ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Материал выпускной квалификационной работы посвящен созданию курса по выбору для учащихся старших классов общеобразовательных школ по теме «Развитие методов решения задач на экстремумы». *Актуальность* данной темы состоит в том, что экстремальные задачи применяются во многих областях науки и техники, поэтому создаваемый курс будет полезен школьникам.

Целью выпускной квалификационной работы является формирование исследовательских умений учащихся при изучении курса по выбору «Развитие методов решения задач на экстремумы».

Для ее реализации следует решить *задачи*:

– подобрать литературу, касающуюся исследовательской деятельности школьников;

– представить сведения о историческом процессе формирования методов решения экстремальных задач;

– разработать структуру и учебно-тематический план курса по выбору;

– описать содержание уроков и составить рекомендации к их проведению.

Объектом исследования выпускной квалификационной работы является формирование исследовательских умений учащихся при проведении курса по выбору.

Предмет исследования – исследовательские умения учащихся, формирующиеся в курсе по выбору «Развитие методов решения задач на экстремумы».

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованной литературы, насчитывающий 30 наименований.

Во введении обозначена актуальность выбранной темы, определены объект и предмет исследования, цель и задачи для ее достижения, приведена краткая структура работы.

В первой главе содержатся сведения о формировании методов решения задач на максимумы и минимумы с древних времен до создания дифференциального и интегрального исчислений.

Вторая глава представляет курс по выбору «Развитие методов решения задач на экстремумы». В нем присутствует учебно-тематический план, разработан конспект урока. Кроме того, даны методические рекомендации по проведению каждого из уроков. Весь курс направлен на формирование исследовательских умений учащихся. В основе проведения используются современные информационные технологии.

В заключении подведены итоги проделанной работы, отмечены дальнейшие направления исследования по данной тематике.

В списке литературы приведены первоисточники о развитии методов решения задач на экстремумы. Кроме того, использовались издания, относящиеся как к исследовательской деятельности, так и методике преподавания школьной математики.

Материалы исследования были представлены в следующих публикациях:

1. *Материалы* научно-практической конференции студентов математического факультета ПГГПУ (12 ноября 2013 г., г. Пермь): сб. тезисов докл. / под общ. ред. Ю.В. Корзняковой; Перм. гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2013. – С. 21.

2. *Вопросы* математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. межрегион. научн.-практ. конф. студентов матем. фак-тов / ред. кол.: Ю.В. Корзнякова, И.В. Косолапова; под общ. ред. Ю.В. Корзняковой; Перм. гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2014. – Вып. 7. – С. 17.

3. *Вопросы* математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. межрегион. науч.- практ. конф. студентов матем. фак-тов / ред. кол.: Ю.В. Корзнякова, И.В. Косолапова; под общ. ред. Ю.В. Корзняковой; Перм. гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2016. – Вып. 9. – С. 26.

ГЛАВА 1. ИСТОРИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС ФОРМИРОВАНИЯ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Глава посвящена историческим сведениям о развитии методов решения задач на максимумы и минимумы, а именно речь идет о возникновении и развитии самых ранних приемов, методов, которые послужили основой для формирования современных способов решения экстремальных задач и методов с использованием понятий производной и интеграла [20].

1.1. Формирование ранних методов решения экстремальных задач

С понятием нахождения оптимального решения той или иной задачи приходится сталкиваться ежедневно. Поэтому разумно обратиться за помощью к математике. Причины изучения экстремальных задач кроются в житейских потребностях разумно распределять ресурсы, совершать выгодные покупки и многих других сферах деятельности человека. Они позволяют ему для достижения желаемой цели прийти к нужному варианту.

Истоки задач на экстремум появились около двадцати пяти веков назад. Большое распространение они получили впоследствии при решении задач с физическим содержанием: нахождением траектории движения тел, планет Солнечной системы, распространением света и радиоволн, качанием маятников и других.

Одна из самых древних экстремальных задач повествует о финикийской царевне Дидоне. Спасаясь от преследований брата, она отправилась искать прибежище на запад вдоль Южного побережья Средиземного моря. Приглянулось одно место, расположенное на берегу. Дидона повела переговоры с предводителем местного народа Ярбом о продаже участка земли. Он предложил продать столько, сколько можно «окружить бычьей шкурой».

Сделка состоялась, и тогда Дидона изрезала шкуру быка на мелкие тесемки, связала все их и получила веревку, окружив ею большую территорию. На ней она основала крепость, а вблизи построила город Карфаген, став его первой царицей. Там ожидали Дидону впоследствии неразделенная любовь и мученическая смерть [22].

Задача 1. *Сколько земли можно окружить бычьей шкурой*?

Решение. Для этого найдем кривую, охватывающую максимальную площадь. Рассмотрим два случая решения данной задачи. В первом (рис. 1), окруженная территория принимает форму полукруга. Пусть l – длина веревки, тогда $l = \pi R$. Отсюда $R = \frac{l}{\pi}$, поэтому $S_1 = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi\frac{l^2}{\pi^2} = \frac{l^2}{2\pi}$.

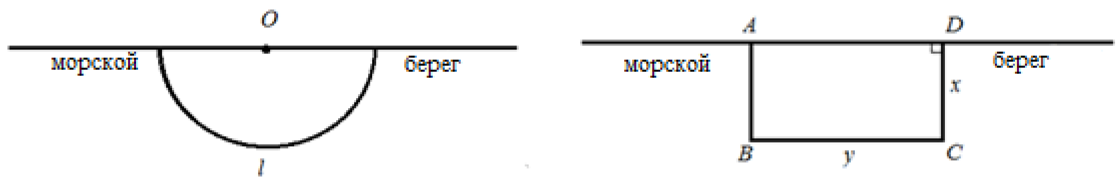

Рис. 1. Задача Дидоны

Дадим второе, аналитическое решение. В нем искомая фигура представляет прямоугольник *ABCD*, ограниченный с трех сторон. Пусть их длины x, y (рис. 2), тогда $S_2 = xy$. Так как $y = l - 2x$, то $S_2 = lx - 2x^2$.

Для того чтобы площадь S_2 была наибольшей, нужно вычитаемое сделать максимальным. А это будет только тогда, когда $lx - 2x^2 = 0$. Геометрической иллюстрацией левой части равенства является парабола, ветви которой направлены вниз. У нее абсцисса точки экстремума $x_0 = \frac{l}{4}$, тогда максимальное значение $y_0 = \frac{l}{2}$, т.е. $S_2 = \frac{l^2}{8}$.

Сравним площади $S_1 = \frac{l^2}{2\pi}$, $S_2 = \frac{l^2}{8}$ и получим, что $S_1 > S_2$, т.е. максимальную площадь территории имеет полукруг. Задача решена.

С древних времен ученых стал интересовать вопрос о нахождении общего подхода к исследованию экстремальных задач. Поэтому возникали различные попытки и открытия, которые впоследствии позволили сформировать теорию экстремумов.

К исследованию оптимизационных задач существуют разные подходы. Более общие методы их решения сыграли важную роль в изучении таких дисциплин, как геометрия, естествознание, механика, физика и техника. Появились они и в процессе формирования дифференциального и интегрального исчислений.

Геометрические задачи на максимум и минимум встречаются у трех величайших ученых античности «Золотого века» греческой математики – Евклида, Архимеда, Аполлония.

Евклид (III в. до н.э.) – древнегреческий математик. Его основной труд – 13 книг «Начал» – содержит изложение планиметрии, стереометрии, ряда вопросов арифметики и теории чисел; в ней он подвёл итог предшествующему развитию греческой математики и создал фундамент для дальнейшего развития математики. Первые книги «Начал» включают определения используемых понятий (точка, линия, плоскость, фигура и т.д.), а затем на основе небольшого числа основных положений, принимаемых без всяких ссылок на интуицию и наглядность, строится вся система геометрии. В первой книге приводятся условия равенства треугольников, соотношения между сторонами и углами треугольников, теорию параллельных линий и условия равновеликости треугольников и многоугольников. В книге II даются методы преобразования многоугольника в равновеликий ему квадрат. Третья содержит учение об окружности. В четвертой рассматриваются вписанные и описанные многоугольники; шестая содержит учение о подобных фигурах. В последних XI–XIII книгах излагаются основы стереометрии. Остальные книги, не упомянутые выше, т.е. пятая, седьмая, восьмая, девятая и десятая, посвящены теории пропорций и арифметике, причем изложение основано на геометрической алгебре [17].

Евклид решил ряд экстремальных задач. Решение одной из них представлено ниже.

Задача 2. *В данный треугольник вписать параллелограмм наибольшей площади, одна из сторон которого лежит на основании*.

Решение. Он обозначил через x сторону параллелограмма *BLMN*, лежащую в основании a данного треугольника; пусть h – высота параллелограмма (рис. 2).

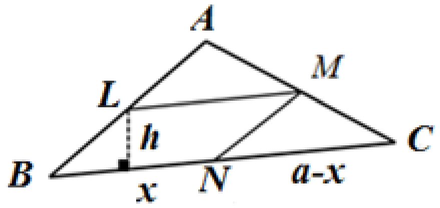

Рис. 2. Задача Евклида

Тогда его площадь $S = hx$ $(*)$. Ученый выражал высоту $h = LB \sin B$, где LB – смежная основанию сторона параллелограмма. Из подобия треугольников находил LB и, подставив значения h и LB в $(*)$, вычислил площадь параллелограмма. Таким образом, задача сводилась, говоря современным языком, к определению максимума функции $y = x(a - x)$.

Используя эллиптический метод приложения площадей, Евклид доказал, что наибольшее значение будет в том случае, когда сторона параллелограмма, параллельная основанию треугольника, является его средней линией.

Чуть позже экстремальными задачами занимался и Архимед. В своей работе «О коноидах и сфероидах» он, используя открытый им закон рычага и инфинитезимальные методы, получил формулу объема шара, равную $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, что было сделано впервые.

Развитие задач на максимум и минимум продолжалось в трудах известного математика, инженера, практика времен античности Герона Александрийского (I в.). Ниже сформулирована задача на нахождение минимальных расстояний, принадлежащая этому ученому.

Задача 3. *Даны две точки* A и B *по одну сторону от прямой* l. *Требуется найти на этой прямой такую точку* D, *чтобы сумма расстояний от* A *до* D *и от* B *до* D *была наименьшей*.

Решение. Пусть B_1 – точка симметричная B относительно прямой l. Соединим A с B_1. Тогда точка D пересечения AB_1 с прямой l будет искомой (рис. 3). Действительно, для любой точки D', отличной от D, имеет место неравенство: $AB < AD' + D'B$. Задача решена. Заметим, что искомая точка D обладает тем свойством, что угол α равен углу β, а также $\varphi_1 = \varphi_2$, т.е. угол падения равен углу отражения.

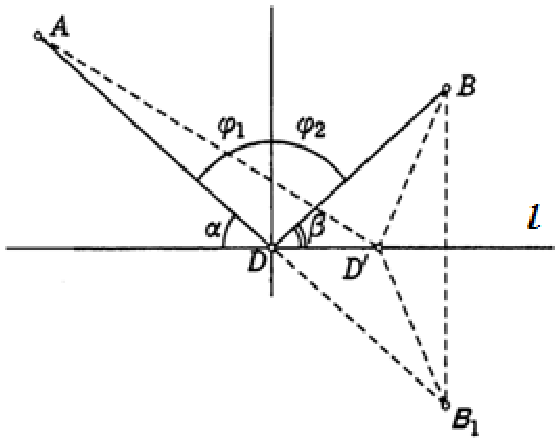

Рис. 3. Задача Герона

Математические труды Герона являются энциклопедией античной прикладной математики. Известный труд ученого «Метрика» состоит из 13 книг, в которых даны правила и формулы для точного и приближенного расчета геометрических фигур, как плоских, так и пространственных; площадей правильных многоугольников, объемов усеченных конуса и пирамиды, шарового сегмента, пяти видов правильных выпуклых многогранников и др. В "Метрике" приводится знаменитая формула, носящая имя Герона для определения площади треугольника по длинам трех сторон, даются правила численного решения квадратных уравнений и приближенного извлечения квадратных и кубических корней [9]. В ней исследуются простейшие подъемные приспособления — рычаг, блок, клин, наклонная плоскость и винт, а также некоторые их комбинации. В этом труде Герон ввел термин "простые машины" и использовал для описания их работы понятие момента силы.

В своем сочинении «О диоптре» Герон изложил правила земельной съемки, фактически основанные на использовании прямоугольных координат. Главной частью диоптры служила линейка с укрепленными на ее концах визирами. Она вращалась по кругу, который мог занимать и горизонтальное, и вертикальное положения, что давало возможность намечать направления, как в горизонтальной, так и вертикальной плоскостях. Для правильности установки прибора к нему присоединялись отвес и уровень. Пользуясь этим прибором и вводя в употребление прямоугольные координаты, Герон мог решать на местности различные задачи: измерять расстояние между двумя точками, когда одна из них или обе недоступны наблюдателю, проводить прямую, перпендикулярную к недоступной прямой линии; найти разность уровней между двумя пунктами, измерить площади простейших фигур.

Герон прославился как выдающийся изобретатель. Он создал много приборов и автоматов, в том числе, прибор для измерения длины пути (как в современном таксометре), автомат для продажи «святой» воды, кукольный театр. Все куклы были автоматами и заводились механически. На сцене они играли свои роли на протяжении всех шести действий [10].

В античные времена решение экстремальных задач осуществлялось из геометрических соображений, а также с широким применением использования геометрической алгебры. Элементарным методом невозможно было решать многие имевшиеся и возникавшие тогда задачи на максимум и минимум. Поэтому требовались дальнейшие исследования в этой области.

1.2. Инфинитезимальные методы Греции в период античности

При построении математических теорий в античной Греции рано выделился специфический класс проблем, для решения которых оказалось необходимым исследовать предельные переходы, бесконечные процессы и другие. Уже одно из первых открытий теоретического характера – обнаружение несоизмеримости величин – поставило задачу рационального объяснения подобных проблем. В данном случае они были связаны с неограниченной продолжительностью процесса нахождения общей меры, бесконечной малостью последней и с тем, что она должна содержаться бесконечное число раз в сравниваемых величинах.

Некоторые группы античных ученых искали вывод из этих затруднений в применении к математике атомистических философских воззрений. Одним из таких ученых был Демокрит, считавший, что все тела состоят из бесконечно малых атомов – первовеличин. Атомистические взгляды Демокрита распространялись и на математику, являвшиеся источником некоторых его высказываний о математических бесконечно малых и о применении их к определению значений некоторых геометрических величин.

Наиболее известными в вопросе исследования этих проблем являлись апории Зенона (V в. до н. э.). Они показали, что, если искать точные доказательства и логически исчерпывающие решения задач, то нельзя пользоваться бесконечностью, опираясь на наивные атомистические соображения. Для подобных целей необходимо было разрабатывать и привлекать методы, содержащие наряду с разновидностями суждений о бесконечно малых элементы предельного перехода [22].

Одним из самых ранних методов такого рода является *метод исчерпывания* [16]. Изобретение его обычно приписывают Евдоксу Книдскому (IV в. до н. э.). Примеры его применения находятся в двенадцатой книге «Начал» Евклида, а также ряде сочинений Архимеда. Метод исчерпывания применялся при вычислении площадей фигур, объемов тел, длин кривых линий, нахождении подкасательных к кривым и т.п. Математическая сущность метода состоит в последовательности выполнения следующих операций:

1. Если необходимо квадрировать какую-либо фигуру, то сначала вписываются последовательно другие фигуры, площади которых монотонно возрастают и для каждой фигуры могут быть определены: A_1, A_2, …, A_n.

2. Фигуры A_i, $i = \overline{1, n}$ выбираются таким образом, чтобы разность между площадями искомой и вписанных фигур была сколь угодно малой.

3. Из факта существования и построения описанных фигур делался вывод об ограниченности сверху последовательности «исчерпывающих» вписанных фигур.

4. С помощью теоретических и практических соображений отыскивался предел последовательности площадей вписанных фигур.

5. Наконец, доказывалось, что предел единственный и равен площади искомой фигуры. Доказательство велось, как правило, от противного. Пусть $A \neq B$. Тогда $B > A$ или $B < A$. Если допустить $B > A$, то выбирался такой элемент последовательности A_n, чтобы $B - A_n < B - A$. Это возможно для любой фиксированной разности $B - A$. Но тогда должно быть $A_n > A$, что невозможно ввиду того, что в действительности $A > A_n$ для любого конечного n. Противоположное допущение ($B > A$) тоже приводит к противоречию, потому что можно было подобрать такое A_n, чтобы $A - A_n < A - B$. Но тогда получилось бы, что $A_n > B$, что невозможно. Поэтому методом исчерпывания доказывается, таким образом, единственность предела. В сочетании с другими методами он полезен для нахождения предела. Однако решения вопроса о существовании предела этот метод не может дать [15].

Приведем пример нахождения квадратуры параболы у Архимеда методом исчерпывания [28].

Задача 4. *Найдите площадь косого параболического сегмента ABC, отсекаемого хордой AC. Касательная к точке B диаметра BO, сопряженного с данной хордой, параллельна последней*: $MBN \parallel AC$.

Решение. Первой фигурой последовательности «исчерпывающих» фигур A_1 является $\Delta\, ABC$ (рис. 4). Вторая фигура A_2 получается добавлением к

$\Delta\, ABC$ двух треугольников: $\Delta\, ADB$ и $\Delta\, BCE$. Для построения последних делят AC на 4 равные части и проводят $FD \parallel OB$ и $GE \parallel OB$. Аналогично строятся фигуры A_3, A_4, …, A_n. Из свойств параболы получается: $\Delta\, ADB = 4(\Delta\, ADB + \Delta\, BEC)$. В самом деле, примем OB и MN соответственно за оси x и y косоугольной системы координат. Координаты точки $E\left(\xi, \dfrac{y}{2}\right)$ удовлетворяют условию: $\left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = m\xi$, откуда $\xi = \dfrac{y^2}{4m}$. Тогда, $GE = x - \xi = \dfrac{y^2}{m} - \dfrac{y^2}{4m} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{y^2}{m} = \dfrac{3}{4}x = \dfrac{3}{4}OB$.

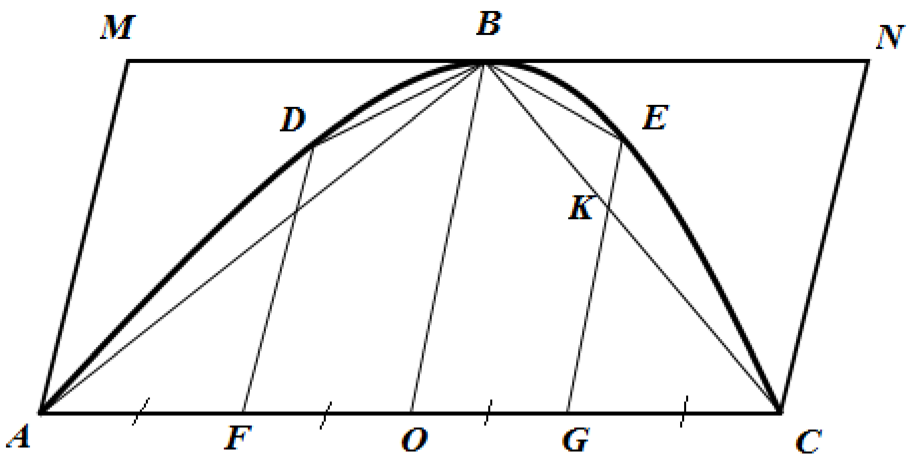

Рис. 4. Задача Архимеда

Так как $GK = \dfrac{1}{2}OB$, то $KE = \dfrac{1}{4}OB$ и $GK = 2KE$. После этого сравнивают площади треугольников: $\Delta\, CKG = 2\,\Delta\, KCE = \Delta\, BCE$; $\Delta\, OBC = 4\,\Delta\, GKC = 4\,\Delta\, BCE$. Аналогичные рассуждения приводят к соотношению: $\Delta\, AOB = 4\,\Delta\, ABD$, и упомянутое свойство параболы доказано.

Итак, если $A_1 = \Delta$, то $A_2 = \Delta + \dfrac{\Delta}{4}$; $A_3 = \Delta + \dfrac{\Delta}{4} + \dfrac{\Delta}{4^2}$; …; $A_n = \Delta + \dfrac{\Delta}{4} + \ldots + \dfrac{\Delta}{4^{n-1}}$. Теперь требуется доказать, что указанная последовательность фигур действительно «исчерпывает» параболический сегмент, т. е. что $S - A_n < \varepsilon$, где $n = n(\varepsilon)$.

Для этого описывается параллелограмм *AMNC*, у которого $AM \parallel NC \parallel BO$. $A_1 = \frac{1}{2} S_{AMNC}$, но $S < S_{AMNC}$; значит, $A_1 > \frac{1}{2} S$ и $S - A_1 < \frac{1}{2} S$. Фигура A_1 «исчерпала» больше половины площади *S*, а последующие фигуры будут исчерпывать больше половины соответствующих остатков площади *S*. Удовлетворяется лемма исчерпывания.

Лемма исчерпывания: *если из данной фигуры отнять* (*отсечь*) *большее ее половины, от оставшейся части отнять часть большую ее половины и такое проделывать большое число раз, то в результате останется фигура, площадь которой меньше сколь угодно малой величины*.

Следующий шаг – нахождение предела последовательности вписываемых фигур. И решение задачи завершается доказательством от противного единственности результата $\frac{4}{3}\Delta$.

Метод исчерпывания был одним из распространенных методов античной математики. Им широко пользовался Архимед. Ранее этот метод включил в систему «Начал» Евклид, сделав его основой двенадцатой книги. Предельные переходы, достигавшиеся ранее часто в силу интуитивных или эмпирических соображений, получили в методе исчерпывания первое теоретическое оформление, исторически первую форму метода пределов [25].

Логическая строгость метода исчерпывания оставалась непревзойденной в течение многих веков. Он лежал в основе многих инфинитезимальных методов и выдающихся конкретных достижений античных математиков, в первую очередь Архимеда, которому принадлежит приведенный выше пример квадрирования параболического сегмента.

Архимед (III в. до н.э.) — древнегреческий ученый, математик и механик, основоположник теоретической механики и гидростатики. Он разработал методы нахождения площадей, поверхностей и объемов 96 различных фигур, а также тел вращения, поиск центров тяжести. Архимед установил, что площадь поверхности шара в четыре раза больше площади наибольшего его сечения. Вообще, ему принадлежит доказательство более 90 теорем (нахождение объемов тел вращения и их частей, площадей криволинейных фигур).

В физике Архимед ввел понятие центра тяжести, установил научные принципы статики и гидростатики, дал образцы применения математических методов в физических исследованиях. Принцип рычага и учение о центре тяжести являются важнейшими (наряду с законом Архимеда) научными достижениями ученого в области механики. Архимед был одним из крупнейших инженеров своего времени, конструктором машин и механических аппаратов. Он изобрел водоподъемный винт и особенно успешно разрабатывал конструкции военных оборонительных машин, фортификационных сооружений. Архимед являлся первым ученым, уделявшим много внимание и сил решению военных задач.

Следующей разновидностью инфинитезимальных методов античной древности является *метод интегральных сумм*. Наиболее яркие примеры его применения находятся в сочинениях Архимеда: «О шаре и цилиндре», «О спиралях», «О коноидах и сфероидах». Суть этого метода в применении, например, к вычислению объемов тел вращения, состоит в следующем: тело вращения разбивается на части и каждая часть аппроксимируется описанным и вписанным телами, объемы которых можно вычислить. Сумма объемов описанных тел будет больше, а сумма вписанных тел – меньше объема тела вращения. Теперь остается выбрать аппроксимирующие сверху и снизу тела таким образом, чтобы разность их объемов могла быть сделана сколь угодно малой. Это достигается выбором в качестве указанных тел соответствующих цилиндриков.

В качестве примера метода интегральных сумм приведем решение Архимедом задачи вычисления объема эллипсоида вращения в сочинении «О коноидах и сфероидах». Этими названиями обозначаются тела, образованные вращением конических сечений вокруг большой оси: коноиды – это параболоиды и гиперболоиды вращения, сфероиды – эллипсоиды вращения. Конкретному решению задачи предпослана лемма исчерпывания: если дан сегмент коноида, отсеченный плоскостью, перпендикулярной оси, то можно вписать в него и описать около него фигуры, состоящие из цилиндров равной высоты таким образом, чтобы описанная фигура превосходила вписанную меньше, чем на любую телесную (объемную) величину.

Итак, дано тело вращения ABC (рис. 5) и объемная величина $\varepsilon > 0$. Делим BO на n равных частей и строим описанные и вписанные цилиндры, суммы объемов которых соответственно обозначим $V_{оп}$ и $V_{вп}$. Их разность равна объему цилиндрика AA_1, т. е. $\pi a^2 \cdot \frac{b}{n}$, который подбором достаточно большого n может быть сделан сколь угодно малым.

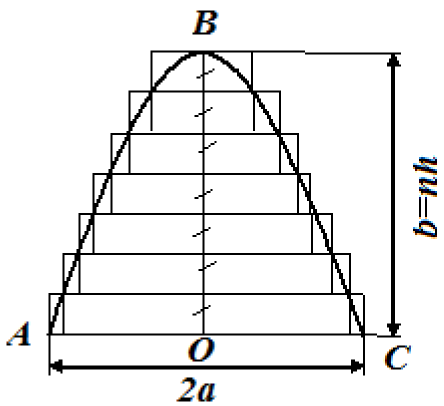

Рис. 5. Сегмент эллипсоида вращения

Теперь предположим, что на данном чертеже изображен сегмент эллипсоида вращения и поставлена задача вычислить его объем. Задача сводится к суммированию квадратов чисел. Далее Архимед производил геометрические преобразования, после чего получил, что искомый объем сегмента $V = \frac{2}{3}\pi a^2 b$, т. е. равен удвоенному объему конуса с тем же основанием и высотой, что и сегмент.

Приведенный пример показывает, что в античной математике сложился ряд элементов определенного интегрирования, в первую очередь, построение верхних и нижних интегральных сумм, аналогичных до известной степени суммам Ж.Г. Дарбу (1842–1917). Другим примером метода интегральных сумм может служить определение площади первого витка спирали Архимеда.

К инфинитезимальным методам можно отнести и ряд других приемов и методов древности. Прежде всего, отметим прием Динострата (IV в. до н. э.), который, отыскивая точку пересечения квадратрисы с осью абсцисс, нашел по существу замечательный предел: $\lim\limits_{\varphi \to 0} \dfrac{\sin\varphi}{\varphi} = 1$.

Инфинитезимальные методы разрабатывались и для решения класса экстремальных задач. В сочинении Архимеда «О шаре и цилиндре» поставлена задача разбиения шара на два сегмента, объемы которых находились бы в заданном отношении $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{m}{n}$. Докажем его результат аналитически.

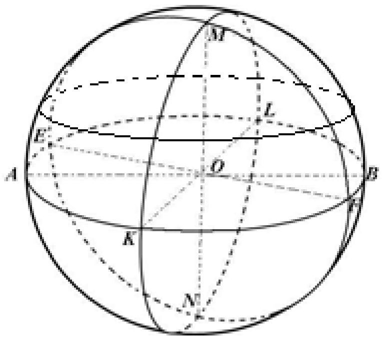

Рис. 6. Изображение шара

Выражаем объемы данных сегментов: $V_1 = \pi(2R-h)^2\left(R - \dfrac{1}{3}(2R-h)\right) = \dfrac{\pi}{3}\left(4R^3 - 3h^2\left(R - \dfrac{1}{3}h\right)\right)$; $V_2 = \pi h^2\left(R - \dfrac{1}{3}h\right)$ (рис. 6).

Рассмотрим их отношение $\dfrac{\pi}{3}\left(4R^3 - 3h^2\left(R - \dfrac{1}{3}h\right)\right) = \dfrac{m\left(\pi h^2\left(R - \dfrac{1}{3}h\right)\right)}{n}$ и после преобразований получим $4R^3 = \dfrac{3h^2(m+n)(R-h)}{n}$. Это значит, что высота большего сегмента $2R-h$ удовлетворяет пропорции $4R^2 : h^2 = 3(R-h) : \dfrac{n}{m+n}R$. Преобразовав это отношение, приходим к уравнению третьей степени относительно h $3h^3(m+n) - 3h^2R(m-n) + 4R^3n = 0$, методы решения которой не были еще известны в то время.

Из более поздней рукописи известно, что Архимед, отыскивая геометрическое решение уравнения $x^2(a-x)=Sc$, правильно находил, что максимум его левой части в области $0<x<a$ достигается при $x=\frac{2}{3}a$, тем самым решая экстремальную задачу [22].

Наконец, в античной математике рассматривались и так называемые *вариационные задачи*. У Архимеда подобная задача встречается только один раз – в заключительном предложении сочинения «О шаре и цилиндре». Здесь рассматриваются *изоповерхностные сегменты* различных шаров и доказывается, что сегмент, имеющий форму полушара, имеет наибольший объем. Позднее вышло сочинение Зенодора, в котором теория изопериметрических фигур была строго и полно развита для многоугольников, кругов и, в некоторой степени, многогранников, простейших тел вращения и для сферы. Предложения экстремального характера были широко распространены в то время, подчас нося не чисто математический, а механический или даже натурфилософский характер.

Инфинитезимальные методы древней Греции послужили исходным пунктом многих исследований ученых XVI и XVII вв., в том числе, к созданию анализа бесконечно малых.

1.3. Из истории создания дифференциального и интегрального методов решения экстремальных задач

В математике XVII в. самым большим достижением справедливо считается изобретение дифференциального и интегрального исчислений. Сформировалось оно в ряде сочинений И. Ньютона и Г.В. Лейбница. Введение в математику методов анализа бесконечно малых стало началом больших, революционных преобразований, быстро изменивших все лицо математики и поднявших ее роль в системе естественнонаучных знаний человечества.

В создание анализа бесконечно малых внесли свой вклад многие ученые: И. Кеплер, Г. Галилей, Б. Кавальери, Э. Торричелли, Б. Паскаль, Дж. Валлис, Г. Роберваль, П. Ферма, Р. Декарт, И. Барроу и другие.

Рассмотрим методы, содержащие крупицы анализа бесконечно малых – интеграционные и дифференциальные. Вначале они вырабатывались, накапливались и выделялись в ходе решения задач на вычисление объемов, площадей, центров тяжестей и т.п. Древние задачи Архимеда пересматривались вновь и вновь, изучались его инфинитезимальные методы, выяснялись их математические возможности. Интеграционные методы складывались в то время как методы определенного интегрирования. Процесс их формирования и внедрения в математику был очень бурным и скоротечным; уже через 50–60 лет со времени появления первых работ он привел к формированию интегрального исчисления [21].

Самым ранним по времени опубликования методом этого типа был метод непосредственного оперирования с актуальными бесконечно малыми величинами. Появился он в 1615 г. в сочинениях Н. Кеплера. Ученый посвятил практически всю свою жизнь изучению, развитию и пропаганде гелиоцентрической системы Коперника. Анализируя огромный материал астрономических наблюдений, он в 1609–1619 гг. открыл 3 закона движения планет в Солнечной системе, носящие и поныне его имя.

Кеплер изложил свой метод использования бесконечно малых величин в сочинении «Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии». Состоит оно из трех частей; для нас наибольший интерес представляет первая, теоретическая часть. Начинается она со «Стереометрии правильных кривых тел». Это — просто пересказ сочинения Архимеда «О шаре и цилиндре». Кеплер принимал античный метод исчерпывания, которым пользовался Архимед, называл его глубоким, но отбрасывал заключительный этап приведения к противоречию.

Основная идея метода, по мнению Кеплера, состояла в том, что любая фигура или тело представима в виде суммы множества бесконечно малых частей. Круг, например, состоит из бесконечно большого числа бесконечно узких секторов, каждый из которых может рассматриваться как равнобедренный треугольник. Все треугольники имеют одинаковую высоту (радиус круга), а сумма их оснований равна длине окружности. Таким же образом шар оказывается составленным из бесконечного множества конусов, вершины которых сходятся в центре шара, а основания образуют поверхность шара. Метод суммирования актуально бесконечно малых Кеплер распространял и на другие несложные геометрические фигуры и тела (конусы и цилиндры) и их части, рассмотренные у Архимеда [22].

От правильных криволинейных тел Архимеда Кеплер переходил к изучению тел, образованных вращением круга около прямой, не проходящей через его центр, а также вращением других конических сечений (рис. 6). Всего он рассмотрел 92 вида тел вращения. Метод вычисления объемов тел вращения и их частей был у Кеплера единым. Во-первых, изучаемое тело делилось на бесконечное число частиц, занимающих равноправные положения в теле. Эти части тела перегруппировывались, образуя другое тело, объем которого возможно вычислить. Если непосредственное суммирование было невозможно провести, то выделенные частицы предварительно заменялись другими, эквивалентными данным.

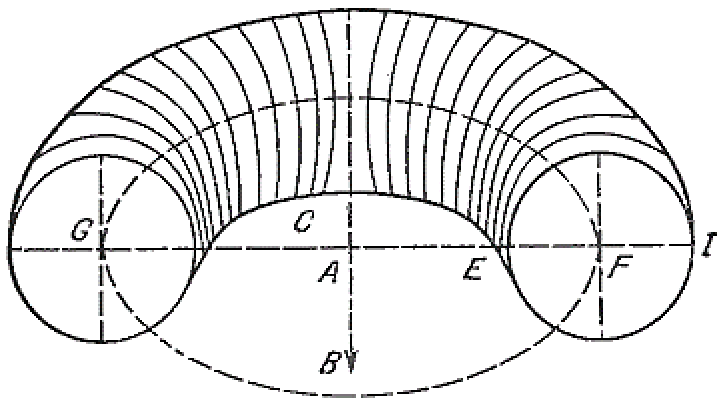

Рис. 6. Тело вращения круга около прямой

Методы Кеплера в определении объемов тел вращения, разумеется, были нестрогими. Это было ясно и ему самому, и его современникам. Тем не менее плодотворность суммирования элементов, взятая Кеплером у Архимеда, была очевидной. Первая же попытка создать регулярный алгоритм оперирования с бесконечно малыми стала весьма популярной. Многие ученые посвятили свои работы усовершенствованию оперативной стороны этого метода и рациональному разъяснению возникающих при этом понятий.

Наибольшую известность приобрела геометрия неделимых, изобретенная Бонавентурой Кавальери (1598–1647). Он происходил из знатного рода, был учеником Г. Галилея. Знаток античных авторов, ученый в то же время глубоко изучал высказанные Галилеем и Кеплером идеи создания исчисления неделимых. Кавальери разработал метод неделимых, который должен был стать универсальным в геометрии. Основные его положения приведены в работах «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного» и «Шесть геометрических опытов».

Метод неделимых изобретен для определения площадей плоских фигур и объемов тел. Как фигуры, так и тела представляются составленными из элементов, имеющих размерность на единицу меньше. Так, фигуры состоят из отрезков прямых, проведенных параллельно некоей направляющей прямой. Этих воображаемых отрезков бесконечно много. Они заключены между двумя касательными. В геометрических телах неделимыми являются плоскости, параллельные некоторой плоскости. Их тоже бесконечно много; границами их совокупности служат две парные касательные плоскости. Идею своего метода Кавальери образно выражал, предлагая читателям представить паука, непрерывно ткущего геометрию из неделимых.

Совокупность всех неделимых, вводимая Кавальери, по существу вводит понятие определенного интеграла. Однако логические трудности, связанные с пониманием неделимого, составления площадей из линий, не имеющих ширины, и тел из бесконечно тонких плоскостей и т.п. не дают еще возможности судить о совокупностях всех неделимых. Поэтому Кавальери вынужден рассматривать отношения тел и фигур, ограничиваясь случаями, когда отношения неделимых постоянны. Таким образом, сущность геометрии неделимых Кавальери можно сформулировать так: плоские фигуры и тела относятся друг к другу, как все их неделимые, взятые вместе; если неделимые находятся в одном и том же отношении друг к другу, то отношение площадей соответствующих фигур (или объемов тел) равно этому отношению.

Эти утверждения практически эквивалентны современным умозаключениям типа: даны две фигуры, ограниченные осью x, прямыми $x = a$ и $x = b$, и соответственно $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ (рис. 7). Отношение площадей $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\sum_{k=1}^{\infty} y_{1k}}{\sum_{k=1}^{\infty} y_{2k}} = \dfrac{\int_a^b f_1(x)\,dx}{\int_a^b f_2(x)\,dx}$. Если $\dfrac{y_{1k}}{y_{2k}} = a = const$ для любого k, то $\dfrac{S_1}{S_2} = k$.

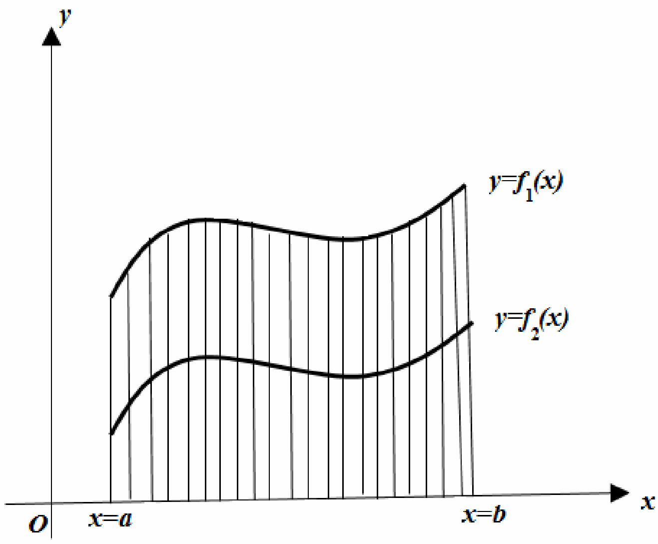

Рис. 7. Метод неделимых Кавальери

Метод неделимых позволил решить множество трудных задач, ранее не поддававшихся решению. Однако у него имелись и свои недостатки. Во-первых, он был непригоден для измерения длин кривых, так как соответствующие неделимые (точки) оказывались безразмерными. Во-вторых, неясность понятия неделимого, невозможность его рационального объяснения явно говорило о необоснованности теории. Тем не менее, определенное интегрирование в форме геометрических квадратур в первой половине XVII в. уже проявило себя. Все усилия отныне были направлены на уточнение его и достижение возможно более общих результатов.

Б. Паскаль (1623–1662), например, рассматривал квадратуры в форме, близкой к употреблявшейся Б. Кавальери. Попытка уточнения состояла в том, что он сумму всех неделимых понимал, как сумму элементарных площадок, образуемых бесконечно близкими одинаково отстоящими друг от друга ординатами, ограниченными отрезком оси абсцисс и кривой. Важное усовершенствование геометрических квадратур было проделано П. Ферма, который ввел деления квадрируемой площади ординатами, отстоящими друг от друга на неравных расстояниях.

Математики первой половины XVII в. с большим удивлением и энтузиазмом убеждались в том, какое большое количество, казалось бы, разнородных задач геометрии и механики приводилось к квадратурам. С каждым годом, каждым новым результатом все более выявлялась общность операций, которые приходилось применять при решении этих задач. Геометрический эквивалент определенного интегрирования, возникший как специфический метод геометрии, частично воспринятый от Архимеда, постепенно приобретал черты общего метода. Идеи, включающие элементы определенного интегрирования, широко распространились среди математиков западноевропейских стран и охватывали к 60-м годам XVII в. обширные классы алгебраических и тригонометрических функций.

В XVII в. П. Ферма в работе «Метод исследования максимумов и минимумов» изучал функцию $y = x(a - x)$ следующим образом. Пусть h – бесконечно малое приращение независимой переменной x. Тогда значение функции $y + h = (x + h)(a - x - h)$. Приравняв исходную функцию к новой, ученый получил соотношение $x(a - x) = (x + h)(a - x - h)$. После тождественных преобразований он перешел к пределу при $h \to 0$. В конечном итоге получил равенство $a - 2x = 0$, откуда $x = \frac{a}{2}$. Его метод был близок к подходам Г.В. Лейбница и И. Ньютона при отыскании экстремумов. Однако у П. Ферма нельзя было выяснить, является ли точка экстремума максимумом или минимумом.

Метод, разработанный П. Ферма, по сравнению с методами Аполлония, является более общим. Он может быть применен для большего класса функций в математическом анализе. В частности, к ним относятся задачи на определение наибольших и наименьших значений функции. Их он поместил в сочинении «Метод нахождения наибольших и наименьших значений». Ученым рассмотрены также различные решения задач на построение касательной. Эти задачи Ферма умел сводить к задачам на нахождение экстремальной величины. Так, в письмах к Р. Декарту он говорил о возможности применять его метод к задачам о построении касательной к параболе, а также к окружности для нахождения максимума и минимума. При анализе решения П. Ферма задачи на построение точки перегиба выяснено, что она – та же задача на нахождение экстремальной величины, т.е. на определение наибольшего (наименьшего) угла, который образует касательная к кривой с положительным направлением оси абсцисс.

В математике XVII в. наряду с интеграционными методами складывались и *методы дифференциальные*. Методы, содержащие элементы дифференцирования, вырабатывались при решении задач, которые в настоящее время решаются с помощью дифференцирования. В XVII в. решали задачи на: определение касательных к кривым, нахождение максимумов и минимумов функций и отыскание условий существования у алгебраических уравнений кратных корней. К этой группе тесно примыкали задачи механики, вытекающие из необходимости в случае неравномерных движений определять скорость в любой точке траектории.

В течение XVII в. дифференциальные задачи решались еще самыми различными методами. Использовались геометрические построения в духе античных математиков, механические соображения, исследования в аналитической геометрии Декарта, инфинитезимальные соображения.

К середине XVII в. накопился достаточно большой запас средств решения задач с помощью дифференцирования. Однако не было еще выделено особой операции дифференцирования, понятий, равнозначных понятиям производной и дифференциала. Не было отчетливой связи дифференциальных и интеграционных методов. Математический анализ формировался в рамках и терминах алгебры, геометрии, механики, сложившихся уже к тому времени научных дисциплин.

Основные понятия и теория интегрального и дифференциального исчислений, прежде всего связь операций дифференцирования и интегрирования, а также их применение к решению прикладных задач, были разработаны в трудах И. Ньютона (1643–1727) и Г. В. Лейбница (1646–1716) в конце XVII в. Их исследования явились началом интенсивного развития математического анализа. Замечаем, что разработка теории и методов интегрального исчисления происходила в конце XIX и XX столетий.

1.4. Нахождение экстремумов с помощью векторной алгебры

Кроме методов решения экстремальных задач, которые представлены выше, существует способ нахождения экстремальных значений с помощью элементов векторной алгебры, а именно скалярного произведения векторов [30]. Рассмотрим принцип нахождения экстремумов на конкретных задачах.

Задача 4. *Найдите минимальное и максимальное значения функции* $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$.

Решение. Рассмотрим два вектора: координаты первого – его координатами являются коэффициенты при переменных данной функции, т. е. $\vec{a}(3, 4)$; второй вектор $\vec{b}$ имеет координаты $\vec{b}(\sin x, \cos x)$. Их длины: $\left|\vec{a}\right| = 5$, $\left|\vec{b}\right| = 1$, Воспользовавшись формулой скалярного произведения векторов, переходим к неравенству $-\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \le \vec{a} \cdot \vec{b} \le \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|$. Найдем $\vec{a} \cdot \vec{b}$ – это выражение, стоящее в правой части *f*(*x*). Таким образом, функция принимает значения $-5 \le f(x) \le 5$.

Ответ: $f_{\max}(x) = 5$, $f_{\min}(x) = -5$.

Задача 5. *Найдите минимальное и максимальное значения функции* $f(t) = \dfrac{-5t^2 + 24t + 5}{1+t^2}$.

Решение. Представим данную функцию в виде двух слагаемых $\dfrac{-5t^2 + 24t + 5}{1+t^2} = \dfrac{5\left(1-t^2\right) + 2t \cdot 12}{1+t^2} = 5 \cdot \dfrac{1-t^2}{1+t^2} + \dfrac{2t}{1+t^2} \cdot 12$. Выпишем координаты векторов $\vec{a}\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ и $\vec{b}(5, 12)$. Находим их длины: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \dfrac{4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}} = 1$, $\left|\vec{b}\right| = 13$.

Значит, $-13 \le f(x) \le 13$.

Ответ: $f_{\max}(x) = 13$, $f_{\min}(x) = -13$.

Задача 6. *Найдите минимальное и максимальное значения функции* $f(x) = 4\sqrt{1-x} + 3\sqrt{x}$.

Решение. Выпишем координаты векторов $\vec{a}\left(\sqrt{1-x}, \sqrt{x}\right)$, $\vec{b}(4, 3)$ и находим их длины $\left|\vec{a}\right| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = 5$. Рассмотрим отношения координат данных векторов $\dfrac{\sqrt{1-x}}{4} = \dfrac{\sqrt{x}}{3}$. Выразим отсюда переменную *x*: $3\sqrt{1-x} = 4\sqrt{x}$; $9 - 9x = 16x$; $x = \dfrac{9}{25}$.

Рассмотрим два случая:

1) $x = \dfrac{9}{25}$ и $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, тогда $\vec{a}\left(\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}, \sqrt{\dfrac{9}{25}}\right)$; $\vec{a}\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$, $\vec{b}(4, 3)$. Находим скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{16}{5} + \dfrac{9}{5} = 5$, а потому $f(x) \le 5$.

2) Координаты вектора $\vec{a}$ не могут быть отрицательными, а потому $f(x) > 0$ и она принимает максимальное и минимальное значение при $x = 1$, т. е. $\vec{a}(0, 1)$, $\vec{b}(4, 3)$. Отсюда следует, что $\vec{a} \cdot \vec{b} \ge 3$. Значит, $3 \le f(x) \le 5$.

Ответ: $f_{\max}(x) = 3$, $f_{\min}(x) = 5$.

Задача 7. *Найдите минимум функции* $f(x, y, z) = 4x - 3y + 12z - 121$ *и выясните, при каких значениях переменных достигается этот минимум, если* $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 576$.

Решение. Из условия $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 576$ определим вектор $\vec{a}(2x, y, 2z)$ и $\left|\vec{a}\right| = 24$. Искомую функцию перепишем в виде: $f(x, y, z) = 4x - 3y + 12z - 121 = \dfrac{2 \cdot 2x - 3y + 6 \cdot 2z - 121}{\vec{b} \cdot \vec{a}}$, где $\vec{b}(2, -3, 6)$ и $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$. $\vec{b} \cdot \vec{a}$ принимает минимальное значение при условии, когда $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, т. е. $\cos 180^\circ = -1$. Отсюда следует, что $f_{\min} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos 180^\circ - 121 = 24 \cdot 7 \cdot (-1) - 121 = -289$ при условии $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Найдем значения переменных, при которых достигается этот минимум: $\dfrac{2x}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{2z}{6} = -\dfrac{24}{7}$, откуда $x = -\dfrac{24}{7}$, $y = \dfrac{72}{7}$, $z = -\dfrac{72}{7}$.

Ответ: $f_{\min}(x) = -289$, $x = -\dfrac{24}{7}$, $y = \dfrac{72}{7}$, $z = -\dfrac{72}{7}$.

Задача 8. *Найдите максимум функции* $f(x, y, z) = 6x - 4y + 5z - 120$, *если* $9x^2 + 4y^2 + 25z^2 = 121$. *При каких x, y, z достигается этот максимум*?

Решение. Рассмотрим $\vec{a}(3x, 2y, 5z)$, тогда $\left|\vec{a}\right| = 11$; $\vec{b}(2, -2, 1)$ и $\left|\vec{b}\right| = 3$. Из этого следует, что $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} - 120$. Максимум достигается тогда, когда $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, т. е. $\cos 0^\circ = 1$. $f_{\max} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos 0^\circ - 120 = -87$, причем $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

Найдем значения *x*, *y*, *z*, при которых $f_{\max}$: $\dfrac{3x}{2} = \dfrac{2y}{-2} = \dfrac{5z}{1} = \dfrac{11}{3}$, откуда $x = \dfrac{22}{9}$, $y = -\dfrac{11}{3}$, $z = \dfrac{11}{15}$.

Ответ: $f_{\max}(x) = -87$, $x = \dfrac{22}{9}$, $y = -\dfrac{11}{3}$, $z = \dfrac{11}{15}$.

Таким образом, в первой главе рассмотрен процесс формирования методов решения экстремальных задач. Из материала последнего пункта можно заметить, что возможны и другие приемы нахождения экстремумов.

ГЛАВА 2. КУРС ПО ВЫБОРУ «РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ЭКСТРЕМУМЫ»

История математики является важной частью всеобщей истории. Элементы историзма способствуют развитию творческих способностей школьников, формированию целостной культуры мышления. Используя примеры из истории науки, можно сделать очень многое для пробуждения интереса хотя бы некоторых учащихся к поискам неизвестного. Учащимся полезно рассказывать творческие биографии знаменитых ученых: как они приходили к постановке своих исследований, как находили метод исследования, как формулировали окончательный результат [24].

История математики служит мощным средством формирования положительной мотивации к изучению математики, повышению интереса к ней. Школьники с увлечением решают исторические задачи, делают сообщения на исторические темы. Важно показывать ученикам, как по мере развития математические методы приобретали всеобщий, универсальный характер, становились общенаучными. Поэтому создание курса по выбору «Развитие методов решения задач на экстремумы» позволит учащимся:

- повторить ранее пройденный материал;
- расширить свои знания в вопросе по выбранной тематике;
- проявить свои творческие способности;
- развить исследовательские навыки.

2.1. Понятие исследовательской деятельности учащихся

Современное образование нацелено на совершенствование учебного процесса. Для этого необходимо применять такие методы обучения, которые повышали бы личное участие каждого обучающего и его интерес к учению.

Активная работа способствует развитию личности ученика, мышления, воли и т.д. Способность учащихся к исследовательской деятельности эффективно развивается в процессе их целесообразно организованной деятельности под руководством учителя.

Для того чтобы у школьников возникла потребность в приобретении знаний, нужно создать для этого комфортные условия. Развитие мышления учащихся может идти не только путем овладения специальными знаниями различных предметов, но и путем развития способностей к самостоятельной деятельности.

От правильности планирования видов и форм заданий, использованием эффективных систем заданий, а также от того, насколько грамотно учитель руководит этой деятельностью, зависит успех исследовательской деятельности.

При организации учебного исследования учитель должен уметь:

- правильно выбрать уровень проведения учебного исследования, который соответствует развитию мышления учащегося;
- сочетать различные формы проведения исследований на уроке;
- формировать проблемные ситуации в зависимости от уровня учебного исследования, его места в структуре урока и от цели урока.

Учитель должен уметь организовать самостоятельную поисковую деятельность учащихся по получению знаний, а также приобретению умений и навыков по усвоению способов умственной деятельности. В качества мотива может выступать интерес, внутреннее противоречие, которое вызывает потребность учащегося к исследованию знаний, ранее являющиеся ему неизвестными. Фиксация проблемной ситуации заканчивается формулированием проблемы – цели исследования [12].

Исследовательская деятельность школьников, связанная с усвоением математических знаний, играет важную роль в интеллектуальном развитии учащихся. Понятие «учебное исследование» обладает признаками:

– процесс поисковой познавательной деятельности (изучение, выявление, установление чего-либо и т.д.);

– получение новых знаний;

– самостоятельная работа учащихся при выполнении задания;

– реализация дидактических целей обучения.

Учебное исследование как метод обучения математике формирует, развивает творческое мышление. Анализ понятий учебного познания и деятельности позволяет заключить, что для организации учебно-воспитательного процесса на основе исследовательской деятельности школьников учебная и исследовательская деятельность должны рассматриваться как единая учебно-исследовательская деятельность.

Исследовательская деятельность – это процесс приобретения практических и теоретических знаний с преимущественно самостоятельным применением научных методов познания, что является условием и средством развития у обучающихся творческих исследовательских умений. В структуру такой деятельности входят: исследовательская задача, исследовательская действия и операции, действия контроля и оценки. Содержанием исследовательской деятельности являются общие способы учебных и исследовательских действий, направленные на решение конкретно-практических и теоретических задач.

Под учебным исследованием понимается такой вид познавательной деятельности учащихся, который способствует формированию умений:

– добывать новые предметные знания, приемы и способы действий;

– самостоятельно организовывать поиск;

– достигать поставленных целей обучения;

– формировать мыслительные операции такие, как аналоги, классификация, обобщение и т.п.

Анализ этапов исследования, выделяемых разными авторами, позволяет сделать вывод о том, что обязательными из них являются четыре, образующие основную структуру учебного исследования: постановка проблемы; выдвижение гипотезы; проверка гипотезы; вывод.

Эффективным средством обучения и развития является организация учебных исследований, цель которых состоит в том, чтобы помочь учащимся самостоятельно открыть новые знания и способы деятельности, углубить и систематизировать изученное. Для успешного осуществления исследовательской деятельности обучающиеся должны овладеть следующими действиями:

- постановка проблемы и аргументирование её актуальности;
- формулировка гипотезы исследования и раскрытие замысла – сущности будущей деятельности;
- планирование исследовательских работ и выбор необходимого инструментария;
- собственное проведение исследования с обязательным поэтапным контролем и коррекцией результатов работ;
- оформление результатов исследовательской деятельности как конечного продукта;
- представление результатов исследования широкому кругу заинтересованных лиц для обсуждения и возможного дальнейшего практического использования.

Специфика исследовательской деятельности учащихся определяет многообразие форм её организации. В зависимости от урочных и внеурочных видов занятий исследовательская деятельность может приобретать разные формы.

Формами организации исследовательской деятельности на урочных занятиях могут быть:

- урок-исследование, урок-лаборатория, урок – творческий отчёт, урок изобретательства, урок «Удивительное рядом», урок – рассказ об учёных, урок

– защита исследовательских проектов, урок-экспертиза, урок «Патент на открытие», урок открытых мыслей;

- учебный эксперимент, который позволяет организовать освоение таких элементов исследовательской деятельности, как планирование и проведение эксперимента, обработка и анализ его результатов;
- домашнее задание исследовательского характера может сочетать в себе разнообразные виды, причём позволяет провести учебное исследование, достаточно протяжённое во времени.

Формами организации исследовательской деятельности на внеурочных занятиях являются:

- исследовательская практика обучающихся;
- образовательные экспедиции – походы, поездки, экскурсии с чётко обозначенными образовательными целями, программой деятельности, продуманными формами контроля. Образовательные экспедиции предусматривают активную образовательную деятельность школьников, в том числе и исследовательского характера;
- факультативные занятия, предполагающие углублённое изучение предмета, дают большие возможности для реализации на них учебно-исследовательской деятельности обучающихся;
- ученическое научно-исследовательское общество – форма внеурочной деятельности, которая сочетает в себе работу над учебными исследованиями, коллективное обсуждение промежуточных и итоговых результатов этой работы, организацию круглых столов, дискуссий, дебатов, интеллектуальных игр, публичных защит, конференций и др.
- участие обучающихся в олимпиадах, конкурсах, конференциях, в том числе дистанционных, предметных неделях, интеллектуальных марафонах, предполагает выполнение ими учебных исследований или их элементов в рамках данных мероприятий [12].

Многообразие форм исследовательской деятельности позволяет обеспечить подлинную интеграцию урочной и внеурочной деятельности обучающихся по развитию у них УУД.

2.2. Основные положения программы

Курс по выбору предназначен для учащихся старших классов общеобразовательной школы. Он состоит из 10 уроков. Программа предполагает изучение формирования развития некоторых методов решения экстремальных задач с древних времен до XIX столетия. В ее содержание входит решение задач различными методами, а также повторение основных сведений изученного ранее школьного материала по математике.

Особое внимание уделяется выполнению самостоятельных заданий творческого характера. Изучение программного материала курса по выбору направлено, кроме того, на расширение изучения тем школьного курса математики, а именно: исследование функций, нахождение производной функции одной переменной и т.д. При проведении уроков широко используются различные прикладные программы. Задания, которые предлагаются учащимся на уроках, носят, главным образом, практическую направленность [23]. Программа предусматривает доступность излагающего материала, а также развитие интереса при обучении каждой темы. Важно указать, как разные ученые подходили к решению задач. Необходимо показать, как формировались методы, в каких задачах они могут быть применены.

Цель курса: показать исторический процесс формирования, развития приемов и методов решения экстремальных задач.

Для достижения этой цели необходимо решить следующие **задачи**:

– углубить и расширить знания учащихся;

– развивать логическое мышление школьников;

– формировать исследовательские умения учащихся;

– воспитать самостоятельность, инициативность, настойчивость;

– привить интерес учащихся к математике.

Предполагаемые результаты

По окончанию курса учащиеся должны **знать**:

– исторический процесс формирования методов решения задач на экстремумы;

– алгоритм решения таких задач.

Учащиеся должны **уметь**:

– применять полученные знания на практике и в нестандартных ситуациях;

– решать прикладные задачи на максимумы и минимумы.

Учебно-тематический план приведен в таблице 1.

Учебно-тематический план курса «Развитие методов решения задач на экстремумы»

Таблица 1

<table>
<tr><th>№ п/п</th><th>Тема занятия</th><th>Кол-во учебных часов</th><th>Форма проведения</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Из истории приемов решения экстремальных задач</td><td>1</td><td>Лекция</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Решение экстремальных задач элементарными методами</td><td>1</td><td>Практическое занятие</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Дифференциальный метод решения задач на максимум и минимум</td><td>2</td><td>Комбинированный урок</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">Применение методов решения экстремальных задач в различных областях науки и техники</td><td>1</td><td>Практическое занятие</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Лабораторная работа</td></tr>
</table>

5	Нахождение экстремумов при помощи программы Microsoft Office Excel	2	Лабораторная работа
6	Контрольная работа	2	Контрольная работа
Всего		10	

Программа ФГОС предполагает следующие требования к предметным результатам освоения базового курса математики, которые должны отражать:

1) сформированность представлений о математике как части мировой культуры и месте ее в современной цивилизации; о способах описания на математическом языке явлений окружающего реального мира;

2) владение методами доказательств и алгоритмом решения; умение применять их, проводить доказательные рассуждения в процессе решения задач;

3) сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа;

4) владение навыками использования при решении задач готовых компьютерных программ.

В содержании курса по выбору осуществляется реализация ряда компетенций.

2.3. Рекомендации к проведению уроков курса по выбору

В этом параграфе даны рекомендации к проведению курса по выбору «Развитие методов решения задач на экстремумы». Представлен конспект разработанного урока. В рекомендациях отражены форма проведения урока, форма контроля и оценка знаний.

Урок 1. Из истории приемов решения экстремальных задач

На первом уроке необходимо обозначить актуальность курса, сообщить краткий план работы. На этапе актуализации знаний, учащиеся повторяют алгоритм исследования функций, дают определение понятию «экстремальная задача».

На уроке знакомятся с историческим процессом формирования метода решения задач на максимум и минимум [30]. Учитель совместно с учащимися решает у доски исторические задачи древности, периода античности. При изучении научного вклада, в разработку методов решения экстремальных задач дается краткая информация о ученых. Изучаемый материал наглядно демонстрируется в презентации. На этом уроке учащиеся осваивают новые предметные знания.

Урок 2. Решение экстремальных задач элементарными методами

В начале урока учитель проверяет выполнение домашнего задания, после чего раздает карточки с заданиями. Первые две задачи рассматриваются у доски [4]. Остальные решаются самостоятельно, после чего решение обсуждается в парах. Если при этом возникают трудности, то задача решается всей группой. В качестве домашнего задания предлагаются задачи, которые не успели решить на уроке. Учащиеся приобретают новые способы решения задач. Ниже приведены конкретные задачи [6].

Задачи

Задача 1. Дан квадрат *ABCD*. От его вершины отложены равные отрезки *AE*, *BK*, *CN*, *DM*, точки *E*, *K*, *N*, *M* последовательно соединены отрезками. При каком значении *AE* площадь квадрата *MNKE* окажется наименьшей (рис. 8)?

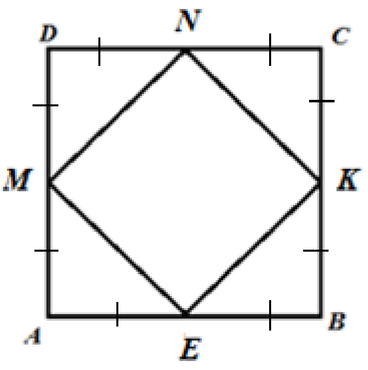

Рис. 8. Иллюстрация к задаче 1

Задача 2. Имеется кусок проволоки длиной *l*. Требуется огородить ею прямоугольный участок максимальной площади.

Задача 3. Из имеющихся досок можно построить забор длиною в 200 м. Требуется огородить этим забором прямоугольный двор наибольшей площади, используя для одной стороны двора заводскую стену [7].

Уроки 3–4. Дифференциальный метод решения задач на максимум и минимум

На предыдущем уроке учащиеся были разделены на группы: «Историки», «Теоретики», «Практики». Для каждой группы было предложено творческое домашнее задание.

Группе «Историки» учитель предложил следующие задания и рекомендации: используя электронные ресурсы, справочники, литературу по истории математики, подготовить доклад о ученых: П. Ферма, Г.В. Лейбнице, Л. Эйлере, И. Ньютоне. Докладчикам нужно отразить общую информацию об исследованиях этих математиков и отметить, какой вклад они внесли в теорию экстремальных задач. Доклад представляется в виде презентации.

Группе «Теоретики» предложено два задания.

Задание 1: группа готовит информацию об алгоритме исследования функции одной переменной на экстремумы [27]. Он представлен ниже.

1. Нахождение производной функции.

2. Отыскание критических точек, т.е. точек, в которых функция непрерывна, а производная равна нулю или не существует.

3. Рассмотрение окрестности каждой из точек, и исследование знака производной слева и справа от этой точки.

4. Определение координат экстремальных точек.

5. Представление вывода, исходя из достаточных условий экстремума.

Итогом выполнения этого задания является конкретный пример на реализацию данного алгоритма [11].

Задание 2: представить, взятый из литературы или созданный самим, алгоритм решения экстремальных задач [19].

Задания могут быть оформлены в виде схем, таблиц на листах ватмана. Они являются творческими, поэтому ученики сами выбирают, каким образом представить найденную ими информацию.

Группа «Практики» подбирает три математические задачи на максимум и минимум, выясняют их решения и объясняют алгоритм выполнения каждой задачи [4]. Учитель рекомендует как литературу по данному заданию [8], так и консультирует по выбору конкретных задач. Классу выдаются карточки с задачами, подготовленные группой.

Перед началом урока каждый учащийся получает бланк оценивания результатов. В нем они дают оценку выступлениям групп, своей работе на уроке и ставят баллы за задания, который предложил учитель. Каждый показатель оценивается от 1 до 5 баллов. В конце подсчитываются результаты и на его основе делается вывод о том, насколько эффективно прошел урок.

Уроки 5–6. Применение методов решения экстремальных задач в различных областях науки и техники

На первом уроке учащиеся решают задачи из различных областей науки и техники [13]. Их содержание связано с сельским хозяйством, экономикой [14], промышленностью [5], строительством и т.д.

На втором уроке группа знакомится с возможностями математического пакета MathCad вычислять экстремальные значения функций. Для этого в программе используются функции Minimize (y, x) и Maximize (y, x).

Сначала они знакомятся с интерфейсом программы, затем выполняют упражнения по нахождению экстремумов функций, а после этого проверяют с ее помощью верность решения задач, решенных на первом уроке.

Уроки 7–8. Нахождение экстремумов при помощи программы Microsoft Office Excel

Тип урока: *комбинированный* – урок изучения нового материала и закрепления полученных знаний, умений и навыков.

Цель урока:

- *обучающая* – решение оптимизационных задач в среде электронных таблиц MS Excel.
- *развивающая* – формирование поисково-исследовательских умений учащихся, привитие интереса к предмету;
- *воспитательная* – воспитание трудолюбия, внимательности, логического мышления.

Средства обучения: приложение MS Windows – MS Excel, текстовый документ с лабораторной работой.

В начале урока учитель обсуждает с классом план занятия, дает установки на работу и после этого предлагает учащимся сесть за компьютеры. Они открывают текстовый документ и начинают выполнять лабораторную работу. При возникших затруднениях обучаемые обращаются за помощью к учителю.

Лабораторная работа

Нахождение экстремумов функции, используя полученные знания на уроках математики [3], станет более эффективным, если применять их как в широко используемых программах, так и малоизвестных. Поэтому полезно будет познакомиться с ними и реализовывать эти знания в новой обстановке.

Пусть дана функция $f(x)$. Она непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет внутри него локальный экстремум. На основе этого можно найти максимум и минимум функции $f(x)$ в программе *Excel* при помощи надстройки **Поиск решения**. Она находит решение благодаря значениям целевых ячеек. Для решения конкретной задачи необходимо в параметрах рассматриваемой надстройки ввести входные критерии или ограничения, которые определяет пользователь. Цель надстройки – максимизация (минимизация) целевого значения функции. Рассмотрим ее реализацию на конкретном примере [29].

Пример 1. *Найдите экстремум функции* $f(x)=3x^3-7x^2+2x-1$ *на отрезке* $[-1,1]$.

Алгоритм выполнения:

1. Для начала нужно поместить надстройку **Поиск решения** на панель инструментов. Для того чтобы это осуществить, следует нажать на вкладку **Файл** и выбрать **Параметры**, после чего откроется диалоговое окно (рис. 9).

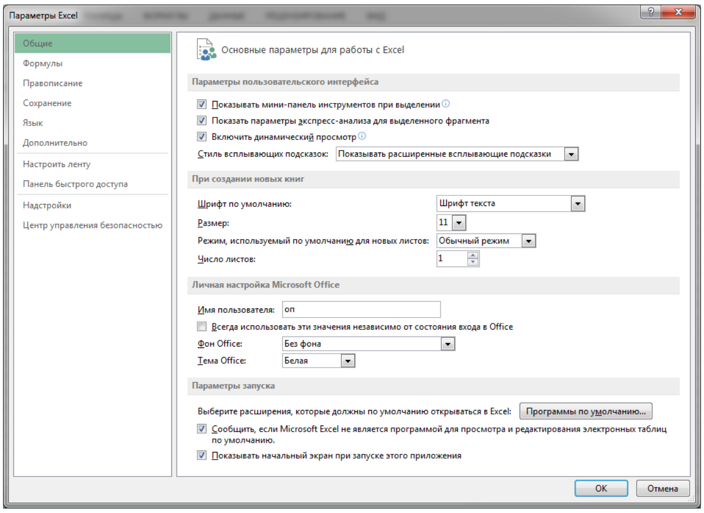

Рис. 9. Настройка параметров в Excel

В нем следует выполнить ряд переходов: **Надстройки** – **Управление**: **Надстройки Excel** – **Перейти**. На последнем шаге в открывшемся окне поставить галочку **Поиск решения** и нажать на **OK** (рис. 10).

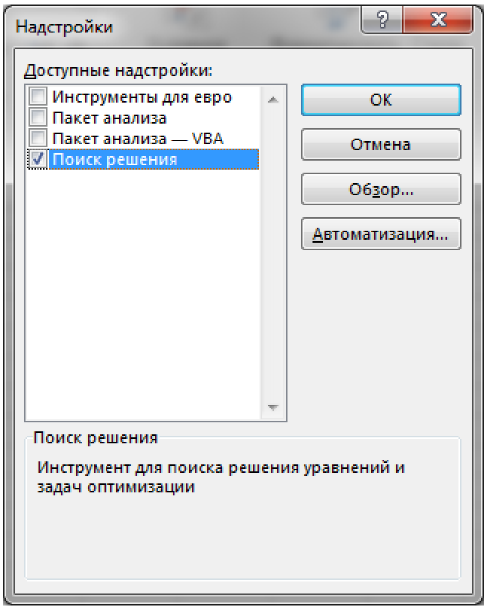

Рис. 10. Установление надстройки

Кнопку **Поиск решения** можно найти во вкладке **Данные** в группе **Анализ**.

2. Далее осуществляют переход к решению задачи. Функция $f(x)$ зависит от одной переменной, поэтому в ячейку $A1$ помещают переменную x – название столбца, а в ячейку $B1$ – $f(x)$.

3. В ячейку $A2$ вводят любое число, принадлежащее заданному отрезку.

4. Формулу вводят в ячейку $B2$, которая задает функциональную зависимость. В качестве переменной x выбирают значение ячейки $A2$.

5. После этого находят кнопку **Поиск решения** и выбирают ее. В открывшемся окне диалога в поле **Оптимизировать целевую функцию** указывают адрес ячейки, в которой записана формула, т.е. адрес ячейки $B2$.

6. Далее устанавливают переключатель на **Максимум** и в поле **Изменяя ячейки переменных** указывают адрес, в котором находится переменная x, т.е. вводят адрес ячейки $A2$.

7. Осталось ввести ограничения. В поле B соответствии с ними добавляются два ограничения: $\$A\$2<=1$ и $\$A\$2>=1$.

8. Осуществляют щелчок **Выполнить** и получают: в ячейке *A*2 помещено максимальное значение аргумента *x* функции, а в *B*2 оказывается максимальное значение $f(x)$ (рис. 11).

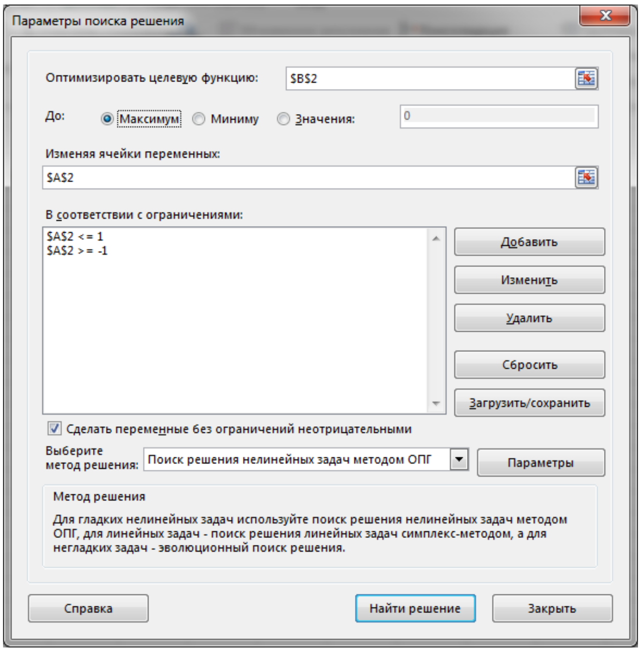

Рис. 11. Параметры поиска решения

9. Аналогичные действия выполняются для нахождения минимума функции.

10. Осуществляется проверка результата либо ручным подсчетом [2], либо при помощи построения графика заданной функции. При этом следует убедиться в верности найденных значений (рис. 12).

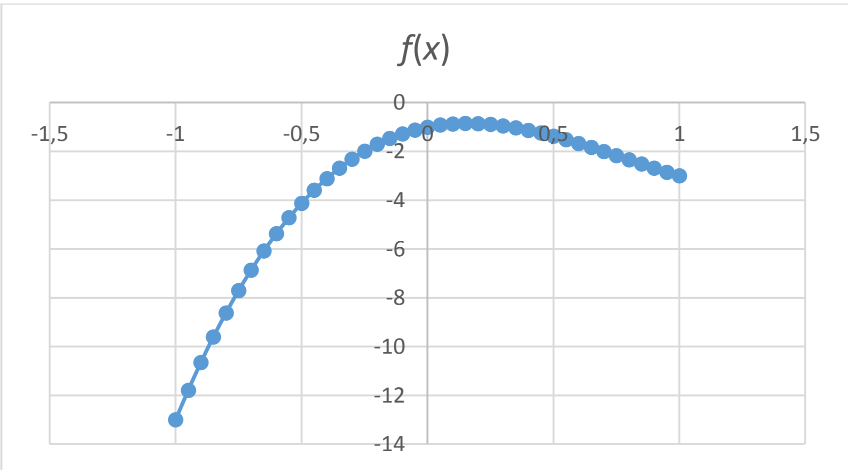

Рис. 12. График функции

Задания для самостоятельного выполнения

1. Найдите точки экстремума функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ на промежутке $\left(-\frac{6}{5}; 2\right)$.

2. Найдите точки экстремума функции $y = -x^3 - 3x^2 + 24x - 4$ на промежутке $\left(-5; \frac{1}{5}\right)$.

3. Найдите точки экстремума функции $y = \sin x - \cos x$ на промежутке $(0; \pi)$ [1].

4. Найдите точки экстремума функции $y = \cos x - \sin x$ на промежутке $(0; 2\pi)$.

5. Найдите точки экстремума функции $y = \sin x - \cos x$ на промежутке $(0; \pi)$.

6. Найдите точки экстремума функции $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ на промежутке $(0; \pi)$ [16].

7. Найдите точки экстремума функции $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ на промежутке $(0; 2\pi)$.

8. Найдите точки экстремума функции $y = x + \sqrt{3 - x}$.

9. Найдите точки экстремума функции $y = \frac{(2-x)^3}{(3-x)^2}$.

10. Найдите точки экстремума функции $y = \frac{x^2 + 9}{x}$ [1].

После того, как учащиеся выполнят лабораторную работу, учитель оценивает результат их деятельности, ставит оценку и в конце подводит итоги урока: достижение цели, эффективность программы при изучении данной темы, трудности в процессе выполнения задания.

Уроки 9–10. Контрольная работа

Урок состоит из трех этапов:

1. Перед контрольной работой классу дается задание составить до 10 вопросов для взаимопроверки из теоретического и практического материала пройденного курса [26]. На уроке учащиеся обмениваются карточками с вопросами и пытаются на них ответить; при этом можно пользоваться различными материалами. Затем школьники проверяют правильность ответов.

2. Форма работы – фронтальная. Обучаемым предлагаются вопросы, составленные учителем [].

3. Учитель раздает карточки с задачами по пройденным темам курса [18]. После выполнения задания, учащиеся обмениваются тетрадями и осуществляют его взаимную проверку.

В конце урока подводятся итоги работы. Группе выставляются оценки за контрольную работу. После этого ученики группы пишут рефлексию курса, отмечая, что он им дал, какие имеются замечания и пожелания.

Таким образом, разработан курс по выбору «Развитие методов решения задач на экстремумы», позволяющий сформировать учебно-исследовательские умения учащихся.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выпускная квалификационная работа посвящена формированию исследовательских умений учащихся при изучении курса по выбору «Развитие методов решение задач на экстремумы».

В ходе исследования были решены задачи:

– изучена литература по исследовательской деятельности учащихся;

– найден историко-математический материал о процессе формирования методов решения экстремальных задач с древности до создания дифференциального и интегрального исчислений;

– показан вклад ученых – предшественников И. Ньютона и Г.В. Лейбница;

– разработана структура курса по выбору;

– составлен его учебно-тематический план;

– представлено содержание предлагаемого курса.

Все поставленные в работе задачи решены, а потому цель достигнута.

Разработанный курс основывался на изучении методов решения экстремальных задач с античных времен до XIII в. В работе они применялись для нахождения экстремумов функций одной переменной. Поэтому дальнейшее изучение предполагает исследования иных методов решения экстремальных задач, в первую очередь, для функций нескольких переменных.

На основе проделанной работы можно сделать вывод о том, что теория экстремальных задач развивается, в следствии чего появляются новые методы для решения задач на максимумы и минимумы, а потому возможно создание серии других курсов по данной тематике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алгебра* и начала математического анализа: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень). 10–11 классы. – Ч. 2. / Под ред. А.Г. Мордкович. – 10-е изд. – М.: Мнемозина, 2009. – 239 с.

2. *Алгебра* и начала математического анализа: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень). 10–11 классы. – Ч. 1. / Под ред. А.Г. Мордкович. – 10-е изд. – М.: Мнемозина, 2009. – 399 с.

3. *Алимов Ш.А.* Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачев и др. – 18-е изд. – М. : Просвещение, 2012. – 464 с.

4. *Ахтершев С.П.* Задачи на максимум и минимум / С.П. Ахтершев. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 192 с.

5. *Баврин И.И.* Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей / И.И. Баврин. – М. : Физматлит, 2003. – 328 с.

6. *Беляева Э.С.* Экстремальные задачи / Э.С. Беляева, В.М. Монахов. – М.: Просвещение, 1977. – 64 с.

7. *Высшая* математика для экономистов: практикум / Под ред. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд. – М. : ЮНИТИ, 2007. – 479 с.

8. *Габасов Р.Ф.* Экстремальные задачи в современной науке и приложениях / Р.Ф. Габасов // Соровский образовательный журнал. – 1997. – №6. – С. 115–120.

9. *Глейзер Г.И.* История математики в школе: IX–X классы / Г.И. Глейзер. – М. : Просвещение, 1983. – 351 с.

10. *Даан – Дальмедико А.* Пути и лабиринты. Очерки по истории математики / А. Даан – Дальмедико, Ж. Пейффер. – М. : Мир, 1986. – 432 с.

11. *Зетель С.И.* Задачи на максимум и минимум / С.И. Зетель. – М. : ОГИЗ ГТТЛ, 1948. – 224 с.

12. *Кайнова Э.Б.* Методология и методика научного исследования в педагогике: курс лекций / Э.Б. Кайнова. – Н. Новгород. : ТАЛАМ, 2002. – 103 с.

13. *Красс М.С.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – 4-е изд. – М. : Дело, 2003. – 688 с.

14. *Кремер Н.Ш.* Высшая математика для экономистов: учебник [Электронный ресурс] / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман. – Электрон. дан. – Режим доступа: http://biblioclub.ru (дата обращения: 20 марта 2016 г.).

15. *Крыжановский Д.А.* Изопериметры / *Д.А. Крыжановский*. – М.: Физматлит, 1959. – 115 с.

16. *Мантуров О.В.* Толковый словарь математических терминов / О.В. Мантуров, Ю.К. Солнцев, Ю.И. Соркин, Н.Г. Федин. – М. : Просвещение, 1965. – 509 с.

17. *Математический* энциклопедический словарь / Под ред. Ю.В. Прохорова. – М.: Большая Российская энциклопедия, 2003. – 845 с.

18. *Натансон И.П.* Простейшие задачи на максимум и минимум / *И.П. Натансон*. – М.: ГТТЛ, 1950. – 31 с.

19. *Петров В.А*. Математический анализ в производственных задачах / В.А. Петров. – М. : Просвещение, 1990. – 64 с.

20. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов. – Т. 1. – СПб. : Физматлит, 1996. – 416 с.

21. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс / *Д.Т. Письменный*. – 9-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

22. *Рыбников К.А.* История математики / К.А. Рыбников. – М. : МГУ, 1994. – Вып. 2 – 496 с.

23. *Сборник* задач по высшей математике для экономистов : учеб. пособие / Под ред. В.И. Ермакова. – М. : ИНФРА-М, 2001. – 575 с.

24. *Теория* и технология обучения математике в школе: учеб. пособие для студ. матем. спец. педвузов / Под ред. Т.А. Ивановой. – 2-е изд. – Н. Новгород. : НГПУ, 2009. – 355 с.

25. *Тихомиров В.М.* Рассказы о максимумах и минимумах / В.М. Тихомиров. – М. : МЦНМО, 2006. – 200 с.

26. *Шарыгин И.Ф.* Задачи по геометрии (планиметрия) / И.Ф. Шарыгин. – М. : Наука, 1982. – 160 с.

27. *Шарыгин И.Ф.* Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами / И.Ф. Шарыгин, Р.К. Гордин. – М. : ООО Изд-во «Астрель», 2001. – 400 с.

28. *Шарыгин И.Ф.* Факультативный курс по математике: решение задач / И.Ф. Шарыгин, В.И. Голубев. – М. : Просвещение, 1991. – 384 с.

29. *Шклярский Д.О.* Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум / Д.О. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом. – М.: Наука, 1970. – 336 с.

30. *Штейнгауз Г.* Математический калейдоскоп / Г. Штейнгауз. – М.: Наука, 1981. –160 с.