всех чисел вида $p^2 - 1$, где p — это простое число, большее 3, но меньшее 2010.

10. Натуральное число n имеет ровно 6 натуральных делителей (включая 1 и само число), сумма которых равна 3500. Найдите n .

11. Натуральное число n имеет ровно 9 натуральных делителей (включая 1 и само число), сумма которых равна 1767. Найдите n .

12. Решите в натуральных числах уравнение $1! + 2! + \dots + n! = k^2$.

13. Решите в натуральных числах уравнение $13n + 5n + n! = k^2$.

14. Найдите все тройки натуральных чисел k , m и n , удовлетворяющие уравнению $2 \cdot k! = m! - 2 \cdot n!$.

2.3. Занятие 2. Числовые наборы и деление с остатком

В это занятие входят задачи следующего типа:

- признаки делимости;
- теорема о делении с остатком;
- алгоритм Евклида;
- восстановление, зачеркивание, приписывание и перестановки цифр.

Повторяется теоретический материал, представленный в главе 1 (1.3, 1.7), разбираются решения каждого типа задач. Задачи так же предлагаются для самостоятельной работы или работы в группах.

Задача №1. При каких натуральных n число $A = 1313...13$ (всего $2n$ цифр) делится на 63?

Решение. Число делится на 63 тогда и только тогда, когда оно делится на 7 и на 9. Так как сумма цифр числа A равна $2(1+3)n = 4n$ и $\text{НОД}(4; 9) = 1$, то A кратно 9 тогда и только тогда, когда n кратно 9. Число 131313 делится на 7, поэтому $n = 9k, k \in \mathbb{N}$.

Ответ: $9k, k \in \mathbb{N}$.

Задача №2. Пятизначное число делится на 72, причем три его цифры – единицы. Найти все такие числа.

Решение. Искомое число не может оканчиваться на 1, поэтому пусть число оканчивается на цифру $b \neq 1$. Другую неизвестную цифру, которую можно поставить на первое, второе, третье или четвертое место, обозначим через a .

Число 72 делится на два взаимно простых числа 8 и 9.

Исходя из признака делимости на 9, получим, что выражение $3 + a + b$ кратно 9 и два возможных равенства $a + b + 6(*)$ или $a + b = 15(**)$.

1. Пусть цифра a стоит на первом месте, тогда число имеет вид $\overline{a111b}$. Из признака делимости на 8 число $\overline{11b}$ делится на 8. Значит, $b = 2$. Из равенств $(*)$ и $(**)$ соответственно получаем $a = 4$ или $a = 13$ (не подходит).

2. Цифра a стоит на втором месте. Рассуждения первого пункта повторяются, поэтому $b = 2, a = 4$.

3. Цифра a стоит на третьем месте. Тогда последние три цифры образуют число $\overline{1ab}$, которое делится на 8. Представим трехзначное число $\overline{a1b}$ в виде, содержащем слагаемое, кратное 8, и слагаемое $a + b$:

$$\begin{aligned}\overline{a1b} &= 100a + 10 + b = (8 \cdot 12a + 4a) + (8 + 2) + b \\ &= (8 \cdot 12a + 8) + (a + b) + (3a + 2).\end{aligned}$$

Для равенства $a + b = 6$ имеем выражение $6 + (3a + 2) = 8 + 3a$, кратное 8 при $a = 0$ или $a = 8$. Отсюда $b = 6$ или $b = -2$ (не подходит).

Для равенства $a + b = 15$ имеем выражение $15 + (3a + 2) = 16 + (3a + 1)$, кратное 8 при $a = 5$. Отсюда $b = 10$ (не подходит).

4. Цифра a стоит на четвертом месте. Представим трехзначное число $\overline{1ab}$ в виде:

$$\begin{aligned}\overline{1ab} &= 100 + 10a + b = (8 \cdot 12 + 4) + (8a + 2a) + b \\ &= (8 \cdot 12 + 8a) + (a + b) + (a + 4).\end{aligned}$$

Для равенства $a + b = 6$ имеем выражение $6 + (a + 4) = 8 + (a + 2)$, кратное 8 при $a = 6$. Отсюда $b = 0$.

Для равенства $a + b = 15$ имеем выражение $15 + (a + 4) = 16 + (a + 3)$, кратное 8 при $a = 5$. Отсюда $b = 10$ (не подходит)

Ответ: 41112, 14112, 11016, 11160.

Задача № 3. Найдите все пары натуральных чисел m и n , являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$. [4]

Для решения этой задачи можно установить зависимость между числами m и n . То есть $2^m = 3^n - 1$. Затем рассматриваются два случая, когда n – четное число и n – нечетное число.

Решение. Пусть n – четное число $n = 2k$. Тогда $2^m = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$. Правая часть – произведение двух последовательных четных чисел, каждое из которых является степенью числа 2. Значит, $3^k - 1 = 2$ и $3^k + 1 = 4$, откуда $k = 1$ и $n = 2$. При этом $2^m = 8$, следовательно, $m = 3$.

Пусть теперь n – нечетное число. Все нечетные степени тройки (3, 27, 243...) делятся на 4 с остатком 3. Значит, $3^n - 1$ делится на 4 с остатком 2. Из равенства $2^m = 3^n - 1$ получаем, что в этом случае $m = 1$ (если $m \geq 2$ то 2^m делится на 4 без остатка). При этом $3^n - 1 = 2$ откуда $n = 1$.

Ответ: $m = 3, n = 2$ или $m = n = 1$.

Задача № 4. Дано число $a = 2^{2002} + 3^{2002}$. Найти последнюю цифру числа a и остаток от деления числа a на 11.

Решение. Найдем последнюю цифру числа a . Последние цифры чисел 2^k повторяются через четыре шага ($2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 =$

$32, 2^6 = 64$ и т. д.). Поэтому последняя цифра числа 2^{2002} такая же, как и у числа 2^2 , так как $2002 = 4 \cdot 500 + 2$, т.е. 4.

Аналогично, последняя цифра у числа 3^{2002} такая же, как и у числа 3^2 , т.е. 9. Следовательно, последняя цифра числа a такая же, как у и суммы $4 + 9 = 13$, т.е. 3.

Найдем остаток от деления числа a на 11. Заметим, что остатки от деления на 11 чисел вида 2^k повторяются через 10 шагов. Поэтому остаток от деления числа 2^{2002} на 11 равен остатку от деления на 11 числа 2^2 , так как $2002 = 10 \cdot 200 + 2$, т.е. 4.

Аналогично, остатки от деления на 11 чисел вида 3^k повторяются через 5 шагов. Поэтому остаток от деления числа 3^{2002} на 11 равен остатку от деления на 11 числа 3^2 , так как $2002 = 5 \cdot 400 + 2$, т.е. равен 9.

Следовательно, остаток от деления числа a на 11 равен остатку от деления на 11 суммы $4 + 9 = 13$, т.е. равен 2.

Ответ: 3 и 2.

Задача №5. Найти все натуральные n , при которых дробь $\frac{3n^3 - 8n^2 + 14n - 8}{3n - 5}$ сократима.

Решение. Найдем наибольший делитель d чисел $3n^3 - 8n^2 + 14n - 8$ и $3n - 5$. Для этого воспользуемся алгоритмом Евклида.

Так как $3n^3 - 8n^2 + 14n - 8 = (n^2 - n + 3)(3n - 5) + 7$, то $d = (3n^3 - 8n^2 + 14n - 8, 3n - 5) = (3n - 5, 7)$.

Так как 7 – простое число, то возможны два значения d . Если $d = 1$, то исходная дробь несократима. Если $d = 7$, то число $3n - 5$ должно быть кратно 7, т.е. с учетом того, что $n \in \mathbb{N}$, $3n = 7k + 5$, где $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Отсюда } n = \frac{7k+5}{3} = 2k + 1 + \frac{k+2}{3}.$$

В последнем равенстве дробь будет целым числом, если $k = 3m + 1$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, тогда $n = 7m + 4$.

Ответ: При $n = 7m + 4$, где $m = 0, 1, 2, \dots$

Задача №6. Восстановить запись: СИ·СИ = СОЛЬ, если одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры.

Решение. Само число и его квадрат начинаются с одной и той же буквы. Это может быть при $C = 1$ или $C=9$. Первый вариант не подходит, так как получим квадрат числа СИ в виде трехзначного числа.

Пусть $C = 9$. Чтобы квадрат начинался с цифры 9, необходимо проверить числа 95, 96, 97, 98, так как $94^2 = 8836$, $95^2 = 9025$. Числа 95 и 96 не подходят, так как оканчиваются на цифру 5 или 6 соответственно, но буквы И и Ь обозначают разные цифры. Квадрат числа 97 оканчивается на цифру 9, что противоречит условию задачи. Подходит число 98, его квадрат 9604.

Ответ: $98 \cdot 98 = 9604$.

Задача № 7. Шестизначное число А делится на 17, а число, полученное вычеркиванием его последней цифры, делится на 13. Найти наибольшее число А, удовлетворяющее этим требованиям.

Решение. Пусть a последняя цифра числа А, а B – число, полученное из А вычеркиванием последней цифры. Тогда $A = 10B + a$. Число B – пятизначное. Так как $99\,999 = 13 \cdot 7692 + 3$, то число 99 996 делится на 13. Числа А вида $\overline{99996a}$ не делятся на 17, так как наибольшее из них 99 9969 при делении на 17 дает в остатке 12, а наименьшее 999 960 – дает в остатке 3. Значит $B = 99\,996$ не подходит.

Тогда возьмем $B = 99\,996 - 13 = 99\,983$. Если взять число А вида $\overline{99983a}$, то $999839 = 17 \cdot 58814 + 1$. Следовательно, подходит 999 838. Ясно, что оно наибольшее.

Ответ: 999838

Задача № 8. На доске написано число 7. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две – третье и т.д.).

- а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?
- б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 63?
- в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 784?[4]

Для решения этой задачи необходимо заметить, что все числа, записанные на доске, будут делиться на 7. Это необходимое условие. Число, не делящееся на 7, не может оказаться на доске. Число 2012 не делится на 7, значит на доске оно появиться не может. Число 7 является делителем чисел 63 и 748, значит необходимое условие попадания этих чисел на доску выполняется. Теперь достаточно найти, существуют ли такие операции, выполняемые Васей, что мы можем получить на доске числа 63 и 748.

Задача № 9. Каждое из чисел 1, -2 , -3 , 4, -5 , 7, -8 , 9 по одному записываю на 8 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, -2 , -3 , 4, -5 , 7, -8 , 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

- а) Может ли в результате получиться 0?
- б) Может ли в результате получиться 1?
- в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?[4]

Среди восьми данных чисел нет противоположных, значит, на карточках ни одна сумма не будет равна нулю, значит произведение не будет равно нулю.

Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, на какой-то карточке попадётся два нечётных числа, и их сумма будет чётной. Значит, произведение будет числом чётным, а 1 им не является.

Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, хотя бы на двух карточках с обеих сторон написаны нечётные числа, и сумма чисел на каждой из этих карточек чётная. Поэтому всё произведение делится на 4.

Задания для самостоятельной работы.

1. Найдутся ли хотя бы три десятичных числа, делящиеся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?
2. Вычеркните в числе 181615121 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 12. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.
3. Натуральные числа m и n таковы, что $m > n$ и m не делится на n . Также известно, что остаток от деления m на n совпадает с остатком от деления $m + n$ на $m - n$. Найти отношение $m:n$. Ответ должен быть предоставлен в числовом виде.
4. Цифры четырёхзначного числа, кратного 5, записали в обратном порядке и получили второе четырёхзначное число. Затем из первого числа вычли второе и получили 2277. Приведите ровно один пример такого числа.
5. Шестизначное число A делится на 17, а число, полученное вычеркиванием его последней цифры, делится на 13. Найти наибольшее число A , удовлетворяющее этим требованиям.
6. Шестизначное число оканчивается цифрой 7. Если эту цифру перенеси в начало числа, то оно увеличится в пять раз. Что это за число?
7. Даны два двузначных числа. Если большее число написать впереди меньшего и полученное четырехзначное число разделить на меньшее, то в частном получится 247, а в остатке 10. Если же меньшее число написать впереди большего и разделить полученное число на большее, то в частном получится 41, а в остатке 20. Найти сумму данных двузначных чисел.
8. Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-11, -7, -5, -4, -1, 2, 6$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 4 раза. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

8. Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности найденных сумм и полученные 6 чисел складывают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Каково наименьшее возможное значение полученного результата?

2.3. Занятие 3. Разные задачи на числа

В это занятие входят задачи следующего типа:

- последовательности и прогрессии;
- среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел;
- суммирование чисел;
- сюжетные задачи.

Разбираются решения задач каждого типа. Сначала школьники пытаются решить задачу самостоятельно, если возникают затруднения, учитель направляет.

Задача № 1. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Решение. а) Пример: 1, 2, 3. Разность квадрата суммы и суммы квадратов равна $36 - 14 = 22$. Если добавить число 4, то разность будет равна $100 - 30 = 70$, что ровно на 48 больше, чем было.

б) Обозначим члены прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогда разность, вычисленная математиком в первый раз, равна

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 = 2a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + 2a_{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) + \dots + 2a_3(a_1 + a_2) + 2a_2a_1.$$

Когда к прогрессии добавили член a_{n+1} , то вычисленная во второй раз разность отличается от первой дополнительным слагаемым

$$2a_{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 2(a_1 + nd) \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n = (a_1 + nd)(2a_1 + n - 1)d, \text{ где } d - \text{ это разность прогрессии.}$$

Из условия следует, что $a_1 \geq 0$ и $d \geq 1$, поэтому $(a_1 + nd)(2a_1 + n - 1)d \geq n(n-1)$.

Получаем неравенство $n^2(n-1) \leq 1440$, откуда $n \leq 11$. Значит, 12 членов в начальной прогрессии быть не может.

в) Из равенства $(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n = 1440$ следует, что n является делителем числа 1440. Значит, $n \neq 11$.

Если $n = 10$, получаем $(a_1 + 10d)(2a_1 + 9d) = 144$.

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $90d^2 \geq 90 \cdot 4 = 360 > 144$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение: $2a_1^2 + 29a_1 - 54 = 0$, которое не имеет целых решений.

Если $n = 9$, получаем: $(a_1 + 9d)(2a_1 + 8d) = 160$.

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $72d^2 \geq 72 \cdot 4 = 288 > 160$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение: $a_1^2 + 13a_1 - 44 = 0$, которое не имеет целых решений.

Если $n = 8$, получаем: $(a_1 + 8d)(2a_1 + 7d) = 180$.

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $56d^2 \geq 56 \cdot 4 = 224 > 180$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение: $2a_1^2 + 23a_1 - 124 = 0$, которое имеет единственный натуральный корень 4.

Значит, прогрессия из восьми чисел 4, 5, 6, ..., 11 удовлетворяют условию задачи.

Ответ: а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8.

Задача № 2. Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 12, либо в 8 раз. Сумма всех членов последовательности равна 437.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой последовательности?

Решение. а) Последовательность не может состоять из двух членов, так как уравнения $x + (x + 12) = 437$, $x + 8x = 437$ неразрешимы в целых числах.

Последовательность может состоять из трёх членов, например, так: $25 + 200 + 212 = 437$.

б) Сумма двух соседних чисел равна как минимум 9, поскольку $437 = 48 \cdot 9 + 5$, будет самое большее 48 пар и ещё одно число. Но сумма может быть равна 9 только для пары $1 + 8$, а если все пары такие, то добавить к ним число 5 нельзя. А для остальных пар сумма равна как минимум 14. Поэтому на самом деле 97 чисел обеспечить нельзя, а 96 чисел можно в ситуации $1, 8, 1, 8, 1, 8, \dots, 1, 8, 1, 13$ (пара 1, 8 повторяется 47 раз).

Ответ: а) 3; б) 96.

Задача № 3 На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех

отрицательных из них равно -8 . а) Сколько чисел написано на доске? б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных? в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение. Обозначим через p , q и n количество положительных, отрицательных и нулевых чисел соответственно. Согласно условию:

$$40 < p + q + n < 48$$

Сумма всех чисел на доске равна $-3(p + q + n)$

Сумма всех положительных чисел равна $4p$

Сумма всех отрицательных чисел равна $-8q$

а) Поскольку сумма всех чисел равна сумме всех положительных и всех отрицательных из них, то

$$-3(p + q + n) = 4p + 0n - 8q = 4(p - 2q)$$

Поскольку числа 3 и 4 взаимно простые, то из последнего равенства следует, что число $p + q + n$ делится на 4. Единственное число между 40 и 48, которое делится на 4, – это число 44. Таким образом, на доске написано 44 числа.

б) Рассмотрим предыдущее равенство:

$$-3(p + q + n) = 4p - 8q$$

$$5q - 3n = 7p$$

$$5q \geq 7p$$

$$q \geq 75p$$

$$q \geq p$$

Таким образом, отрицательных чисел написано больше.

в) Поскольку количество чисел равно 44, то их сумма равна $-3 \cdot 44 = -132$. Значит,

$$4p - 8q = -132$$

$$p = 2q - 33$$

Поскольку $p + q + n = 44$, то $p + q \leq 44$. Тогда

$$\begin{cases} p + q \leq 44 \\ p = 2q - 33 \end{cases}$$

$$p \leq 44 - \frac{p + 33}{2}$$

$$3p \leq 55$$

$$p \leq \frac{55}{3} = 18, (3)$$

Поскольку $p = 2q - 33$, то p является нечётным числом, а так как p – целое число, то $p \leq 17$.

Ответ: а) 44, б) отрицательных, в) 17.

Задача № 4. Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря одним из двух способов: либо двумя автобусами типа А за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа В за несколько рейсов, причем в этом случае число рейсов каждого автобуса типа В будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа А. В каждом из случаев автобусы заполняются полностью.

Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа В входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа А?

Решение. Тип А: 2 автобуса; n рейсов каждый; $m + 7$ – человек в автобусе.

Тип В: 3 автобуса; $n-1$ рейс; m – человек

$$3(n-1)m = 2n(m+7) \leftrightarrow 3mn - 3m = 2mn + 14n \leftrightarrow mn - 3m = 14n$$

$$\leftrightarrow m(n-3) = 14n \leftrightarrow m = \frac{14n}{n-3} = \frac{14(n-3) + 42}{n-3} = 14 + \frac{42}{n-3}.$$

Следовательно, надо найти делители 42: $n-3 = 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42$.

Если $n-3 = 1$, то получаем: $n = 4, m = 56$, а всего школьников 504.

Если $n = 5, m = 32$, то школьников 420;

Если $n = 6, m = 28$, то школьников 420;

Если $n = 9, m = 21$, то школьников 504;

Если $n = 10, m = 20$, то школьников 540;

Если $n = 17, m = 17$, то школьников 816;

Если $n = 45, m = 17$, то школьников 1980.

Ответ: 1980.

Задача № 5. В игре «Дротики» есть 20 наружных секторов, пронумерованных от 1 до 20 и два центральных сектора. При попадании в наружный сектор игрок получает количество очков, совпадающее с номером сектора, а за попадание в центральный сектора он получает 25 или 50 очков соответственно. В каждом из наружных секторов есть области удвоения и утроения, которые, соответственно, удваивают или утраивают номинал сектора. Так, например, попадание в сектор 10 (не в зоны удвоения и утроения) дает 10 очков, в зону удвоения сектора 20 очков, в зону утроения 30 очков.

а) Может ли игрок тремя бросками набрать ровно 167 очков?

б) Может ли игрок шестью бросками набрать ровно 356 очков?

в) С помощью какого наименьшего количества бросков, игрок может набрать ровно 1001 очко?

Решение. а) Да, например, при попадании в утроение сектора 20, утроение сектора 19 и центральный сектор 50 получаем: $60 + 57 + 50 = 167$.

б) Наибольшее количество очков, которое может набрать игрок одним броском — 60 (утроение 20), далее идут: 57 очков (утроение 19) и 54 очка (утроение 18). Попадание во все остальные сектора и зоны дает меньше 54 очков. Если все шесть бросков были по 60 очков, то игрок набрал 360 очков, что больше 356. Если хотя бы один бросок на 60 очков заменить броском на 54 очка или меньше, то сумма уменьшится как минимум на 6, а, значит, станет не больше 354 очков, что меньше 356 очков. Следовательно, бросок на 60 очков можно заменять только броском на 57 очков. Но одна такая замена дает итоговый результат 357 очков, а хотя бы две замены — не более 354 очков. Значит, 356 очков шестью бросками набрать невозможно.

в) Как было показано в пункте б) каждый бросок приносит игроку не более 60 очков. Значит, за 16 бросков он наберет не более 960 очков, а тогда для того, чтобы набрать 1001 очко понадобится не менее 17 бросков.

Покажем, что игрок может набрать 1001 очко за 17 бросков. Предположим, что он сделал 15 бросков на 60 очков (итого 900), один бросок в зону утробения сектора 17 (51 очко) и один бросок в центральный сектор 50 очков. Тогда в сумме он наберет $900 + 51 + 50 = 1001$ очко.

Отметим, что в пунктах а) и в) учащийся мог привести другие верные примеры.

Ответ: а) да; б) нет; в) за 17 бросков.

Задания для самостоятельной работы.

1. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

2. Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключенные между числами 210 и 350.

а) может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?

б) может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

3. Число таково, что для любого представления в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадает только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит

а) Может ли число быть равным

б) Может ли число быть больше

в) Найдите максимально возможное значение

4. Два положительных неравных числа являются первым и третьим членами некоторой арифметической прогрессии и первым и третьим членом некоторой геометрической прогрессии. У какой из этих прогрессий сумма трех первых членов больше?

5. Натуральное число называется примарным, если оно является степенью простого числа с натуральным показателем (например, 71 или 134). Найти самую длинную цепочку примарных чисел, идущих подряд.

6. Последовательные нечетные числа сгруппированы следующим образом: 1; (3;5); (7;9;11); (13;15;17;19); Чему равна сумма чисел в n – й группе?

7. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 50, а вместе солдат меньше чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду? в) Сколько в роте может быть солдат?

8. Моток веревки режут без остатка на куски длиной не меньше 99 см, но не больше 102 см (назовем такие куски стандартными).

а) Некоторый моток веревки разрезали на 33 стандартных куска, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число стандартных одинаковых кусков можно было бы разрезать тот же моток веревки?

б) Найдите такое наименьшее число, что любой моток веревки, длина которого больше см, можно разрезать на стандартные куски.

9. За новогодним столом дети ели бутерброды и конфеты, причем каждый что-то ел, и может быть так, что кто-то ел и то и другое. Известно,

что мальчиков, евших бутерброды, было не более чем $\frac{15}{16}$ от общего числа детей, евших бутерброды, а мальчиков, евших конфеты, было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа детей, евших конфеты.

а) Могло ли за столом быть 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть за столом, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа детей без дополнительного условия пунктов а и б?

2.4. Дистанционная форма контроля за знаниями учащихся

Контроль за выполнением заданий для самостоятельной работы предлагаем организовать в дистанционной форме. Далее приведем основные сведения о дистанционных формах контроля обучения.

Для организации самостоятельной и дифференцированной работы в школе используется дистанционная форма, которая заключается в следующем.

1. Составляется подборка задач для тренировки по разным типам заданий формата ЕГЭ. К каждому прилагается теоретический материал.

2. По мере изучения материала на занятиях, рассылаются задания по электронной почте.

3. В случае необходимости (пропуска уроков учеником) делается рассылка теоретического материала, например, в виде презентаций.

4. С детьми оговариваются сроки сдачи заданий.

Обучение и закрепление материала может осуществляться дистанционно на образовательных порталах типа [4]. Регистрируясь на портале, учитель может составлять тесты из различных вариантов ЕГЭ профильного уровня и следить за процессом решения заданий школьниками. Так же существует возможность онлайн-конференций учителя с учениками,

что делает обучение еще более интерактивным, поскольку в таком случае интересные вопросы можно задавать сразу и, соответственно, получать на них развернутый ответ.

Ученик сам выбирает удобные ему режим и время работы: он отправляет результаты частями (что позволяет учителю оперативно отвечать на его вопросы), либо сразу весь объем работы.

Прослушать повторно одну и ту же лекцию в обычной школе не получится, поскольку учебные планы этого не предполагают. Но это возможно на образовательных порталах, где количество просмотров лекции не ограничивается. В таком виде факультативные курсы очень удобны, что позволяет использовать интернет-ресурсы для повышения качества образования школьников. Например, лекцию об основных свойствах делимости можно посмотреть здесь [13], а поучиться решать задачи на делимость и остатки здесь[22].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение заданий на делимость, прежде всего, связано с умением моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, поэтому в данной работе были рассмотрены примеры задач на делимость, для решения которых нужны были не только теоретические знания, но и умения строить математические модели.

Целью данной работы была организация системы подготовки школьников к решению задания 19 ЕГЭ по математике (профильный уровень).

В первой главе «основы делимости целых чисел» представлен теоретический материал по следующим вопросам: основные понятия и свойства делимости; деление с остатком; простые и составные числа; НОД и НОК; количество и сумма делителей натурального числа; признаки делимости. Теоретический материал проиллюстрирован примерами. Всего разобрано 9 примеров. В основном примеры взяты из сборников для подготовки к ЕГЭ.

Вторая глава носит практический характер. В ней выделены типы задания 19 из ресурсов [4], [7], [9]. Нами рассмотрены следующие типы: делимость целых чисел; десятичная запись числа, деление с остатком; разные задачи на числа. Для обучения школьников решать данные типы задания 19 предложены занятия, которые могут проводиться в рамках факультативного курса по подготовке к ЕГЭ по математике (профильный уровень). Всего разработано 3 занятия. Для занятий представлены 20 задач с решением для совместного обсуждения с учителем. Также составлены задания для самостоятельной работы школьников. Контроль за выполнением данных заданий предполагается организовать в дистанционной форме.

В процессе выполнения работы была достигнута поставленная цель – организована система подготовки школьников к решению задания 19 из ЕГЭ по математике (профильный уровень)

Решены сформулированные в начале исследования задачи:

- изучены и проанализированы учебная и методическая литература по избранной теме;
- исследованы и выделены типы заданий;
- указаны способы решения заданий.

Результаты данной работы могут быть применены учителями математики при проведении факультативных занятий со школьниками 10-11-х классов в процессе подготовки к ЕГЭ по математике (профильный уровень), а также студентами математических факультетов в период прохождения педагогической практики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вольфсон Г.И.* Математика ЕГЭ 2010 / Санкт-Петербург: издательство СММО Пресс, 2010. – 57с.
2. *Вольфсон Г.И., Пратусевич М.Я., Рукишин С.Е., Столбов К.М., Яценко В.И.* ЕГЭ 2013 Математика Задача С6 / Москва: издательство МЦНМО, 2013. – 81с.
3. *Яценко И.В., Шестаков С.А., Трепалин А.С.* Подготовка к ЕГЭ по математике 2016 Профильный уровень / Москва: издательство МЦНМО, 2016. – 203с.
4. *Гущин Д.Д.* Решу ЕГЭ [Электронный ресурс] : образовательный портал для подготовки к экзаменам: [http:// http://reshuege.ru](http://reshuege.ru). 2011-2016.
5. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов [Электронный ресурс]: <http://school-collection.edu.ru>. 2006-2016 ФГАУ ГНИИ ИТТ "Информика"
6. *Зубкова Т.А.* Организация курсов по выбору в рамках предпрофильной подготовки школьников / Вестник Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета. Серия: Информационные компьютерные технологии в образовании, №1 2005г.
7. *Лысенко Ф.Ф., Кулабухова С.Ю.* Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год: учебно-методическое пособие / Ростов-на-Дону: Легион, 2015.352с.
8. Задача 19 базового уровня ЕГЭ 2015. Признаки делимости чисел: [Электронный ресурс] http://mathematichka.ru/ege/problems_base2015/problem19BL_2015.html / Дата обращения 15.04.2016.
9. *Корянов А.Г., Прокофьев А.А.* Математика ЕГЭ 2011(типовые задания С6. Задачи на целые числа (от учебных задач до олимпиадных) / Корянов А.Г., г. Брянск, akoryanov@mail.ru; Прокофьев А.А., г. Москва, aaprokof@yandex.ru.

10. Алфутова, Н. Б. Алгебра и теория чисел для математических школ: Сборник задач для математических школ / Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов: МЦНМО, 2002. – 264 с.
11. Савина, Л. А. Приглашение в теорию чисел: учебное пособие для студ. вузов / Л. А. Савина, А. П. Савина М. : Просвещение, 2003.
12. Ермолаева, Н. А. Новое в курсе математики средней школы: Методическое пособие / Н. А. Ермолаева, Г. Г. Маслова. – М.: Просвещение, 1998.
13. Лекция. Основные свойства делимости
[<http://www.fassen.net/show/Основные+свойства+делимости> / Дата обращения: 17.04.2016].
14. Баранников, А. В. Элективные курсы в профильном обучении. Первое сентября, 2004 г., 10 февраля, № 102, стр. 1 – 2.
15. Воронина Г. А. Элективные курсы: алгоритмы создания, примеры программ / Айрис-пресс, 2006 г.
16. Нестеренко, Ю. В. Теория чисел: учебник для студ. высш. учеб. заведений / Ю. В. Нестеренко – М.: Издательский центр Академия, 2008. – 272 с.
17. Оганесян, В. А. Методика преподавания математики в средней школе: Учебное пособие для студентов физико-математического факультета педагогических институтов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В.Я. Саннинский – М.: Просвещение, 2001.
18. Протанова, И. О. Программы школьных факультативов по математике: Методическое издание./ И. О. Протанова. – М.: Просвещение, 2006. – 15 с.
19. Савина, Л. А. Приглашение в теорию чисел: учеб. пособие для студ. вузов / Л. А. Савина, А. П. Савина. – М. : Просвещение, 2003.
20. ЕГЭ и ГИА по математике 2016 [Электронный ресурс]: <http://alexlarin.net/ege16.html>.

21. *Сикорский, К. П.* Дополнительные главы по курсу математики: учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 7 – 8 классов / К. П. Сикорский. – М.: Просвещение, 1974.
22. Теория чисел. Учимся решать задачи на делимость и остатки. ЕГЭ. Математика [Электронный ресурс]: <https://www.youtube.com/watch?v=KGjTFODFOwk>.
23. *Яковлев И.В.* Задача С: на ЕГЭ по математике [Электронный ресурс]: <http://ege-study.ru/wp-content/uploads/2012/06/c6.pdf>.
24. *Бардушкин В.В., Кожухов И.Б., Прокофьев А.А., Фадеичева Т.П.* Основы теории делимости чисел. Решение уравнений в целых числах / Факультативный курс. – М.: МГИЭТ(ТУ), 2003. – 224 с
25. *Галкин Е. В.* Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами: Учеб. пособие для учащихся 7–11 кл. / Челябинск: Взгляд, 2005. – 271 с. – (Нестандартные задачи по математике).
26. *Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К.* Как решают нестандартные задачи / Под ред. В. О.Бугаенко. – 4-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2008. – 96 с.
27. *Р. М. Федоров, А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи, И. В. Яценко* Московские математические олимпиады 1993–2005 г./ Под ред. В. М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2006. – 456 с.