

## Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	3
Глава 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ.....	5
1.1 Понятие криволинейных интегралов первого рода .....	5
1.1.1 Задача, приводящая к криволинейным интегралам первого рода. Определение криволинейного интеграла первого рода.....	5
1.1.2 Свойства криволинейных интегралов первого рода. Теорема о существовании криволинейного интеграла первого рода.....	7
1.1.3 Вычисление криволинейного интеграла первого рода .....	8
1.2 Понятие криволинейных интегралов второго рода.....	9
1.2.1 Задача приводящая к криволинейному интегралу второго рода. Определение интеграла второго рода .....	9
1.2.2 Свойства криволинейного интеграла второго рода. Теорема о существовании криволинейного интеграла второго рода .....	10
1.2.3 Вычисление криволинейного интеграла второго рода .....	11
1.3 Понятие поверхностных интегралов.....	12
1.3.1 Основные сведения из теории поверхностей. Определение поверхности. Способы задания поверхности.....	12
1.3.2 Определение поверхностного интеграла первого рода .....	13
1.3.3 Определение поверхностного интеграла второго рода.....	18
1.3.4 Свойства поверхностных интегралов первого и второго рода .....	22
1.3.5 Вычисление поверхностных интегралов .....	23
1.4 Формулы связи криволинейных и поверхностных интегралов .....	27
1.4.1 Формула Остроградского-Гаусса .....	27
1.4.2 Формула Грина-Остроградского .....	28
1.4.3 Формула Стокса .....	32
Глава II. ОСНОВЫ МЕТОДИКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ КРИВОЛИНЕЙНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ.....	34
2.1. Методика решения геометрических задач с применением криволинейных интегралов.....	34

2.2. Методические особенности решения задач на физические приложения криволинейных интегралов.....	42
2.3. Примеры решения прикладных задач с применением поверхностных интегралов первого и второго рода.....	48
2.4. Примеры решения практических задач с помощью формул взаимосвязи криволинейных и поверхностных интегралов.....	55
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	58
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	60

## ВВЕДЕНИЕ

Известно, какие замечательные и разнообразные приложения имеет математический анализ как в самой математике, так и в смежных областях знания. Поэтому сама мысль о связи математического анализа с другими математическими дисциплинами и с потребностями практики должна быть усвоена человеком при изучении основ анализа уже в школе.

Знакомство с интегралами начинается с изучения неопределённых и определённых интегралов, практикуется вычисление простейших интегралов и нахождение площади криволинейной трапеции, что составляет лишь малую часть всего интегрального исчисления.

Теория кратных интегралов представляет собой раздел математики, в котором методы интегрального исчисления обобщаются на вычисление интегралов по областям, расположенным на плоскости или пространстве. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, теория поля, числовые и функциональные ряды нашли широкое применение в различных разделах математики, включая теорию вероятностей, дифференциальные уравнения в частных производных, оптимальное управление, в теоретической физике и механике, механике сплошных сред и многих других теоретических и прикладных науках.

Поскольку приложения криволинейных и поверхностных интегралов очень обширны, можно сделать вывод о том, что выбранная тема является актуальной.

*Целью* данной работы является компактное изложение основных приемов и способов решения типовых задач с помощью криволинейных и поверхностных интегралов.

Для достижения поставленной цели необходимо решить *задачи*:

1. Выполнить подбор литературы по данной теме;

2. Проанализировать теоретический материал;
3. Описать основные теоремы, необходимые для решения задач;
4. Ознакомиться с методикой решения задач с помощью криволинейных и поверхностных интегралов;
5. Привести примеры задач с решением, которые вычисляются с помощью криволинейных и поверхностных интегралов.
6. Выполнить подбор упражнений для изучения приложений криволинейных и поверхностных интегралов.

*Объект исследования* является методика обучения решению задач с помощью интегралов.

*Предметом исследования* – методика обучения решению задач с помощью криволинейных и поверхностных интегралов.

*Основные методы исследования*: анализ имеющейся по данному вопросу литературы, сравнение учебного материала в учебниках разных авторов, обобщение и систематизация полученных знаний о криволинейных и поверхностных интегралов.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав «Теоретические основы понятий криволинейных и поверхностных интегралов» и «Решение задач при помощи криволинейного поверхностного интегралов», заключения, списка литературы, содержащего 25 источников, и приложения.

В заключении формулируются полученные результаты и приводятся выводы исследования.

## Глава 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

### 1.1 Понятие криволинейных интегралов первого рода

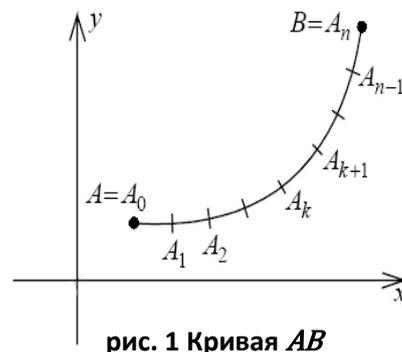
#### 1.1.1 Задача, приводящая к криволинейным интегралам первого рода.

##### Определение криволинейного интеграла первого рода

Во многих методических материалах для введения понятия криволинейного интеграла первого рода, предлагается рассмотреть задачу:

Имеется кривая  $AB$  длиной  $l$ . Пусть на кривой  $AB$  непрерывным образом распределена масса с плотностью  $\rho(x; y)$ . (Средней плотностью дуги мы называем отношение ее массы к ее дуге). Плотность  $\rho(x; y)$  кривой  $AB$  в точке  $(x; y)$  есть предел средней плотности бесконечно малой дуги, стягивающейся в упомянутую точку. Требуется найти массу  $m$  кривой  $AB$ .

Для решения данной задачи, разбиваем кривую  $AB$  точками  $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = B$  произвольным образом на  $n$  частичных дуг  $A_k A_{k+1}$  ( $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ ) длинами  $\Delta l_0, \Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_k, \dots, \Delta l_{n-1}$ . Полагаем  $\lambda = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta l_k$ . Предполагаем частичные



дуги дуги  $A_k A_{k+1}$  столь малыми, что на дуге  $A_k A_{k+1}$  плотность распределения массы  $\rho$  вдоль этой дуги можно приближенно считать постоянной, равной  $\rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ , где точка  $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$  любая, принадлежащая дуге  $A_k A_{k+1}$ .

Тогда масса  $\Delta m_k$  частичной дуги  $A_k A_{k+1}$  кривой  $AB$  будет приближенно выражаться формулой  $\Delta m_k = \rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta l_k$ . Масса  $m$  всей кривой  $AB$  будет выражаться приближенной суммой

$$m \approx \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta l_k$$

Интуитивно ясно, что чем мельче частичные дуги  $A_k A_{k+1}$ , тем меньше ошибка, которую мы делаем, считая частичную дугу  $A_k A_{k+1}$  однородной. Поэтому за массу  $m$  кривой  $AB$  естественно принять:

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta l_k.$$

Теперь можем дать понятие криволинейного интеграла первого рода.

Пусть на плоскости расположена спрямляемая кривая  $L$  длиной  $l$ , имеющая концы в точках  $A$  и  $B$ , и пусть во всех точках кривой определена функция  $\mathcal{F}(x; y)$ . [6, с. 40]

Продельываем следующие действия:

1. Разобьем кривую  $AB$  точками  $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = B$  произвольным образом на  $n$  частичных дуг  $A_k A_{k+1}$  ( $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ ) длинами  $\Delta l_k$ , полагаем  $\lambda = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta l_k$ .
2. На каждой дуге  $A_k A_{k+1}$  берем произвольную точку  $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$  и вычисляем в ней значение функции  $\mathcal{F}$ , т.е находим  $\mathcal{F}(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ .
3. Умножаем найденное значение функции на длину соответствующей частичной дуги:  $\mathcal{F}(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta l_k$ , где ( $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ ).
4. Складываем все такие произведения. Получаем сумму

$$\varepsilon = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{F}(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta l_k$$

Эта сумма называется интегральной суммой для функции  $\mathcal{F}(x; y)$  по кривой  $AB$ .

5. Измельчаем дробление так, чтобы  $\lambda \rightarrow 0$ , и ищем  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varepsilon$ .

*Определение.* Криволинейным интегралом первого рода от функции  $\mathcal{F}$  по кривой  $L$  называется конечный предел интегральной суммы

$\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{F}(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta l_k$ , если он существует, не зависящий ни от способа разбиения кривой на отрезки, ни от выбора точек  $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ :

$$\int_L \mathcal{F}(x; y) dl = \int_{AB} \mathcal{F}(x; y) dl = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{F}(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta l_k.$$

### 1.1.2 Свойства криволинейных интегралов первого рода. Теорема о существовании криволинейного интеграла первого рода

Рассмотрим основные свойства криволинейного интеграла первого рода, а также основную теорему о существовании интеграла первого рода: [9, с. 80]

1. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления пути интегрирования:

$$\int_{AB} \mathcal{F}(x; y) dl = \int_{BA} \mathcal{F}(x; y) dl$$

2. Линейность:

$$\int_{AB} C \mathcal{F}(x; y) dl = C \int_{AB} \mathcal{F}(x; y) dl, \text{ где } C = \text{const}$$

3. Аддитивность: если путь интегрирования  $L$  разбит на части  $L_1$  и  $L_2$ , такие, что  $L = L_1 \cup L_2$  имеют единственную общую точку, то

$$\int_L \mathcal{F}(x; y) dl = \int_{L_1} \mathcal{F}(x; y) dl + \int_{L_2} \mathcal{F}(x; y) dl$$

4. Монотонность: если для точек кривой  $L$  выполняется неравенство

$$\mathcal{F}(x; y) \leq \mathcal{G}(x; y), \text{ то } \int_L \mathcal{F}(x; y) dl \leq \int_L \mathcal{G}(x; y) dl$$

5. Теорема о среднем: Если функция  $\mathcal{F}(x; y)$  не прерывна на кривой  $AB$  длиной  $l$ , то на этой кривой  $AB$  найдется точка  $(x_0; y_0)$  такая, что:

$$\int_{AB} \mathcal{F}(x; y) dl = l \cdot \mathcal{F}(x_0; y_0)$$

**Теорема.** (Условия существования криволинейного интеграла первого рода). Если функция  $\mathcal{F}(x; y)$  непрерывна в каждой точке гладкой кривой, то криволинейный интеграл первого рода существует, и его величина не зависит ни от способа разбиения на части, ни от выбора точек на них. [12, с. 87]

### 1.1.3 Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Рассмотрим вычисление криволинейного интеграла на плоскости и в пространстве. Основным способ вычисления криволинейного интеграла первого рода состоит в сведении его к обыкновенному определенному интегралу. Рассмотрим кривую  $L$ , предположим что кривая задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \theta(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta \quad (1)$$

Напомним, что простая кривая  $L$ , заданная системой (1), называется гладкой, если функции  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  и  $\theta(t)$  имеют непрерывные производные, одновременно не обращающиеся в нуль на  $[\alpha, \beta]$ .

Будем говорить, что функция  $Z = \mathcal{F}(x; y; z)$  непрерывна вдоль кривой  $L$ , если для любой точки  $M_0 \in L$ , выполняется условие:

$$\lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in L}} \mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(M_0)$$

**Теорема.** Если  $L$  – гладкая кривая, заданная системой (1), и функция  $\mathcal{F}(x; y; z)$  непрерывна вдоль кривой  $L$ , то существует криволинейный интеграл первого рода  $\int_L \mathcal{F}(x; y; z) dl$  и справедливо равенство: [23, с. 114]

$$\int_L \mathcal{F}(x; y; z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} \mathcal{F}(\varphi(t); \psi(t); \theta(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\theta'(t))^2} dt$$

Напомним некоторые понятия из теории интегралов. Функция  $\mathcal{F}(x; y; z)$  называется **непрерывной на кривой**  $(l)$ , если  $\forall M_0 \in (l)$  выполняется условие  $\lim_{M \rightarrow M_0} \mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(M_0)$ ,  $M \in (l)$ . Если это условие выполнено в каждой точке кривой, за исключением конечного числа точек, в которых функция  $\mathcal{F}(x; y; z)$  имеет разрывы I рода, то функция называется **кусочно-непрерывной на кривой**  $(l)$ .

Напомним, что кривая  $y = \varphi(x)$  называется **гладкой** на  $[a; b]$ , если функция  $y = \varphi(x)$  непрерывно дифференцируема на этом отрезке. Кривая  $y = \varphi(x)$  называется **кусочно-гладкой** на  $[a; b]$ , если функция  $y = \varphi(x)$  и ее производная  $y' = \varphi'(x)$  непрерывны на  $[a; b]$ , за исключением конечного числа точек разрыва первого рода.

Пусть кривая  $(l)$  задана параметрическими уравнениями:  $x = \varphi(t), y = \Psi(t), z = \chi(t)$ , (где  $\alpha \leq t \leq \beta$ ). Если функции  $x = \varphi(t), y = \Psi(t), z = \chi(t)$ , имеют на  $[\alpha; \beta]$  непрерывные производные, которые не обращаются в нуль одновременно, то кривая  $(l)$  называется **гладкой**. Если функции  $x = \varphi(t), y = \Psi(t), z = \chi(t)$ , имеют на  $[\alpha; \beta]$  кусочно-непрерывные производные, которые не обращаются в нуль одновременно, за исключением конечного числа точек, то кривая  $(l)$  называется **кусочно-гладкой** [3, с. 70]

## 1.2 Понятие криволинейных интегралов второго рода

### 1.2.1 Задача приводящая к криволинейному интегралу второго рода.

#### Определение интеграла второго рода

Чаще всего для введения понятия криволинейный интеграл второго рода используется следующая задача: пусть в каждой точке некоторой дуги  $AB$  плоской кривой  $L$  определена функция  $P(x; y)$  двух независимых переменных. Точками  $A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_n = B$  разобьем указанную дугу на  $n$ -частных дуг, на каждой из которых выберем произвольную точку  $M_i(x_i; y_i)$ . Значение функции  $P(x; y)$  в выбранных точках-  $P(x_i; y_i)$  умножим на величину  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ , которая является проекцией частной дуги  $A_i A_{i+1}$  на ось абсцисс

$P(x_i; y_i)\Delta x_i$ . Если функция  $P(x; y)$  непрерывна во всех точках дуги  $AB$ , то существует предел суммы всех построенных произведений  $\sum_{i=0}^{n-1} P(x_i; y_i)\Delta x_i$  при  $\Delta x_i \rightarrow 0$ :  $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i; y_i)\Delta x_i$ . Этот предел не зависит ни от способа разбиения дуги  $AB$  на частные дуги, ни от выбора точек  $M_i$  на них.

Предел  $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i; y_i)\Delta x_i$  называется криволинейным интегралом второго рода от функции  $P(x; y)$  по дуге  $AB$  и обозначается:

$$\int_{AB} P(x; y)dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i; y_i)\Delta x_i$$

Если значение функции  $P(x; y)$  в точке  $M_i(x_i; y_i) - P(x_i; y_i)$  умножить на  $\Delta y_i$ , то есть на проекцию элементарной дуги  $A_i A_{i+1}$  на ось ординат, то получим произведение  $P(x_i; y_i)\Delta y_i$ .

Предел суммы таких произведений при условии, что все  $\Delta y_i$  стремятся к нулю, называется криволинейный интеграл второго рода:

$$\int_{AB} P(x; y)dy = \lim_{\Delta y_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i; y_i)\Delta y_i$$

В случае, когда на дуге  $AB$  заданы две непрерывные функции  $P(x; y)$  и  $Q(x; y)$  то можно рассматривать криволинейные интегралы  $\int_{AB} P(x; y)dx$  и  $\int_{AB} Q(x; y)dy$ .

Сумма указанных интегралов будет называться криволинейным интегралом второго рода, при условии что оба они вычисляются по одному и тому же направлению. [11, с. 140]

### 1.2.2 Свойства криволинейного интеграла второго рода. Теорема о существовании криволинейного интеграла второго рода

Перечислим основные свойства криволинейного интеграла второго рода:

1. Криволинейный интеграла второго рода зависит от направления интегрирования:

$$\int_{AB} = - \int_{BA}$$

2. Если кривая  $AB$  точкой  $C$  разбита на части  $AC$  и  $CB$ , то интеграл по всей кривой равен сумме интегралов по ее частям:

$$\int_{AB} = \int_{AC} + \int_{CB}$$

3. Если кривая  $AB$ -прямолинейный отрезок, расположенный в плоскости  $Oxy$  и перпендикулярен к оси  $Ox$ . Тогда  $\int_{AB} P(x; y)dx = 0$ . Если кривая  $AB$ -прямолинейный отрезок, расположенный в плоскости  $Oxy$  и перпендикулярен к оси  $Oy$ , тогда  $\int_{AB} Q(x; y)dy = 0$

4. Если кривая  $AB$ -замкнутый контур, то криволинейный интеграл на зависит от выбора начальной точки на этом контуре, а зависит только от направления обхода:

$$\begin{aligned} \oint_L P(x; y)dx + Q(x; y)dy &= \oint_{AmBnA} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \\ &= \oint_{BnAmB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy. \end{aligned}$$

**Замечание.** При вычислении криволинейного интеграла по замкнутому контуру положительным направлением считается такой обход контура при котором область, ограниченная контуром, остается слева. При простом контуре-это движение против часовой стрелки. [16, с. 59]

**Теорема.**(Условия существования криволинейного интеграла второго рода) Если кривая  $AB$ -гладкая, а функции  $P(x; y)$  и  $Q(x; y)$  непрерывны в каждой точке кривой  $AB$ , то криволинейный интеграл второго рода существует, и его величина не зависит ни от способа разбиения на части ни от выбора точек на них. [16, с. 59]

### 1.2.3 Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Вычисление криволинейного интеграла второго рода, как и вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Если кривая  $AB$  задана параметрическим уравнением:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha; \beta], \text{ где } x(t) \text{ и } y(t)\text{- непрерывно дифференцируемые}$$

функции параметра  $t$ , причем  $(x(\alpha), y(\alpha)) = A, (x(\beta), y(\beta)) = B$ , то:

$$\int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt.$$

Можно заметить, что аналогичная формула имеет место для криволинейного интеграла первого рода от функции  $\mathcal{F}(x; y; z)$  по пространственной кривой  $AB$  заданным параметрическим уравнением (1).

Если кривая  $AB$  явно задана уравнением:  $y = \mathcal{F}(x)$ ,  $x \in [a; b]$ , где  $\mathcal{F}(x)$ -непрерывно дифференцируемая функция, и ее производная  $\mathcal{F}'(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то:

$$\int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x, \mathcal{F}(x)) + Q(x, \mathcal{F}(x))\mathcal{F}'(x))dx.$$

### 1.3 Понятие поверхностных интегралов

#### 1.3.1 Основные сведения из теории поверхностей. Определение поверхности. Способы задания поверхности

Кривая, заданная уравнениями  $x = f(t)$ ,  $y = \varphi(t)$ ,  $z = \psi(t)$  называется **гладкой**, если функции  $f(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  непрерывны и имеют непрерывные первые производные, не обращающиеся в нуль одновременно (иными словами, если кривая в каждой точке имеет касательную и направление этой касательной непрерывно зависит от точки касания).

Непрерывная кривая, составленная из конечного числа гладких кусков, называется **кусочно-гладкой**.

Поверхность, заданная уравнением  $\psi(x, y, z) = 0$ , называется **гладкой**, если функция  $\psi(x, y, z)$  непрерывна и имеет непрерывные частные производные  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ , одновременно не обращающиеся в нуль. (В каждой точке такой поверхности существует касательная плоскость и при переходе от точки к точке положение этой касательной плоскости меняется непрерывно). Поверхность, состоящая из нескольких гладких кусков, называется **кусочно-гладкой**. [24, с. 129]

### 1.3.2 Определение поверхностного интеграла первого рода

Поверхностные интегралы первого рода представляют собой обобщение двойных интегралов. Это обобщение строится следующим образом в трехмерном пространстве с декартовой системой координат  $Oxyz$  рассмотрим кусочно-гладкую поверхность  $\Omega$ , ограниченную кусочно-гладкой кривой  $L = L(\Omega)$ . В частном случае замкнутой поверхности (например, сферы) ее граница представляет собой пустое множество, а значит также является кусочно-гладкой. Пусть на поверхности  $\Omega$  задана функция  $\mathcal{F}(M)$ , где  $M = M(x, y, z)$  – точка на поверхности, а  $(x, y, z)$  – ее декартовы координаты. Пусть функция  $\mathcal{F}(M)$  непрерывна на поверхности  $\Omega$ , то есть в ранее введенных обозначениях  $\mathcal{F}(M) \in C(\Omega)$ . Зададим разбиение  $T$  поверхности  $\Omega$  с помощью произвольно проведенных кусочно-гладких кривых на части  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  (рис. 2)

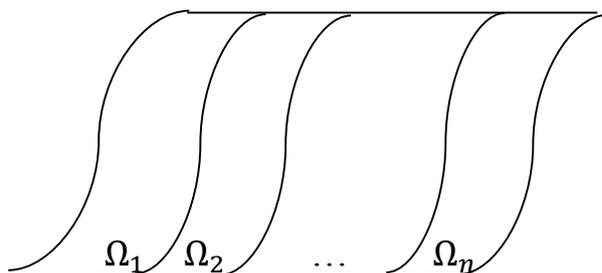


Рис. 2 разбиение поверхности  $\Omega$

В каждой из этих частей выберем  $\Omega_k$  по произвольной точке  $M_k$  с координатами  $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ , и составим интегральную сумму:

$$S_T = \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot |\Omega_k| = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot |\Omega_k| \quad (2),$$

где  $|\Omega_k|$  – площадь поверхности  $\Omega_k$ .

**Определение 1.** Пусть  $P$  и  $N$  – произвольные точки части  $\Omega_k$  поверхности  $\Omega$ . Соединим эти точки дугой  $\gamma$  гладкой кривой, целиком лежащей в  $\Omega_k$ . Обозначим через  $\gamma(P, N)$  длину этой дуги, а через  $l(P, N)$  – длину самой короткой дуги, соединяющей точки  $P$  и  $N$ , и целиком лежащей на

поверхности  $\Omega_k$ :  $l(P, N) = \min_{\gamma} \gamma(P, N)$ . Диаметром части  $\Omega_k$  поверхности  $\Omega$  назовем величину  $d(\Omega_k) = \sup_{P, N \in \Omega_k} l(P, N)$ . Диаметром  $d_T$  разбиения  $T$  будем называть наибольший из диаметров частей:  $d_T = \max_{1 \leq k \leq n} d(\Omega_k)$ .

**Замечание 1.** Данное определение самой короткой дуги  $l(P, N)$  не вполне корректно. Действительно, пусть длины  $l_1, l_2, \dots, l_m \dots$  некоторых дуг, соединяющих точки  $P$  и  $N$  образуют последовательность чисел: [18, с. 34]

Как легко видеть, предел этой последовательности равен  $1/4$ , в то же время ни одна из дуг не имеет длины, точно равной  $1/4$  (все они больше этого значения). В таком случае записывают:

$$l(P, N) = \inf_n l_n = \frac{1}{4}.$$

Запись (от латинского *infimum* – низший):  $b = \inf_{a \in A} f(a)$  означает, что для всех значений  $a$  из множества  $A$  значение функции  $F(a)$  не меньше, чем величина  $b$ , но при этом для любого значения  $\varepsilon > 0$  найдется такое значение  $a_\varepsilon$  из множества  $A$ , что функции  $\mathcal{F}(a_\varepsilon)$  в этой точке окажется меньшей, чем  $b + \varepsilon$ .

Таким образом, точное определение величины  $l(P, N)$  в определении 1 должно быть дано следующим образом:

$$l(P, N) = \inf_{\gamma} \gamma(P, N).$$

**Определение 2.** Поверхностным интегралом первого рода от функции  $\mathcal{F}(M)$  по поверхности  $\Omega$  называется предел интегральной суммы (2) при бесконечном увеличении числа  $n$  частей разбиения  $\Omega_n$  и бесконечном уменьшении диаметра  $d_T$  разбиения, если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения  $T$ , ни от выбора точек  $M_k$ :

$$\iint_{\Omega} \mathcal{F}(M) d\Omega = \iint_{\Omega} \mathcal{F}(x, y, z) d\Omega = \lim_{d_T \rightarrow 0} S_T = \lim_{d_T \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mathcal{F}(M_k) \cdot |\Omega_k|. \quad (3)$$

Для поверхностного интеграла используются и другие обозначения:

$$\iint_{\Omega} \mathcal{F}(x, y, z) d\sigma, \iint_{\Omega} \mathcal{F}(x, y, z) dS.$$

Сформулируем без доказательства теорему о существовании поверхностного интеграла первого рода:

**Теорема 1.** Если  $\Omega$  – непрерывная кусочно-гладкая поверхность, ограниченная кусочно-гладкой кривой  $L(\Omega)$ , и функция  $\mathcal{F}(M)$  непрерывна на ней, то поверхностный интеграл первого рода (3) от функции  $\mathcal{F}(M)$  существует и определен однозначно.

Обратимся теперь к вычислению поверхностного интеграла первого рода.

**Теорема 2.** Пусть  $\Omega$  – гладкая поверхность, заданная на ограниченной области  $D$  плоскости  $Oxy$  уравнением:  $z = g(x, y)$ , где  $(x, y) \in D$ , и пусть функция  $\mathcal{F}(M)$  непрерывна на этой поверхности. В этом случае поверхностный интеграл первого рода от функции  $\mathcal{F}(M)$  находится по формуле: [18, с. 34]

$$\iint_{\Omega} \mathcal{F}(M) d\Omega = \iint_D \mathcal{F}(x, y, g(x, y)) \sqrt{(1 + g_x'^2 + g_y'^2)} dx dy. \quad (4)$$

Докажем данную теорему: Спроектируем на плоскость  $Oxy$  на множество кривых, разбивающих поверхность  $\Omega$  на части  $\Omega_k$  (рис. 3). Получим в результате разбиение области  $D$  на части  $D_k$

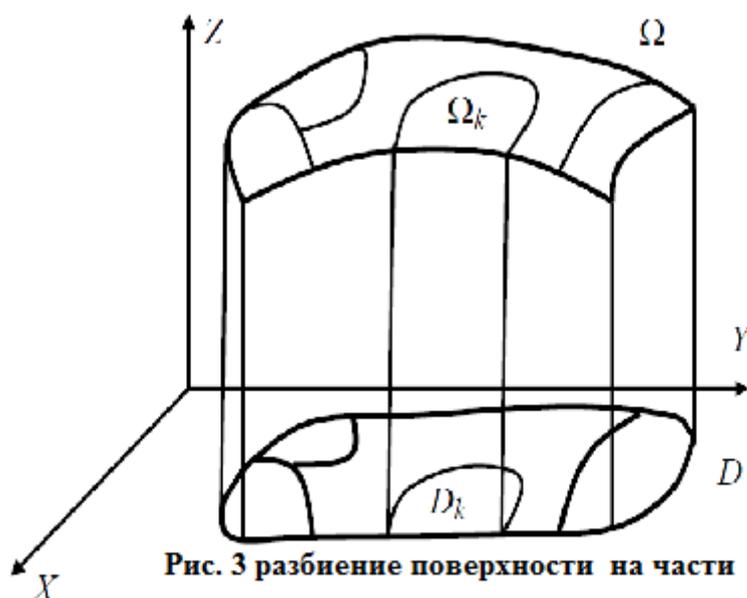


Рис. 3 разбиение поверхности на части

Рис.3, разбиение поверхности  $\Omega$  на части  $\Omega_k$

Имеем выражение для площади поверхности  $\Omega_k$ :

$$|\Omega_k| = \iint_{D_k} \sqrt{(1 + g_x'^2 + g_y'^2)} dx dy$$

Это равенство можно преобразовать, применив теорему о среднем для двойного интеграла:

$$|\Omega_k| = \sqrt{(1 + g_x'(\bar{x}_k, \bar{y}_k)^2 + g_y'(\bar{x}_k, \bar{y}_k)^2)} \cdot |D_k|, \quad (5)$$

Где  $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$  – некоторая точка части  $D_k$ , а  $|D_k|$  – площадь этой части. Подставляя формулу (5) в выражение (2) для интегральной суммы, получим:

$$S_T = \sum_{k=1}^n \mathcal{F}(M_k) \cdot \sqrt{(1 + g_x'(\bar{x}_k, \bar{y}_k)^2 + g_y'(\bar{x}_k, \bar{y}_k)^2)} \cdot |D_k| =$$

$$\sum_{k=1}^n \mathcal{F}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \sqrt{(1 + g_x'(\bar{x}_k, \bar{y}_k)^2 + g_y'(\bar{x}_k, \bar{y}_k)^2)} \cdot |D_k|. \quad (6)$$

Отметим, что выражение (6) отличается от интегральной суммы

$$S_T^* = \sum_{k=1}^n \mathcal{F}(\xi_k, \eta_k, g(\xi_k, \eta_k)) \cdot \sqrt{(1 + g'_x(\xi_k, \eta_k)^2 + g'_y(\xi_k, \eta_k)^2)} \cdot |D_k|$$

двойного интеграла

$$\iint_D \mathcal{F}(x, y, g(x, y)) \cdot \sqrt{(1 + g'_x(x, y)^2 + g'_y(x, y)^2)} dx dy$$

только значениями аргументов частных производных  $g'_x$  и  $g'_y$  под знаком квадратного корня. В силу предположения о гладкости поверхности эти частные производные непрерывны на замыкании  $\bar{D}$  области  $D$ . Тогда и функция  $\sqrt{(1 + g'_x(x, y)^2 + g'_y(x, y)^2)} = h(x; y)$  также непрерывна на  $D$ . Функция, непрерывная на замкнутой (то есть содержащей свою границу) ограниченной области является **равномерно непрерывной** на ней, то есть для любого значения  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что при диаметре  $d_T$  разбиения меньшим  $\delta$ , разность  $|h(\xi_k, \eta_k) - h(\widetilde{x}_k, \widetilde{y}_k)|$  будет меньше  $\varepsilon$ . Из непрерывности на поверхности  $\Omega$  функции  $\mathcal{F}(M)$  следует, что функция  $\mathcal{F}(x, y, g(x, y))$  непрерывна, а следовательно, и ограничена на области  $\bar{D}$ :

$$|\mathcal{F}(x, y, g(x, y))| \leq C.$$

Тогда получаем, что при  $d_T < \delta$  выполнено неравенство  $|S_T - S_T^*| = \sum_{k=1}^n |\mathcal{F}(\xi_k, \eta_k, g(\xi_k, \eta_k))| \cdot |h(\xi_k, \eta_k) - h(\widetilde{x}_k, \widetilde{y}_k)| \cdot |D_k| \leq C \cdot \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^n |D_k| = C \cdot \varepsilon \cdot |D|$ ,

поэтому при  $d_T \rightarrow 0$  разность  $|S_T - S_T^*| \rightarrow 0$ , то есть пределы интегральных сумм  $S_T$  и  $S_T^*$  совпадают:

$$\lim_{d_T \rightarrow 0} S_T = \lim_{d_T \rightarrow 0} S_T^* = \iint_D \mathcal{F}(x, y, g(x, y)) \cdot \sqrt{(1 + g_x'^2 + g_y'^2)} dx dy.$$

Отсюда и следует утверждение теоремы 2.

**Замечание 2.** Интегральная сумма (2) для функции  $\mathcal{F}(M) \equiv 1$  равна площади поверхности  $\Omega$ . Таким образом, площадь поверхности можно найти с помощью поверхностного интеграла первого рода:

$$|\Omega| = \iint_{\Omega} d\Omega.$$

**Замечание 3.** Если поверхность  $\Omega$  задана на ограниченной области  $\Delta$  в плоскости переменных  $(u, v)$  параметрическими соотношениями:

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v),$$

то ее площадь может быть найдена по формуле:

$$|\Omega| = \iint_{\Delta} \sqrt{EG - \mathcal{F}^2} dudv, \text{ где}$$

$E = \varphi_u'^2 + \psi_u'^2 + \chi_u'^2, G = \varphi_v'^2 + \psi_v'^2 + \chi_v'^2, F = \varphi_u' \varphi_v' + \psi_u' \psi_v' + \chi_u' \chi_v'$  - гауссовские коэффициенты поверхности  $\Omega$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\Omega$ - гладкая поверхность, заданная уравнениями:

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), \text{ где } (u, v) \in \Delta, \text{ причем}$$

соответствие между областями  $\Omega$  и  $\Delta$  взаимно-однозначно. Тогда если функция  $\mathcal{F}(M)$  определена и непрерывна на поверхности  $\Omega$ , то справедливо равенство: [18, с. 34]

$$\iint_{\Omega} \mathcal{F}(x, y, z) d\Omega = \iint_{\Delta} \mathcal{F}(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \cdot \sqrt{EG - \mathcal{F}^2} dudv.$$

### 1.3.3 Определение поверхностного интеграла второго рода

Поверхностный интеграл второго рода определяется только для двусторонних поверхностей с заданной на них ориентацией.

Дадим определение поверхностного интеграла второго рода. Пусть на гладкой двусторонней поверхности  $\Omega$  выбрана некоторая сторона, в каждой точке  $M$  которой определено направление нормали  $n$ ,  $\vec{n}(M)$ . Построим разбиение  $T$  поверхности  $\Omega$  на части  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  с помощью произвольных кусочно-гладких кривых. В каждой из этих частей  $\Omega_k$  выберем по произвольной точке  $M_k$  с координатами  $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ . При введении поверхностного интеграла первого рода интегральная сумма определялась как сумма произведений значений функции  $\mathcal{F}$  в точке  $M_k$  на площади частей  $\Omega_k$ . При определении поверхностного интеграла второго рода значения функции в точке  $M_k$  умножаются не на площадь частей  $\Omega_k$ , а на площади проекций этих частей на одну из координатных плоскостей, взятые с определенным знаком, зависящим от ориентации поверхности  $\Omega$ .

Пусть поверхность  $\Omega$  задается уравнением  $z = g(x, y)$ . Обозначим через  $D_k$  проекции частей  $\Omega_k$  на плоскость  $Oxy$ . В интегральную сумму будем включать площадь  $|D_k|$  области  $D_k$  со знаком «+», если направление нормали к части  $\Omega_k$  образует с положительным направлением оси  $Oz$  острый угол (то есть если выбранная сторона поверхности – верхняя), и со знаком «-», если этот угол тупой (то есть выбранная сторона поверхности – нижняя). Таким образом, для верхней стороны поверхности интегральная сумма записывается в виде:

$$S_T = \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot |D_k| = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot |D_k|, \quad (7)$$

а интегральная сумма для нижней стороны поверхности отличается знаком. Условимся обозначать верхнюю сторону поверхности  $\Omega$  символом  $\Omega^+$ , а нижнюю – символом  $\Omega^-$ .

**Определение 1.** Пусть существует предел интегральных сумм (7) при бесконечном увеличении количества частей  $\Omega_k$  разбиения поверхности  $\Omega$  и

бесконечном уменьшении диаметров разбиения  $d_T$ , причем этот предел не зависит ни от способа разбиения поверхности  $\Omega$ , ни от выбора точек  $M_k$  на частях  $\Omega_k$ . Тогда этот предел называется поверхностным интегралом второго рода от функции  $\mathcal{F}$  по верхней стороне поверхности  $\Omega$  и обозначается:

$$\iint_{\Omega^+} \mathcal{F}(M) dx dy = \iint_{\Omega^+} \mathcal{F}(x, y, z) dx dy = \lim_{d_T \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mathcal{F}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot |D_k|. \quad (9)$$

Поверхностный интеграл по нижней стороне поверхности отличается знаком:

$$\int_{\Omega^-} \mathcal{F}(x, y, z) dx dy = - \int_{\Omega^+} \mathcal{F}(x, y, z) dx dy = - \lim_{d_T \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mathcal{F}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot |D_k|.$$

Здесь символ  $dx dy$  под знаком интеграла указывает на то, что проектирование частей  $\Omega_k$  проводилось на плоскость  $Oxy$ . Аналогичным образом поверхностный интеграл второго рода определяется и для случая произвольной поверхности (не обязательно задаваемой уравнением  $z = g(x, y)$ ). Интегральные суммы при этом строятся аналогично выражению (7) с единственным отличием – в них могут входить площади с разными знаками. Если некоторая часть  $\Omega_k$  разбиения, проектируется в кривую (как, например, цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси  $Oz$ , проектируется в свою направляющую), будем считать, что площадь проекции  $|D_k|$  равна нулю и соответствующее слагаемое в интегральной сумме отсутствует. Также пренебрежем в интегральных суммах слагаемыми, для которых у части точек поверхностей  $\Omega_k$  нормаль образует острый угол с положительным направлением оси  $Oz$ , а у части – тупой. Это допущение законно, поскольку при предельном переходе вклад таких слагаемых в интегральную сумму мал.

Если вместо плоскости  $Oxy$  части разбиения  $\Omega_k$  проектировать на плоскость  $Oxz$  или на плоскость  $Oyz$ , то возникнут поверхностные интегралы второго рода, которые принято обозначать:

$$\iint_{\Omega^\pm} f(x, y, z) dx dz \text{ и } \iint_{\Omega^\pm} f(x, y, z) dy dz \text{ соответственно.}$$

Причем использование в интегралах  $\Omega^+$  или  $\Omega^-$  зависит от выбора той или иной стороны поверхности  $\Omega$ , которые, в свою очередь, теперь определяются углом между направлением нормали и положительным направлением оси  $Oy$  или оси  $Ox$ . В приложениях чаще всего встречаются соединения интегралов всех трех видов:

$$\iint_{\Omega^\pm} P(x, y, z) dx dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dy dx,$$

где  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  и  $R(x, y, z)$  непрерывные функции, заданные на поверхности  $\Omega$ .

Для удобства можно считать, что на поверхности  $\Omega$  задана векторная функция

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Тогда, как и в случае поверхностных интегралов первого рода, верна теорема:

**Теорема 1.** Если  $\Omega$  – кусочно-гладкая поверхность и векторная функция  $\vec{F}(x, y, z)$  имеет непрерывные на  $\Omega$  компоненты  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  и  $R(x, y, z)$ , то поверхностный интеграл второго рода существует и определен однозначно. [13, с. 61]

### 1.3.4 Свойства поверхностных интегралов первого и второго рода

Свойства поверхностных интегралов практически идентичны свойствам, для криволинейных интегралов.

Для поверхностных интегралов первого и второго рода справедливы следующие свойства:

#### 1. *Линейность:*

1.1 Линейность поверхностного интеграла первого рода по поверхности интегрирования

$$\iint_{\Omega} (c_1 f_1(x, y, z) + c_2 f_2(x, y, z)) d\Omega = c_1 \iint_{\Omega} f_1(x, y, z) d\Omega + c_2 \iint_{\Omega} f_2(x, y, z) d\Omega, \text{ где } c_1, c_2 - \text{const}$$

1.2 Линейность поверхностного интеграла второго рода по подынтегральному выражению:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} P(x, y, z) dydx + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) \\ = \iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz + \iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz + \iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy \end{aligned}$$

#### 2. *Аддитивность.*

Если поверхность  $\Omega$  составлена из нескольких непересекающихся частей, то есть  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_l$  и  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, (i \neq j)$ , то

$$2.1 \iint_{\Omega} f(M) d\Omega = \sum_{k=1}^l \iint_{\Omega_k} f(M) d\Omega,$$

$$2.2 \iint_{\Omega} \vec{F}(M) \cdot \vec{n}(M) d\Omega = \sum_{k=1}^l \iint_{\Omega_k} \vec{F}(M) \cdot \vec{n}(M) d\Omega,$$

$$2.3 \iint_{\Omega^{\mp}} f(M) dx dy = \sum_{k=1}^l \iint_{\Omega_k^{\mp}} f(M) dx dy.$$

3. *Достаточные условия существования.*

3.1 Если функция  $f(x, y, z)$  не прерывна во всех точках ограниченной поверхности  $(\sigma)$ , то поверхностный интеграл  $\iint_{(\sigma)} f(x, y, z) d\sigma$ , существует.

3.2 Для существования поверхностного интеграла  $\iint_{(\sigma)} \vec{F} \vec{n} d\sigma$  достаточно выполнения следующих условий:

-векторная функция  $\vec{F}$  имеет непрерывные проекции  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  в каждой точке поверхности  $(\sigma)$ ;

-поверхность  $(\sigma)$  является ограниченной, двусторонней и имеет в каждой своей точке  $(x, y, z)$  ненулевой вектор нормали  $\vec{n}$ , или, что то же, имеет в каждой своей точке касательную плоскость. [21, с. 108]

### 1.3.5 Вычисление поверхностных интегралов

Вычисление поверхностных интегралов сводиться к вычислению к вычислению двойного интеграла. Рассмотрим вычисления поверхностного интеграла первого рода если  $\Omega$  – незамкнутая гладкая поверхность, не имеющая кратных точек, а  $D$  – ее проекция на плоскость  $xOz$ , то поверхностный интеграл первого рода вычисляется через двойной интеграл по формуле:

$$\iint_{\Omega} \mathcal{F}(x, y, z) dS = \iint_D \mathcal{F}(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

Аналогично можно вычислить поверхностный интеграл первого рода в случаях, когда уравнение поверхности  $\Omega$  имеет вид  $x = \varphi(y, z)$  или  $y = \psi(x, z)$ . В первом случае он сводится к двойному интегралу по проекции

поверхности  $\Omega$  на плоскость  $yOz$ , во втором случае – по проекции на плоскость  $xOz$ .

Рассмотрим основные формулы для вычисления поверхностного интеграла второго рода. Пусть гладкая(или кусочно-гладкая) поверхность  $S$  задана уравнением  $z = z(x; y)$  и взята сторона этой поверхности (то есть  $\cos \gamma > 0$ ), а  $Z(x; y; z)$ -некоторая непрерывная на  $S$  функция. Тогда справедливо равенство:

$$\iint_S Z(x; y; z) dx dy = \iint_D Z(x; y; z(x, y)) dx dy, \quad (8)$$

Где  $D$ -проекция поверхности  $S$  на плоскости  $Oxy$ ; входящий в это равенство поверхностный интеграл существует, если существует стоящий справа двойной интеграл.

Если же интеграл берется по нижней стороне поверхности  $S$  (то есть  $\cos \gamma < 0$ ), то справедлива формула.

$$\iint_S Z(x; y; z) dx dy = - \iint_D Z(x; y; z(x, y)) dx dy \quad (9)$$

Аналогично будут справедливы равенства:

$$\iint_S X(x; y; z) dy dz = \pm \iint_{D_1} X(x(y, z); y; z) dy dz \quad (10)$$

И

$$\iint_S Y(x; y; z) dz dx = \pm \iint_{D_2} Y(x; y(y, z); z) dz dx \quad (11)$$

Где в первом равенстве под  $S$  понимается поверхность, заданная уравнением  $x = x(y; z)$ , а во втором- поверхность, заданная уравнением  $y = y(z, x)$ . Знак “+” берется в том случае, когда нормаль к поверхности образует с осью  $Ox$ (соответственно с осью  $Oy$ ) острый угол (т.е  $\cos \alpha > 0$ ( $\cos \beta > 0$ )),

а знак “-”, когда этот угол тупой (т.е.  $\cos \alpha < 0$  ( $\cos \beta < 0$ )). Области  $D_1$  и  $D_2$ - проекции поверхности  $S$  на плоскость  $Oyz$  и  $Ozx$  соответственно.

Формулой типа (8) для сведения поверхностного интеграла к двойному можно воспользоваться и в том случае, когда ориентированная поверхность  $S$  состоит из нескольких кусков, каждый из которых определяется уравнением вида  $z = z(x, y)$ . В этом случае поверхностный интеграл следует представить как сумма интегралов, отвечающих этим кускам, а затем к каждому из слагаемых применить формулу (8).

Для вычисления поверхностного интеграла второго рода общего вида используются формулы (8)-(11), проецируя поверхность  $S$  на все три координатные плоскости:

$$\begin{aligned} & \iint_S X(x, y, z) dydz + Y(x, y, z) dzdx + Z(x, y, z) dxdy = \\ & = \pm \iint_{D_1} X(x(x, y), y, z) dydz \pm \iint_{D_2} Y(x, y(x, z), z) dzdx \pm \iint_D Z(x, y, z(x, y)) dxdy \end{aligned}$$

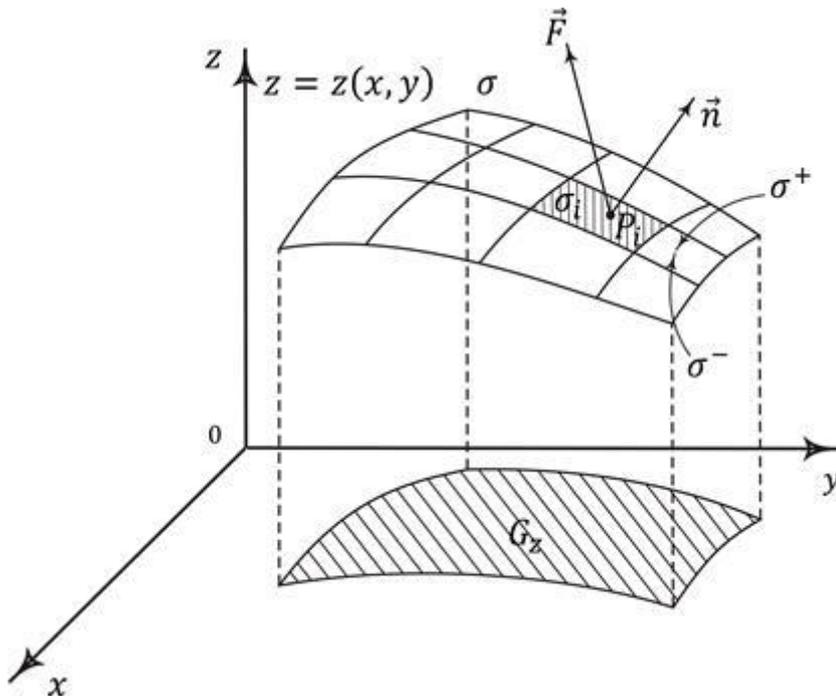
(В более сложных случаях поверхность  $S$  разбивается на части)

Иногда при вычислении поверхностного интеграла второго рода бывает удобнее перейти к поверхностному интегралу первого рода, так как для вычисления последнего достаточно знать проекцию поверхности  $S$  только на одну из координатных плоскостей. Способ выражения рассмотрим далее.

Рассмотрим способ выражения поверхностного интеграла второго рода через поверхностный интеграл первого рода. Пусть выбранная в точке  $M$  нормаль  $\vec{n}(M)$  к поверхности имеет направляющие косинусы  $(\cos \alpha(M), \cos \beta(M), \cos \gamma(M))$ .

Рассмотрим часть  $\Omega_k$  поверхности и произвольную точку  $M_k$  на ней. Пусть  $D_k$  – проекция  $\Omega_k$  на плоскость  $Oxy$ . Проведем касательную плоскость

к поверхности  $\Omega$  в точке  $M_k$  (рис. 4) и рассмотрим площадку  $\omega_k$ , которая вырезается на касательной плоскости цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси  $OZ$ , и направляющей – границей области  $D_k$  (при этом и площадка  $\omega_k$  и часть поверхности  $\Omega_k$  имеют область  $D_k$  в качестве своей проекции на плоскость  $Oxy$ ).



**Рис. 4** Разбиение поверхности  $\Omega$  на частичные области

Площади  $\omega_k$  и  $D_k$  связаны друг с другом соотношением:  $|D_k| = |\omega_k| \cdot \cos\gamma(M_k)$ . Подставляя это соотношение в интегральную формулу

$$S_T = \sum_{k=1}^n \mathcal{F}(M_k) \cdot |D_k| = \sum_{k=1}^n \mathcal{F}(M_k) \cdot |\omega_k| \cdot \cos\gamma(M_k) \\ \approx \sum_{k=1}^n \mathcal{F}(M_k) \cdot |\Omega_k| \cdot \cos\gamma(M_k).$$

(Последнее равенство справедливо при  $d_T \rightarrow 0$ ).

Для интегральной суммы поверхностного интеграла первого рода, получим при переходе к пределу при  $d_T \rightarrow 0$ :

$$\iint_{\Omega^+} \mathcal{F}(x, y, z) dx dy = \iint_{\Omega} \mathcal{F}(x, y, z) \cdot \cos \gamma(x, y, z) d\Omega.$$

Аналогичные зависимости можно получить, проектируя поверхность  $\Omega_k$  на плоскости  $Oxz$  и  $Oyz$ . Объединяя получаемые при этом формулы, можно записать:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega^+} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \\ = \iint_{\Omega^+} P(x, y, z) \cdot \cos \alpha(x, y, z) d\Omega + Q(x, y, z) \cdot \cos \beta(x, y, z) d\Omega \\ + R(x, y, z) \cdot \cos \gamma(x, y, z) d\Omega \\ = \iint_{\Omega} \left( \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z) \right) d\Omega = \iint_{\Omega} \left( \vec{F}(M) \cdot \vec{n}(M) \right) d\Omega. \end{aligned}$$

(Под знаком последнего интеграла стоит скалярное произведение векторов  $\vec{F}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$  и

$$\vec{n}(M) = (\cos \alpha(M), \cos \beta(M), \cos \gamma(M)).$$

$$\text{Интеграл: } \iint_{\Omega^\pm} P(x, y, z) dx dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dy dx,$$

носит название *потока вектора*  $\vec{F}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$  через поверхность  $\Omega$  в сторону единичного вектором нормали  $\vec{n}(M)$ .

## 1.4 Формулы связи криволинейных и поверхностных интегралов

### 1.4.1 Формула Остроградского-Гаусса

Формула Остроградского-Гаусса является одной из наиболее важных формул в векторном анализе. Она связывает поток векторного поля через замкнутую поверхность с напряженностью векторного поля внутри замкнутой поверхности. Формула Остроградского (или, формула Гаусса – Остроградского) является аналогом формулы Грина для случая

поверхностных интегралов. Формула Грина связывает криволинейный интеграл по замкнутому контуру с двойным интегралом по области, ограниченной контуром. Аналогично, формула Остроградского связывает поверхностный интеграл по замкнутой поверхности с тройным интегралом по телу, ограниченному данной поверхностью. Для векторного поля  $\vec{F} = (P; Q; R)$ :

$$\oiint \vec{F} d\vec{s} = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

причем поверхностный интеграл потока векторного поля берется по поверхности через внешнюю сторону (вектор нормали к поверхности направлен «наружу»). Правую часть формулы можно переписать в виде:

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iiint_V \nabla \mathcal{F} dx dy dz$$

где  $\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$  дивергенция векторного поля  $\vec{F}$ ,

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$  – оператор Гамильтона (набла).

Формула Гаусса-Остроградского справедлива, если выполняются два условия. Во-первых, поверхность  $S$  должна быть кусочно-гладкой, то есть такой, что в любой ее точке можно провести касательную плоскость (поверхность задается дифференцируемыми функциями) и двусторонней (направление нормали при движении вдоль поверхности сохраняется). Во-вторых, векторное поле  $\vec{F} = (P; Q; R)$  должно быть таким, что функции  $P = P(x, y, z)$ ,  $Q = Q(x, y, z)$ ,  $R = R(x, y, z)$  и их частные производные по  $x, y, z$  непрерывны в области  $V$ .

### 1.4.2 Формула Грина-Остроградского

Формула Грина-Остроградского устанавливает связь между криволинейным интегралом и двойным интегралом, представляет выражение

интеграла по замкнутому контуру через двойной интеграл по области, ограниченной этим контуром.

I. Пусть область  $(P)$  ограничена контуром  $(L)$ , состоящая из непрерывных кривых  $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x), \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \forall x \in [a; b]$  и отрезков прямых  $x = a, x = b, a < b$ , то есть  $(P)$ -простая область I типа:  $(P_I)$

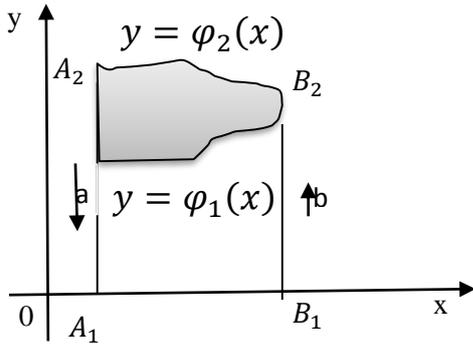


Рис. 5 область I-типа

Если функция  $P(x; y)$  вместе с  $P'_y(x; y)$  непрерывна на замкнутой простой области  $(P_I)$ , то справедлива формула:

$$\iint_{(P)} P'_y(x; y) dx dy = - \int_{(L)} P(x; y) dx \quad (12)$$

где интегрирование по контуру берется в положительном направлении.

Доказательство:

$$\begin{aligned} \iint_P P'_y(x; y) dx dy &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} P'_y(x; y) dy = \int_a^b \left[ P(x; y) \Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \right] dx = \\ &= \int_a^b (P(x; \varphi_1(x)) - P(x; \varphi_2(x))) dx = \int_a^b P(x; \varphi_2(x)) dx - \int_a^b P(x; \varphi_1(x)) dx = \\ &= \int_{A_2 B_2} P(x; y) dx - \int_{A_1 B_1} P(x; y) dx = - \int_{B_2 A_2} P(x; y) dx - \int_{A_2 A_1} P(x; y) dx - \end{aligned}$$

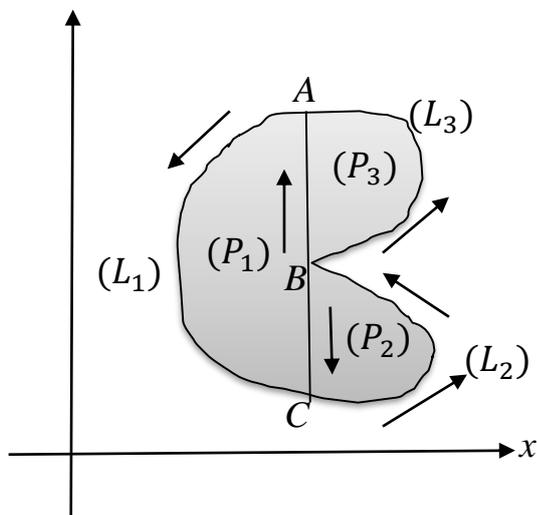
$$- \int_{A_1 B_1} P(x; y) dx - \int_{B_1 B_2} P(x; y) dx = - \int_{(L)} P(x; y) dx$$

Формула (12) справедлива и для более сложных областей, которые можно разбить на конечное число областей I типа. Покажем это на следующем примере:

Пусть область  $(P)$  ограничена контуром  $(L)$ .  $(P) = (P_1) \cup (P_2) \cup (P_3)$ , где  $(P_1), (P_2), (P_3)$ - простые области I типа (рис. 5). Обозначим  $(K_1), (K_2), (K_3)$ - контуры этих областей. Пусть  $(L_1), (L_2), (L_3)$ - части на которые разбит контур  $(L)$ .

$$(K_1) = (L_1) \cup (CA), (K_2) = (L_2) \cup (BC), (K_3) = (L_3) \cup (AB).$$

К каждой из областей  $(P_1), (P_2), (P_3)$  применима формула (12).



$$\begin{aligned} \iint_{(P_1)} P'_y(x; y) dx dy &= - \int_{(K_1)} P dx = \\ &= - \int_{(L_1)} P dx - \int_{(CA)} P dx. \end{aligned}$$

$$\iint_{(P_2)} P'_y(x; y) dx dy = - \int_{(K_2)} P dx =$$

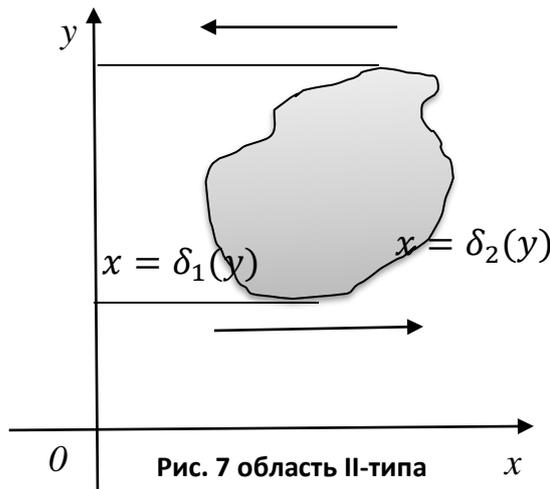
Рис. 6 область  $(P_1), (P_2), (P_3)$

$$= - \int_{(L_2)} P dx - \int_{(BC)} P dx.$$

$$\iint_{(P_3)} P'_y(x; y) dx dy = - \int_{(K_3)} P dx = - \int_{(L_3)} P dx - \int_{(AB)} P dx.$$

Просуммировав все равенства, учитывая при этом что  $\int_{CA} + \int_{BC} + \int_{AB} = 0$ , приходим к формуле (12)

II. Пусть область  $(P)$  ограничена кривой  $(L)$ , состоящих из непрерывных кривых  $x = \delta_1(y), x = \delta_2(y), \delta_1(y) \leq \delta_2(y) \forall y \in [c; d]$  и отрезками прямых  $y = c, y = d$  ( $c < d$ ). То есть  $(P)$ - простая область II типа:  $(P_{II})$ .



Если функция  $\mathcal{F}'_x(x; y)$  не прерывна на замкнутой области  $(P_{II})$  то справедлива формула:

$$\iint_{(P)} \mathcal{F}'_x(x; y) dx dy = \int_{(L)} \mathcal{F}(x; y) dy \quad (13)$$

Криволинейный интеграл в данной формуле берется в положительном направлении. Доказательство данного равенства аналогично доказательству формулы (12). Формула (13) справедлива и для более сложных областей, которые можно разбить на конечное число областей II типа.

III. Область  $(P)$  называется простой, если она одновременно является областью  $(P_I)$  и  $(P_{II})$ . Таким образом, любая прямая, параллельная осям координат, пересекает простую область не более, чем в двух точках.

Пусть  $(P)$ - простая область,  $(L)$ -ее контур. Тогда для данной области справедливы равенства (12) и (13). Вычитая одно из другого получим:

$$\iint_{(P)} (\mathcal{F}'_x(x; y) - P'_y(x; y)) dx dy = \int_{(L)} P(x; y) dx + \mathcal{F}(x; y) dy \quad (14)$$

Из рассмотренного выше следует, что формула (14) справедлива и для области, которая может быть представлена в виде конечного числа простых областей. Соответственно мы доказали следующую теорему.

**Теорема:** Пусть  $(P)$ -простая область или область представимая в виде конечного числа простых областей. Тогда если  $P(x;y)$  и  $\mathcal{F}(x;y)$  непрерывны вместе с частными производными  $P'_y$  и  $\mathcal{F}'_x$  на замкнутой области  $(P)$ , то справедлива формула (14)

Формула (14) называется формулой Грина-Остроградского. Ее можно доказать и для более общего случая, она справедлива и для области, которая ограничена одной или несколькими кусочно-гладкими кривыми.

### 1.4.3 Формула Стокса

Формула Стокса обобщает формулу Грина на случай пространственной кривой. Она устанавливает связь между поверхностным интегралом по поверхности  $S$  и криволинейным интегралом второго рода по ее границе.

Если функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в точках поверхности  $S$ , то справедлива формула

$$\iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz = \oint_L p dx + Q dy + R dz$$

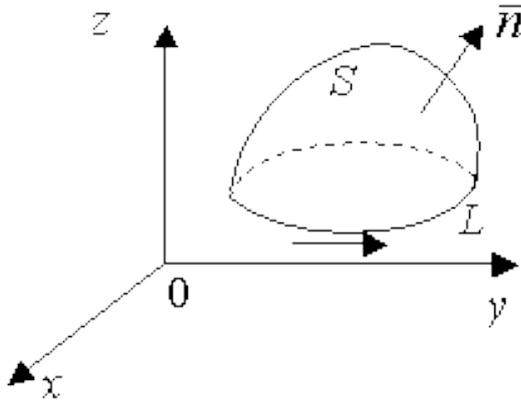


Рис. 8 поверхность

контура  $L$ .

,где  $L$ – граница поверхности  $S$  и интегрирование вдоль кривой  $L$  производится в положительном направлении. То есть формула Стокса устанавливает связь между интегралом по поверхности и криволинейным интегралом по контуру, ограничивающему эту поверхность. На рис. 8 показаны выбранная сторона поверхности и направление обхода

## Глава II. ОСНОВЫ МЕТОДИКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ КРИВОЛИНЕЙНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Методика – это система правил, совокупность приемов и методов обучения чему-либо или выполнения какой-либо работы [толковый словарь]. Поэтому в данной главе представлены основные виды задач, которые решаются с помощью криволинейных и поверхностных интегралов. А так же приведено их пошаговое решение.

### 2.1. Методика решения геометрических задач с применением криволинейных интегралов

Таблица 1. Геометрические приложения криволинейных интегралов

Применение криволинейного интеграла первого рода в геометрии	
Вычисление длины дуги кривой	$S_{AB} = \int_L ds$
Вычисление площади цилиндрической поверхности	$S = \int_L \mathcal{F}(x, y) dl$
Применение криволинейного интеграла второго рода в геометрии	
Вычисление площади фигуры ограниченной кривыми	$S = \oint_C xdy = - \oint_C ydx = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx,$
Объем тела, образованного вращением замкнутой кривой	$V = -\pi \oint_C y^2 dx$ $= -2\pi \oint_C xydy$ $= -\frac{\pi}{2} \oint_C 2xydy + y^2 dx$

**Задача 1** *Длина кривой.* Предположим, что на кривой  $L = AB$  произвольно установлено направление (одно из двух возможных), так что положение точки  $M$  на кривой может быть определено длиной дуги  $S = AM$ , отсчитываемой от начальной точки  $A$ . Тогда кривая  $L$  параметрически выразится уравнениями вида  $x = x(s), y = y(s)$  ( $0 \leq s \leq S$ ), а функция  $\mathcal{F}(x, y)$ , заданная в точках кривой, сведется к сложной функции  $\mathcal{F}(x(s), y(s))$  от переменной  $S$ .

Если через  $S_i (i = 0, 1, \dots, n)$  обозначить значения дуги, отвечающие выбранным на дуге  $AB$  точкам деления  $A_i$ , то, очевидно,  $\sigma_i = S_{i+1} - S_i = \Delta S_i$ . Обозначив через  $\bar{S}_i$  значения  $S$ , определяющие точки  $M_i$  (причем, очевидно,  $S_i \leq \bar{S}_i \leq S_{i+1}$ ), видим, что интегральная сумма для криволинейного интеграла

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\bar{S}_i), y(\bar{S}_i)) \Delta s_i$$

является в то же время интегральной суммой для обыкновенного определенного интеграла, так что сразу имеем

$$\int_L f(M) ds = \int_0^S f(x(s), y(s)) ds, \quad (15)$$

причем существование одного из интегралов влечет за собой существование другого.

В дальнейшем будем предполагать, что функция  $f(M)$  непрерывна, следовательно, интеграл существует.

Пусть теперь кривая  $L$  задана произвольными параметрическими уравнениями

$$x_k = \varphi(t_k), y_k = \psi(t_k), (t_0 \leq t \leq T),$$

где функции  $\varphi$  и  $\psi$  непрерывны со своими производными  $\varphi'$  и  $\psi'$ ; предположим, сверх того, что кратных точек на кривой нет. Тогда кривая

заведомо спрямляема, и если возрастание дуги  $s = AM = s(t)$  отвечает возрастанию параметра  $t$ , то

$$s'(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}.$$

Заменяя переменную в интеграле (15), получаем:

$$\int_L f(M) ds = \int_{t_0}^s f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \quad (16)$$

Если бы при возрастании параметра  $t$  дуга  $AM$  убывала, то стоило бы лишь перейти к дуге  $BM$ , чтобы снова перейти к формуле (16). Таким образом, в формуле (16) нижний предел интеграла должен быть меньше верхнего, каково бы ни было параметрическое задание кривой.

Когда кривая задана явным уравнением:  $y = y(x) (a \leq x \leq b)$ ,

формула (16) принимает вид:

$$\int_L f(M) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

Из предположения непрерывности функции  $y(x)$  вместе с ее производной  $y'(x)$  кривая  $L$  в каждой точке будет иметь определенную касательную, не параллельную оси  $y$ . Обозначив через  $\alpha$  угол касательной с осью  $x$ , получим

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(x), \quad |\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}.$$

Поэтому

$$\int_L f(M) ds = \int_a^b \frac{f(x, y(x))}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}} dx.$$

В частности

$$\int_L ds = S,$$

где  $S$  – длина всей кривой  $L$

$$S = \int_a^b \frac{dx}{|\cos \alpha|}.$$

**Задача 2** Вычислим интеграл  $\int_L x^3 dx + 2xy^2 dy - 3x^2 z dz$ , где  $L$  – отрезок прямой от точки  $A(1,2,-2)$  до точки  $B(0, -1, 0)$ .

Решение. Запишем уравнение этой прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 - 3t, \\ z = -2 + 2t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Следовательно,  $\varphi'(t) = -1$ ,  $\psi'(t) = -3$ ,  $\chi'(t) = 2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_L x^3 dx + 2xy^2 dy - 3x^2 z dz &= \\ &= \int_0^1 \left( (1-t)^3 \cdot (-1) + 2(1-t)(2-3t)^2(-2) - 3(1-t)^2(2t-2) \cdot 2 \right) dt = \\ &= \int_0^1 (25t^3 - 51t^2 + 31t - 5) dt = \left( \frac{25}{4}t^4 - 17t^3 + \frac{31}{2}t^2 - 5t \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**Задача 3** *Площадь цилиндрической поверхности.* Рассмотрим на плоскости  $OXY$  некоторую спрямляемую кривую  $L = AB$ .

Пусть на этой кривой определена непрерывная и неотрицательная функция  $z = f(M)$  или  $z = f(x, y)$ . Тогда график функции  $z = f(x, y)$  представляет собой некоторую кривую  $L_1 = A_1B_1$ , лежащую на цилиндрической поверхности, для которой кривая  $L = AB$  – направляющая, а образующая перпендикулярна к плоскости  $OXY$ .

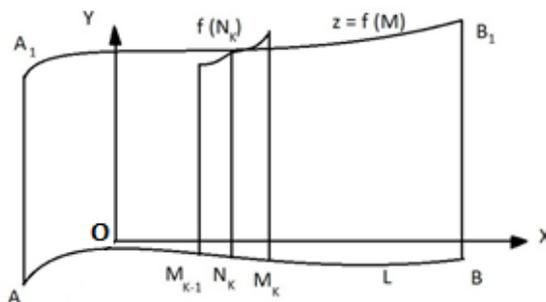


Рис. 10. Поверхность

Найдем площадь цилиндрической поверхности  $AA_1B_1B$ , которая сверху ограничена кривой  $z = f(M)$ , снизу – кривой  $L = AB$  с боков – прямыми  $AA_1$  и  $B_1B$ .

Для этого применим следующий алгоритм:

Разобьем произвольным образом кривую  $L = AB$  при помощи точек  $A = M_0, M_1, \dots, M_{k-1}, M_k, \dots, M_n = B$  на  $n$  частей.

Из каждой точки дробления  $M_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) проведем перпендикуляры к плоскости  $OXY$  высотой  $f(M_k)$ . В результате вся цилиндрическая поверхность разобьется на  $n$  полосок  $\Pi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Каждую полоску  $\Pi_k$  заменим прямоугольником с основанием  $\Delta l_k$ , где  $\Delta l_k$  – длина дуги  $M_{k-1}, M_k$ , и высотой, равной значению функции  $f$  в какой-нибудь точке  $N_k(\xi_k, \eta_k) \in M_{k-1}M_k$ . Тогда площадь  $S_k$  плоскости  $\Pi_k$  приближенно будет равна площади прямоугольника, то есть  $S_k \approx f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta l_k$ . Следовательно, для нахождения площади  $S$  всей цилиндрической поверхности  $AA_1B_1B$  можно использовать следующую формулу:

$$S_k \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta l_k. \quad (17)$$

Ясно, что приближенное равенство (17) будет тем точнее, чем меньше величины  $\Delta l_k$ . Пусть  $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta l_k$ . Тогда точное значение искомой площади

можно получить так:

$$S_k = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta l_k. \quad (18)$$

Из формулы (8) получаем следующее равенство:

$$S = \int_L f(x, y) dl.$$

Таким образом, криволинейный интеграл первого рода  $\int_L f(x, y) dl$  при  $f(x, y) \geq 0$  численно равен площади цилиндрической поверхности  $AA_1B_1B$ .

Площадь  $S$  плоской фигуры, расположенной в плоскости  $Oxy$  и ограниченной замкнутой линией  $L$ , можно найти по формулам:

$$S = \oint_C x dy = - \oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx,$$

при этом кривая  $L$  обходится против часовой стрелки.

Объем тела, образованного вращением замкнутой кривой относительно оси  $Ox$ . Предположим, что область  $R$  расположена в верхней полуплоскости  $y \geq 0$  и ограничена гладкой, кусочно-непрерывной и замкнутой кривой  $C$ , обход которой осуществляется против часовой стрелки. В результате вращения области  $R$  вокруг оси  $Ox$  образуется тело  $\Omega$  (рис). Объем данного тела определяется формулами:

$$V = -\pi \oint_C y^2 dx = -2\pi \oint_C xy dy = -\frac{\pi}{2} \oint_C 2xy dy + y^2 dx$$

**Задача 4** Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$y = x^2, x = y^2, 8xy = 1$  и примыкающей к началу координат.

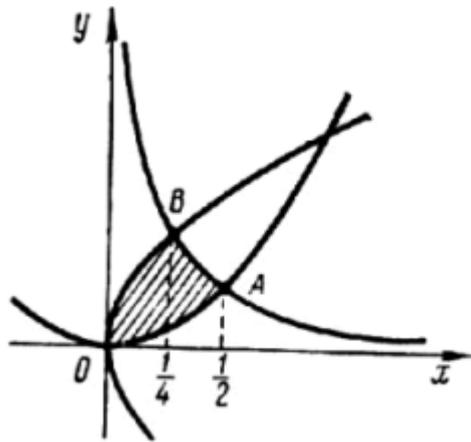


Рис. 11 фигура ограниченная кривыми

Для решения данной задачи построим рисунок (рис. 11). Решая совместно уравнения кривых, найдем точки пересечения  $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right), B\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_{OA} (xdy - ydx) + \frac{1}{2} \int_{AB} (xdy - ydx) + \frac{1}{2} \int_{BO} (xdy - ydx) = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{1/2} x^2 dx - \frac{1}{8} \int_{1/2}^{1/4} \frac{dx}{x} - \frac{1}{4} \int_{1/4}^0 \sqrt{x} dx = \frac{1 + 3 \ln 2}{24} \approx 0,13 \text{ (кв. ед)}
 \end{aligned}$$

**Задача 5** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  области  $R$ , ограниченной кривой  $y = 2 - \sin x$ , и прямыми  $x = 0, x = 2\pi, y = 0$

Объем данного тела можно найти по формуле:

$$V = -\pi \oint_C y^2 dx = -\pi \left[ \int_{OA} y^2 dx + \int_{AB} y^2 dx + \int_{BD} y^2 dx + \int_{DO} y^2 dx \right]$$

Вычислим криволинейные интегралы

$$\int_{OA} y^2 dx = \int_0^{2\pi} 0 dx = 0; \quad \int_{AB} y^2 dx = \int_{2\pi}^{2\pi} y^2 dx = 0$$

$$\int_{BD} y^2 dx = \int_{2\pi}^0 (2 - \sin x)^2 dx = - \int_0^{2\pi} (2 - \sin x)^2 dx =$$

$$= - \int_0^{2\pi} (4 - 4 \sin x \sin^2 x) dx = - \int_0^{2\pi} \left( 4 - 4 \sin x + \frac{1 - \cos(2x)}{2} \right) dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( 4 \sin x - \frac{9}{2} + \frac{\cos(2x)}{2} \right) dx = \left( -4 \cos x - \frac{9}{2}x + \frac{\sin(2x)}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = -9\pi$$

$$\int_{DO} y^2 dx = \int_0^0 0 dx = 0$$

Следовательно, объем тела равен  $V = -\pi(0 + 0 - 9\pi + 0) = 9\pi$ (куб.ед)

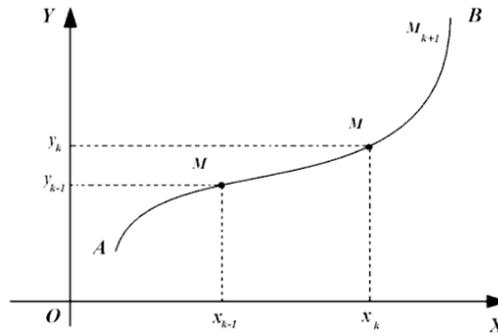
## 2.2. Методические особенности решения задач на физические приложения криволинейных интегралов

Таблица 2. Физические приложения криволинейных интегралов первого рода.

Вычислить	На плоскости $M(x, y)$	В пространстве $M(x, y, z)$
Массу кривой	$m = \int_{AB} \rho(x, y) dl$	$m = \int_{AB} \rho(x, y, z) dl$
Статические моменты	$M_x = \int_{AB} y\rho(x, y) dl$ $M_y = \int_{AB} x\rho(x, y) dl$	$M_x = \int_{AB} y\rho(x, y, z)\sqrt{y^2 + z^2} dl$ $M_y = \int_{AB} y\rho(x, y, z)\sqrt{x^2 + z^2} dl$ $M_z = \int_{AB} y\rho(x, y, z)\sqrt{y^2 + x^2} dl$
Координаты центра масс	$x_0 = \frac{M_x}{m}, y_0 = \frac{M_y}{m}$	$x_0 = \frac{M_x}{m}, y_0 = \frac{M_y}{m}, z_0 = \frac{M_z}{m}$
Моменты инерции	Относительно начала координат	
	$I_0 = \int_{AB} (x^2 + y^2)\rho(x, y) dl$	$I_0 = \int_{AB} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z) dl$
	Относительно оси $Ox$ :	
	$I_x = \int_{AB} y^2\rho(x, y) dl$	$I_x = \int_{AB} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) dl$
	Относительно оси $Oy$ :	
	$I_y = \int_{AB} x^2\rho(x, y) dl$	$I_y = \int_{AB} (x^2 + z^2)\rho(x, y, z) dl$
Моменты инерции первого порядка		$M_{yz} = \int_{AB} x\rho(x, y, z) dl,$ $M_{xz} = \int_{AB} y\rho(x, y, z) dl,$

		$M_{xy} = \int_{AB} z\rho(x, y, z)dl,$
Координаты центра тяжести		$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, y_c = \frac{M_{xz}}{m}, z_c = \frac{M_{xy}}{m}$
Сила притяжения точечной массы материальной кривой	$F = \gamma \cdot m_0 \int_{AB} \frac{\rho}{r^2} dl, \text{ где } \gamma - \text{ постоянная тяготения, } m_0$ – масса точки $M, r =  \vec{r} $	
	$\vec{r}(x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$	$\vec{r}(x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$

**Задача 6** *Масса кривой с переменной линейной плотностью.* Пусть вдоль некоторой спрямляемой кривой  $L = AB$  распределена масса с переменной линейной плотностью  $\rho = \rho(M)$  или  $\rho = \rho(x, y)$ , то есть величина  $\rho$  зависит от координат  $(x, y)$  материальной точки  $M$ .



**Рис. 12** кривая  $L$

Определим массу  $m$  всей кривой  $L = AB$ . Для этого раздробим кривую  $L$  произвольным образом на  $n$  частей (элементарных дуг)  $M_{k-1}M_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Предполагая, что на каждой элементарной дуге  $M_{k-1}M_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) плотность постоянна и равна плотности в какой-нибудь из точек этой дуги (например,  $\rho = \rho(N_k)$ , где  $N_k(\xi_k, \eta_k)$  - фиксированная точка на дуге  $M_{k-1}M_k$ ), массу  $m$  всей кривой  $L = AB$  можно приближенно вычислить по формуле:

$$m \approx \sum_{k=1}^n \rho(N_k) \Delta l_k, \quad (19)$$

где  $\Delta l_k$  – длина элементарной дуги  $M_{k-1}M_k$ .

Формула (19) будет тем точнее, чем мельче будет дробление кривой  $L = AB$ .

Пусть  $\lambda = \max \Delta l_k$ . Тогда за точное значение массы  $m$  всей кривой  $L = AB$  естественно принять предел суммы при  $\lambda \rightarrow 0$ :

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(N_k) \Delta l_k. \quad (20)$$

Из формулы (20) вытекает, что справедливо равенство:

$$m = \int_L \rho(x, y) dl,$$

то есть масса кривой  $L = AB$  с переменной линейной плотностью  $\rho = \rho(N_k)$  численно равна криволинейному интегралу первого рода от плотности  $\rho(x, y)$  по кривой  $L$ .

**Задача 7 Притяжение материальной точки материальной кривой.** Как известно по закону Ньютона, материальная точка  $M$  массы  $m$  притягивает материальная точка  $M_0$  массы  $m_0$  с силой, направленной от  $M_0$  к  $M$  и численно равной  $k \cdot \frac{mm_0}{r^2}$ , где  $r$  – расстояние  $MM_0$ , а  $k$  – коэффициент, зависящий от выбора основных единиц измерения. Для простоты будем считать его равным единице.

Если точка  $M_0$  притягивается системой точек  $M_1, M_2, \dots, M_n$  с массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , то результирующая сила, или равнодействующая, получается геометрическим сложением сил притяжения отдельными точками. В то же время проекции результирующей силы на координатные оси равны алгебраическим суммам проекций отдельных сил (рис. 13).

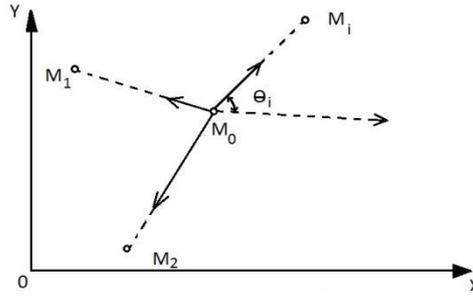


Рис. 13 график притяжения точек

Если обозначить проекции равнодействующей на оси через  $X$  и  $Y$ , а угол, составленный вектором  $\vec{r}_i = \overrightarrow{M_0M_i}$  с осью  $x$ , через  $\theta_i$ , то, очевидно,

$$X = \sum_{i=1}^n \frac{m_0 m_i}{r_i^2} \cos \theta_i, \quad Y = \sum_{i=1}^n \frac{m_0 m_i}{r_i^2} \sin \theta_i,$$

где  $r_i$ , как обычно, означает длину вектора  $\vec{r}_i$ .

Пусть теперь притягивающая масса распределена непрерывным образом по кривой  $L$ . Для нахождения притяжения разобьем кривую на участки и, сосредоточив массу каждого участка в произвольно выбранной на нем точке  $M_i$ , найдем приближенные значения проекций равнодействующей на оси:

$$X = \sum_i \frac{m_0 \rho(M_i) \sigma_i}{r_i^2} \cos \theta_i, \quad Y = \sum_{i=1}^n \frac{m_0 \rho(M_i) \sigma_i}{r_i^2} \sin \theta_i,$$

ибо в этом случае масса отдельного участка приближенно равна  $\rho(M_i) \sigma_i$ . Если устремить все  $\sigma_i$  к нулю, то в пределе получатся точные равенства, причем суммы заменятся интегралами:

$$X = m_0 \int_L \frac{\rho(M) \cos \theta}{r^2} ds, \quad Y = m_0 \int_L \frac{\rho(M) \sin \theta}{r^2} ds; \quad (21)$$

здесь  $r$  означает длину вектора  $\vec{r}_i = \overrightarrow{M_0M_i}$ , а  $\theta$  - угол, составленный им с осью  $x$ .

Найдем, например, притяжение, оказываемое однородной полуокружностью (при  $\rho = 1$ ) на единицу массы, помещенную в ее центре.

Поместим начало координат в центр полуокружности и ось абсцисс проведем через ее концы (Рис.14).

По соображениям симметрии  $X = 0$ , так что дело приводится к нахождению лишь проекции  $Y$ . По формуле (21)  $Y = \int \frac{\sin \theta}{r^2} ds$ . Но в нашем случае  $r = R$  (радиус полуокружности) и  $ds = R d\theta$ .

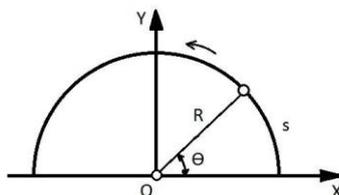


Рис. 14 полуокружность

$$\text{Поэтому } Y = \frac{1}{R} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{2}{R}.$$

Таблица 3. Физические приложения криволинейных интегралов второго рода.

Вычислить	Дано	Формула
Работу переменной силы	Переменная сила $\vec{F}(P(x, y); Q(x, y))$ , криволинейный участок $AB$	$A = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$
Закон Ампера. Магнитное поле	Индукция магнитного поля $\vec{B}$ вдоль замкнутого контура $C$ , направление тока $d\vec{r}$	$\mu_0 I = \oint_C \vec{B} d\vec{r}$ , где $\mu_0$ магнитная проницаемость вакуума $1,26 \times 10^{-6}$
Закон Фарадея. Электродвижущая сила	Индукция магнитного поля $\vec{E}$ вдоль замкнутого контура $C$ , направление тока $d\vec{r}$	$\varepsilon = \oint_C \vec{E} d\vec{r}$

**Задача 8** Найти работу, совершаемую полем  $\vec{F}(xy; x + y)$  при перемещении тела от начала координат  $O(0; 0)$  до точки  $A(1; 1)$  по траектории  $L$ . [14, с. 14]

а)  $L$ - отрезок прямой  $y = x$

б)  $L$ -линия заданная, уравнением  $y = \sqrt{x}$

Приступим к решению первой части задачи. а) Вычислим работу при перемещении вдоль прямой  $y = x$

$$A = \int_{AB} xydx + (x + y)dy = \int_0^1 xxdx + (x + x)dx = \int_0^1 (x^2 + 2x)dx = \\ = \left( \frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

б) Определим теперь работу при перемещении вдоль кривой  $y = \sqrt{x}$

$$A = \int_{AB} xydx + (x + y)dy = \int_0^1 x\sqrt{x}dx + (x + \sqrt{x}) \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \\ = \int_0^1 \left( \sqrt{x^3} + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2} \right) dx = \left( \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{\sqrt{x^3}}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{27}{30}$$

**Задача 9** Вычислить индукцию магнитного поля  $\vec{B}$  в вакууме на расстоянии  $r$  от оси бесконечно длинного проводника с током  $I$ .

Чтобы найти магнитное поле на расстоянии  $r$  от проводника, рассмотрим круговой контур радиуса  $r$ , расположенный перпендикулярно проводнику с током (рис. 15). Поскольку поле  $\vec{B}$  направлено по касательной к круговому контуру

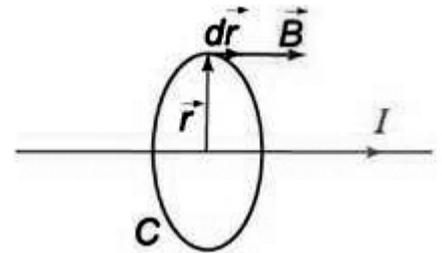


Рис. 15 круговой контур

в любой его точке, то скалярное произведение векторов  $\vec{B}$  и  $d\vec{r}$  есть просто  $B \cdot dr$ . Тогда можно записать:

$$\mu_0 I = \oint_C \vec{B} d\vec{r} = \oint_C B dr = B \oint_C dr = B \cdot 2\pi r.$$

В результате получаем  $\mu_0 I = B \cdot 2\pi r$ ,  $B = \frac{\mu_0}{2\pi r}$

**Задача 10** Оценить значение электродвижущей силы  $\varepsilon$  и электрического поля  $E$ , возникающих в кольце радиусом 1 см у пассажира самолета, при полете самолета в магнитном поле Земли со скоростью  $900 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ . [7, с. 46]

Согласно закону Фарадея  $\varepsilon = \oint_C \vec{E} d\vec{r}$ . С другой стороны при заданных условиях  $\varepsilon = 2rBv$ , где  $v$  – скорость самолета,  $B$  – индукция магнитного поля Земли. Подставляя заданные величины  $v = 900 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 250 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ,  $r = 1 \text{ см} = 0,01 \text{ м}$ ,  $B = 5 \times 10^{-5} \text{ Т}$  находим значение электродвижущей силы:  $\varepsilon = 2rBv = 2 \cdot 0,01 \cdot 250 \cdot 5 \times 10^{-5} = 0,00025 \text{ В}$ . Напряженность возникающего электрического поля найдем по формуле:  $\varepsilon = \oint_C \vec{E} d\vec{r}$ . В силу симметрии, наведенное электрическое поле будет иметь постоянную амплитуду в любой точке кольца. Оно будет направлено по касательной к кольцу в любой его точке. Это позволяет легко вычислить криволинейный интеграл:

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} d\vec{r} = \oint_C E dr \cdot \cos 0 = E \oint_C dr = 2\pi r E$$

Следовательно, напряженность электрического поля равна:

$$E = \frac{\varepsilon}{2\pi r} = \frac{0,00025}{2\pi \cdot 0,01} = 0,004 \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

### 2.3. Примеры решения прикладных задач с применением поверхностных интегралов первого и второго рода

Пусть  $S$  – гладкая материальная поверхность с плотностью  $\gamma = \gamma(x, y, z)$ . В таблице 1 представлены механические характеристики, которые можно найти с помощью поверхностного интеграла I – рода.

Таблица 4. Приложения поверхностного интеграла

Площадь поверхности $S$	$S = \iint_S ds$
-------------------------	------------------

Масса поверхности S	$m = \iint_S \gamma(x, y, z) ds$
Статические моменты поверхности S относительно координатных плоскостей	$M_{xy} = \iint_S z\gamma(x, y, z) ds,$ $M_{xz} = \iint_S y\gamma(x, y, z) ds,$ $M_{yz} = \iint_S x\gamma(x, y, z) ds$
Координаты центра тяжести поверхности S	$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$
Моменты инерции поверхности S относительно координатных плоскостей	$J_{xy} = \iint_S z^2\gamma(x, y, z) ds,$ $J_{xz} = \iint_S y^2\gamma(x, y, z) ds,$ $J_{yz} = \iint_S x^2\gamma(x, y, z) ds$
Моменты инерции поверхности S относительно координатных осей и начала координат	$J_x = \iint_S (y^2 + z^2)\gamma(x, y, z) ds,$ $J_y = \iint_S (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z) ds,$ $J_z = \iint_S (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z) ds,$ $J_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x, y, z) ds$

**Задача 11** Найти координаты центра тяжести части поверхности  $x = \sqrt{4 - z^2}$ , отсеченной плоскостями  $y=0$  и  $y=6$ , если плоскость в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния до плоскости  $Oxy$ . [9, с. 182]

**Решение.** Расстояние от точки до плоскости  $Oxy$  равно аппликате  $z$  точки. Поэтому  $\gamma(x, y, z) = k \cdot z^2$ .

Построим поверхность: на плоскости  $Oxy$  уравнение  $x = \sqrt{4 - z^2}$  задает полуокружность с радиусом 2, в точках которой  $x > 0$ , а в пространстве – поверхность с образующей, параллельной оси  $Oy$  (рис 16).

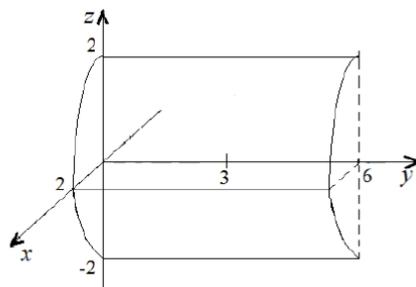


Рис. 16 Поверхность интегрирования

Так как плотность на поверхности распределена симметрично относительно плоскостей  $z=0$  и  $y=3$ , то  $\bar{y}=3$ ,  $\bar{z}=0$ . Найдем  $\bar{x}$  по формуле

$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}$ . Проекция  $D_{yz}$  поверхности на плоскость  $Oyz$  однозначна (рис 17).

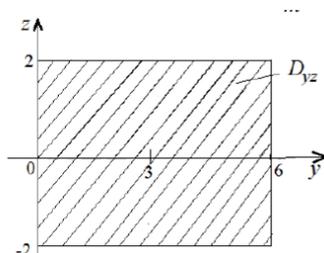


Рис. 17 Проекция

$$ds = \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dydz, \quad x_y' = 0, \quad x_z' = \frac{1}{2\sqrt{4-z^2}}(-2z) = \frac{-z}{\sqrt{4-z^2}}, \quad ds = \sqrt{1 + \frac{z^2}{4-z^2}} dydz$$

$$\begin{aligned} m &= \iint_S \gamma(x, y, z) ds = \iint_{D_{yz}} kz^2 \frac{2}{\sqrt{4-z^2}} dydz = -4 \int_0^6 dy \int_0^2 \frac{(-z^2+4)-4}{\sqrt{4-z^2}} dz = -24 \int_0^2 \left( \sqrt{4-z^2} - \frac{4}{\sqrt{4-z^2}} \right) dz = \\ &= -24 \left( \frac{1}{2} z \sqrt{4-z^2} + 2 \arcsin \frac{z}{2} - 4 \arcsin \frac{z}{2} \right) \Big|_0^2 = -24(-\pi) = 24\pi \end{aligned}$$

$$M_{yz} = \iint_S x\gamma(x, y, z) ds = \iint_{D_{yz}} \sqrt{4-z^2} kz^2 \frac{2}{\sqrt{4-z^2}} dydz = \int_0^6 dy \int_{-2}^2 2kz^2 dz = 64$$

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{64}{24\pi} = \frac{8}{3\pi}.$$

**Задача 12** Найти массу поверхности  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $\sqrt{3} \leq z \leq 2$ , с поверхностной плотностью  $\gamma = \sqrt{2}$ .

Зададим поверхность  $S$  в явном виде:  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  и найдем  $ds$ :

$$dS = \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{4 - x^2 - y^2}} dx dy = \frac{2 dx dy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

Поверхность  $S$  представляет собой часть сферы радиуса 2 с центром в начале координат, вырезанную плоскостью  $z = \sqrt{3}$ . Найдем проекцию этой поверхности на координатную плоскость  $Oxy$ . Линией пересечения сферы и плоскости  $z = \sqrt{3}$  является окружность  $x^2 + y^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$ , то есть  $x^2 + y^2 = 1$ . Следовательно, проекцией  $S$  на плоскость  $Oxy$  является круг единичного радиуса с центром в начале координат.

Вычислим массу поверхности в полярных координатах:

$$\begin{aligned} M &= 2\sqrt{2} \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{4 - \rho^2}} = -\sqrt{2} \cdot 2\pi \int_0^1 (4 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}} d(4 - \rho^2) = \\ &= -2\sqrt{2}\pi \cdot 2\sqrt{4 - \rho^2} \Big|_0^1 = -4\sqrt{2}\pi(\sqrt{3} - 2) = 4\sqrt{2}\pi(2 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

**Задача 13.** Найти массу поверхности  $G: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ y \geq 0 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases}$  с

поверхностной плотностью  $\gamma = 2z^2 + 3$ .

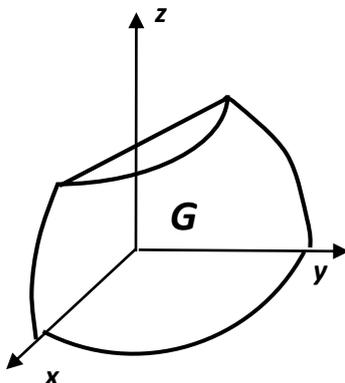


Рис. 18 Поверхность

Решение.

На рассматриваемой поверхности

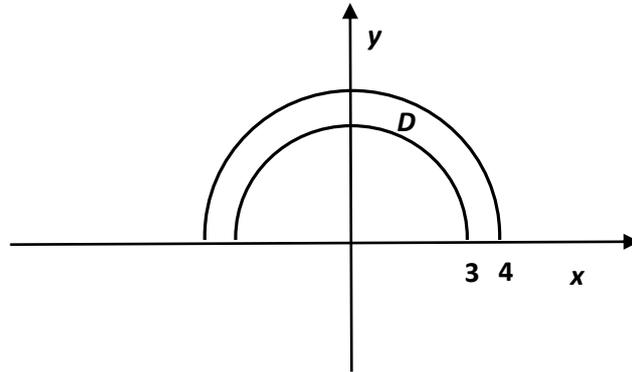
$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}.$$

Тогда

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{16 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{16 - x^2 - y^2}} dx dy = \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

Проекцией  $D$  этой поверхности на координатную плоскость  $Oxy$  является полукольцо с границами в виде дуг concentрических окружностей радиусов 3 и 4.



**Рис. 19** Проекцией  $D$  этой поверхности на координатную плоскость  $Oxy$

Применяя формулу  $M = \iint_S \gamma(x, y, z) dS$  и переходя к полярным

координатам, получим:

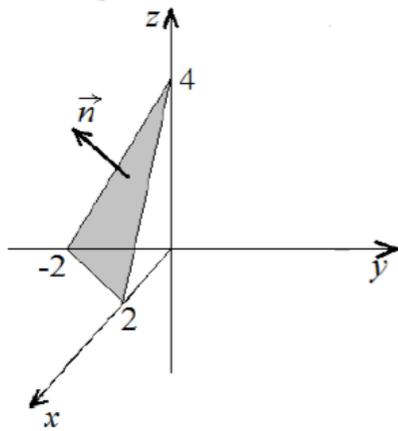
$$\begin{aligned} M &= 4 \iint_D \frac{2(16 - x^2 - y^2) + 3}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} dx dy = 4 \int_0^\pi d\varphi \int_3^4 \frac{2(16 - \rho^2) + 3}{\sqrt{16 - \rho^2}} \rho d\rho = \\ &= 4\pi \left(-\frac{1}{2}\right) \int_7^0 \frac{2t + 3}{\sqrt{t}} dt = 2\pi \int_0^7 \left(2t^{\frac{1}{2}} + 3t^{-\frac{1}{2}}\right) dt = 2\pi \left(\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} + 6t^{\frac{1}{2}}\right) \Big|_0^7 = \\ &= 2\pi \left(\frac{28}{3}\sqrt{7} + 6\sqrt{7}\right) = \frac{92\sqrt{7}}{3}\pi. \end{aligned}$$

**Задача 14** Вычислить поток векторного поля  $\vec{F} = (z; -2x + 2y - z; 0)$  через часть плоскости  $2x - 2y + z - 4 = 0$ , отсеченной координатными плоскостями, в направлении нормали, которая образует с осью  $Oz$  острый угол.

**Решение.** Поток вычисляем как интеграл

$$I = \iint_S z dy dz + (-2x + 2y - z) dx dz + 0 dx dy. \text{ По рисунку 20 видно, что нормаль } \vec{n} \text{ к}$$

заданной стороне части плоскости образует острые углы с осями  $Ox$  и  $Oz$  и тупой угол с осями  $Oy$ .



**Рис. 20** Поверхность интегрирования и нормаль к ней

Поэтому, после приведения интеграла к двойным интегралам, получим:

$$I = \iint_{D_{yz}} z dy dz - \iint_{D_{xz}} (-2x + 2y - z) dx dz.$$

Вычислим два интеграла из правой части равенства:

$$\iint_{D_{yz}} z dy dz = \int_{-2}^0 dy \int_0^{4+2y} z dz = \int_{-2}^0 dy \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^{4+2y} = \int_{-2}^0 \frac{(4+2y)^2}{2} dy = \int_{-2}^0 2(2+y)^2 dy = \frac{2(y+2)^3}{3} \Big|_{-2}^0 = \frac{16}{3}$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xz}} (-2x + 2y - z) dx dz &= \iint_{D_{xz}} (-2x + 2y - (4 - 2x + 2y)) dx dz = \iint_{D_{xz}} (-4) dx dz = -4 \cdot S_{\Delta} = \\ &= -4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = -16 \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } I = \frac{16}{3} - 16 = -10\frac{2}{3}.$$

**Задача 15** Вычислить  $\iiint_S (2\sqrt{y} + 4z) dx dy + (2x + yz) dy dz + (3y + x^2) dx dz$ , где  $S$  –

внешняя сторона поверхности пирамиды, образованной плоскостями

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0. \quad [7, \text{ с. } 132]$$

**Решение.** Используем формулу Остроградского-Гаусса:

$$\iiint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

$$P = 2x + yz, \quad Q = 3y + x^2, \quad R = 2\sqrt{y} + 4z, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 4$$

Перейдем к тройному интегралу по объему пирамиды

$$\iiint_V (2+3+4)dV = 9 \iiint_V dV = 9V = 9 \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = 3 \frac{1}{2} abc = \frac{3abc}{2}.$$

**Задача 16** Вычислить поверхностный интеграл  $\iint_S (x^2 + y^2) ds$ , где  $s$  – часть конической поверхности  $z^2 = x^2 + y^2$ , заключенной между плоскостями  $z=0$  и  $z=1$ . (рис. 21)

Решение. Выразим  $z$  из уравнения поверхности, учитывая, что по условию  $z > 0$ :  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

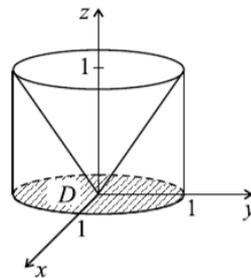


Рис. 21 Поверхность

Проекция конической поверхности на плоскость  $xOy$  представляет собой круг  $x^2 + y^2 \leq 1$  – область  $D$ . Тогда

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2 + y^2) ds &= \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} dxdy = \\ &= \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{\frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}} dxdy = \sqrt{2} \iint_D (x^2 + y^2) dxdy \end{aligned}$$

Переходя к полярным координатам  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  и сводя к повторному интегралу, находим

$$\sqrt{2} \iint_D (x^2 + y^2) dxdy = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

**Вывод.** Во второй главе приведены примеры решения задач с помощью криволинейных и поверхностных интегралов. Для криволинейных интегралов

разобраны задачи для нахождения: длины кривой, площади цилиндрической поверхности, массы кривой и приближения кривой к материальной точке.

Для поверхностных интегралов выделены основные задачи: масса поверхности, площадь поверхности, статические моменты плоскости относительно координатных плоскостей, момент инерции относительно координатных плоскостей, координаты центра тяжести и моменты инерции относительно координатных осей и начала координат. А также описаны способы решения выделенных задач.

## 2.4. Примеры решения практических задач с помощью формул взаимосвязи криволинейных и поверхностных интегралов

В первой главе представлены основные формулы по взаимосвязи интегралов рассмотрим задачи решаемые при помощи применения данных формул на практике.

**Задача 17** Рассмотрим применение формулы Остроградского-Гаусса на примере поверхностного интеграла по замкнутой поверхности вычислить:

$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) dS, \text{ где } \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma -$$

Направляющие косинусы внешней нормали к поверхности, преобразовать в тройной интеграл по объему, ограниченного этой поверхностью.

Для решения воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса. В данном случае  $P = Q = R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , так что

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Тогда по формуле Остроградского-Гаусса получаем:

$$I = \iiint_V \frac{x + y + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz.$$

**Задача 18** Вычислить криволинейный интеграл: где  $L$ - окружность  $x^2 + y^2 = a^2$

Преобразуем этот интеграл по формуле Грина-Остроградского, в двойной, чтобы убедиться что производные под знаком двойного интеграла приведут его к более простому для вычисления выражению. Как можно увидеть, согласно формуле:

$$I = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy$$

Симметрия в области интегрирования и подинтегрального выражения приводят к тому, что при вычислении данного двойного интеграла удобнее перейти к полярной системе координат. Необходимо перейти от переменных  $x, y$  к  $\rho, \varphi$ , связанных между собой равенством:

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$$

Так же необходимо учесть, что при замене переменных в двойном интеграле, надо заменять дифференциалы исходных переменных интегрирования на новые дифференциалы, по формуле:  $dx dy = |J| d\rho d\varphi$ , где  $J$ - якобиан преобразования старых переменных интегрирования в новые. В данном конкретном случае якобиан равен  $J=\rho$ , поэтому двойной интеграл преобразуется к виду:

$$I = \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \rho^2$$

Выражение в правой части можно представить в виде произведения двух интегралов:

$$I = \int_0^a \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Мы видим что первый интеграл равен  $\frac{a^4}{4}$ , а второй  $-2\pi$ . Таким образом окончательный результат:  $I = \frac{\pi a^4}{2}$ . Также необходимо отметить, что круг, по которому брался двойной интеграл, будет слева от идущего по контуру  $L$ , если контур обходят против часовой стрелки. При вычислении того же контура интеграла с обходом его по часовой стрелке, надо сменить знак полученного ответа.

**Задача 19** Вычислить :  $\oint_L x y dx + y^2 dy + z dz$  вдоль линии  $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1, \end{cases}$  ограничивающей поверхность (рис ?)  $S: 2 - z = x^2 + y^2$

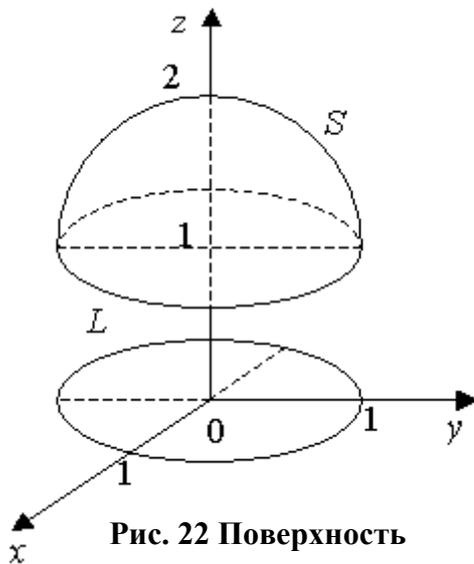


Рис. 22 Поверхность

Для решения воспользуемся формулой Стокса:

$$\oint_L x y dx + y^2 dy + z dz =$$

$$+ (0 - x) dx dy = - \iint_S x dx dy =$$

$$= - \iint_{\tau} x dx dy = (\text{ПЕРЕХОД К ПОЛЯРНЫМ КООРДИНАТАМ}) =$$

$$= - \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \rho^2 d\rho \right) \cos \varphi d\varphi = 0$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Умение интегрировать функции связано не только с вычислением интеграла, но и с умением применять соответствующие знания к решению прикладных задач. Поэтому в данной работе рассмотрены задачи на применение криволинейных и поверхностных интегралов. При этом было важно не столько показать теоретический материал, который можно почерпнуть и из учебника, сколько разобрать основные виды прикладных задач, показать способ их решения, дать графическое сопровождение задачи, что позволяет более точно представить объект исследования и быстро найти необходимый путь решения. При этом графическое сопровождение задачи делает ее не только более обозримой при решении, но и более интересной, ведь достаточно часто оказывается трудным найти решение еще и потому, что нет четкого представления о той фигуре, с которой связано условие задачи.

В процессе выполнения работы была достигнута поставленная цель – компактное изложение основных приемов и способов решения типовых задач с помощью криволинейных и поверхностных интегралов.

Решены сформулированные в начале исследования задачи:

1. В результате анализа литературы по математическому анализу выделен ряд задач с применением криволинейных и поверхностных интегралов и проведен анализ решения данных задач.
2. Приведен обзор теории для решения задач с применением криволинейных и поверхностных интегралов.
3. Подобраны различные типы задач по данной теме, в частности, задачи на применение криволинейного интеграла: вычисление длины кривой, площади цилиндрической поверхности, массы кривой и приближения кривой к материальной точке; и

поверхностного интеграла: вычисление массы поверхности, площади поверхности, статических моментов плоскости относительно координатных плоскостей, момента инерции относительно координатных плоскостей, координат центра тяжести и момента инерции относительно координатных осей и начала координат;

4. Приведены решения задач, которые снабжены методическими рекомендациями к их решению, а также графическим сопровождением каждой задачи, что позволило более четко представить применяемый способ решения.

В работе показано, что интегрирование в математическом анализе – не просто обратная операция по отношению к дифференцированию, а метод, позволяющий получить эффективное решение многих задач. Приведенные в работе задачи расширяют круг задач, решаемых с помощью криволинейных и поверхностных интегралов, повышают интерес к изучаемой теме.

Практическая значимость данной выпускной квалификационной работы заключается в том, что она может быть использована как методический материал. Именно поэтому можно сказать, что работа может быть использована как студентами, так и преподавателями университетов для проведения занятий, написания проверочных работ.

Основными источниками при написании дипломной работы послужили конспекты лекций и монографий по курсу математический анализ, приведенные в списке литературы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа/Берман Г.Н.– М.: Наука, 1969. – 440 стр. с илл.
2. *Бермант А. Ф.* Краткий курс математического анализа для вузов: Учебник для вузов./ Бермант А. Ф., Араманович И. Г.– М.: Наука, 1966. – 736 с.
3. *Бохан К.А.* Курс математического анализа. Т. II./Бохан К.А., Егорова И.А., Лащенко К.В.– М.: издательство «Просвещение», 1966.
4. *Будаев В.Д.* Математический анализ для студентов-физиков. Часть 2. Дифференциальное и интегральное исчисления и их приложения/ Будаев В.Д., Василенков В.Д. – Смоленск: СГПИ, 1997.
5. *Виленкин Н.Я.* Задачник по курсу математического анализа. Ч. II. Под ред. Н.Я. Виленкина. Учебн. пособие для студентов заоч. отд-ний физ-мат. Фак. Пединститутов./Виленкин. Н.Я., Бохан К.А., Марон И.А.-М., «Просвещение», 1971. 336 с. Перед загл. Авт. и др.
6. *Гаврилов В.Р.* Краткие и криволинейные интегралы. Элементы теории поля 2-е изд., стер./ Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003.— 496 с.
7. *Гусак А. А.* Высшая математика, т. 2./ Гусак А. А.– Мн.: ТетраСистемс, 1998.
8. *Данко П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч.: Учеб. пособие для студентов вузов – 5-е изд., испр./ Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. – М.: Высш. шк., 1997. – 416 с.
9. *Демидович, Б.П.* Краткий курс высшей математики: учеб. пособие для вузов/ Демидович, Б.П., Кудрявцев. В.А.- М.: АСТ: Астрель, 2007-654
10. *Зайцев И. А.* Высшая математика. Учеб. для с/х вузов. – 2-е изд., испр. и доп./ Зайцев И. А.–М.: Высш. шк., 1998. – 409 с.
11. *Запорожец Г. И.* Руководство к решению задач по

математическому анализу: Учеб. пособие для студентов вузов – 3-е изд., доп./ Запорожец Г. И.– М.: Высш. шк., 1964. – 480 с.

12. *Ильин В.А.* Основы математического анализа: в 2-х ч. Часть II: Учеб.: Для вузов. – 5-е изд./ Ильин В.А., Поздняк Э.Г. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 464 с. – (Курс высшей математики и математической физики). – ISBN 5-9221-0537-X.

13. *Короткова Н.Н.* Математический анализ (II часть): учеб. пособие/ Короткова, Н.Н., Мустафина, Д.А., Ребро, И.В. / ВПИ (филиал) ВолгГТУ. – Волгоград, 2010. – 91с.

14. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа (в двух томах): Учебник для студентов университетов и вузов./ Кудрявцев Л.Д.-М.: Высшая школа, 1981, т. II: - 584с., ил.

15. *Кузнецов Л.А.* Сборник задач по высшей математике./ Кузнецов Л.А.– М.: Высшая школа, 1983.

16. *Лунгу К. Н.* Сбор- ник задач по высшей математике. 1 курс./ Лунгу К. Н, Письменный Д. Т, Федин С. Н, Шевченко Ю. А.– М.: Рольф, 2001.–576 с.

17. *Мустафина Д.А., Ребро И.В., Кузьмин С.Ю., Антипина С.Г.* Инте- гральное исчисление функции одной переменной: Учеб. пособие / Мустафина Д.А., Ребро И.В., Кузьмин С.Ю., Антипина С.Г. ВолгГ- ТУ. – Волгоград, 2007. – 97 с.

18. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для вузов. В 2-х т. Т. II – М.: Интеграл/ Пискунов Н.С. – Пресс, 2002. – 544 с. ISBN 5-89602-013-9 (т. II). ISBN 5-89602-014-7.

19. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике.2 часть/ Письменный. Д.Т.-М: Рольф, 2001-256

20. *Расулов К.М.* Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисления для функций нескольких переменных: учебное пособие / Расулов К.М.; Смол. гос. ун-т. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2008. – 145 с.

21. *Титаренко В.И.* Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля./ Титаренко В.И., Выск Н.Д.- М.: МАТИ, 2007.
22. *Уваренков И.М.* Курс математического анализа. Учеб. Пособие для физ. – мат. фак. пед. ин-тов. Т. II./ Уваренков И.М., Малер М.З. М., «Просвящение», – 1976. 479 с. с илл.
23. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. Т. II: Учебник. – 7-е изд./ Фихтенгольц Г.М.- М.:ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 440 с. – ISBN 5-9221-0197-8.
24. *Шапкин А.С.* Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию с решениями: Учеб. пособие. – 3-е изд./ Шапкин А.С.–М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К0», 2006.
25. *Шипачев В.С.* Курс высшей математики: Учебник / Под. Ред. Тихонова. – 2-е изд., перераб. и доп./ Шипачев В.С.– М.:ТК Велби, Изд-во Проспект, 2004. – 600 с.