Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра высшей математики

Выпускная квалификационная работа

ИЗУЧЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ СИСТЕМ В ШКОЛЕ И ВУЗЕ

Работу выполнила:
студентка 151 группы
направления подготовки 44.03.05
Педагогическое образование,
профили «Математика и
информатика»
Степанова Дарья Сергеевна

_____
подпись

«Допущена к защите в ГАК»

Зав. кафедрой высшей математики
Е.Л. Черемных

_____ _____
дата подпись

Руководитель:
канд. пед. наук, доцент
кафедры высшей математики
Латышева Любовь Павловна

_____
подпись

Пермь
2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ЧИСЛОВЫХ СИСТЕМ И ИХ СВОЙСТВ 6

1.1. История развития понятия числа 6

1.2. Теоретические сведения о введении основных числовых систем 10

1.3. Важнейшие свойства некоторых числовых систем 18

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ ЧИСЛОВЫХ СИСТЕМ В ШКОЛЕ И ВУЗЕ 27

2.1. Теория числа в курсе алгебры девятилетней школы 28

2.2. Основы методики введения понятия действительного числа 38

2.3. Методические подходы к обучению понятию о множестве действительных чисел 43

2.4. Рекомендации к изучению понятия мощности алгебраических и трансцендентных чисел 45

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 51

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 53

ВВЕДЕНИЕ

Развитие математики является важным фактором, обеспечивающим готовность человека к непрерывному образованию и самообразованию в самых различных областях человеческой деятельности.

В данной работе рассмотрим вопросы методики введения понятия действительного числа и свойства непрерывности действительных чисел. Теория действительных чисел является одним из важнейших узловых вопросов математики. Свойства числовой прямой являются тем фундаментом, на котором строится теория пределов, а вместе с ней все здание современного математического анализа. Чаще всего по обсуждаемой теме в школе и вузе проводят урок-лекцию, позволяющий в короткое время рассмотреть большое количество теоретического материала. Это, в частности, не способствует концентрации внимания учащихся на главных аспектах учебного материала. Этот факт и послужил основанием для выбора следующей темы выпускной квалификационной работы: «Изучение числовых систем в школе и в вузе».

Целью данной работы является разработка методических рекомендаций к изучению свойств числовых систем в школьном курсе математики и в вузе.

Для достижения цели были поставлены следующие **задачи**:

1) изложить сведения из истории возникновения понятия числа;

2) проанализировать учебную и научную литературу по теме исследования;

3) привести важнейшие свойства некоторых числовых систем;

4) рассмотреть теоретические основы введения понятия действительного числа и его основных свойств в средней школе;

5) представить рекомендации к изучению темы «Действительные числа»;

6) систематизировать методические рекомендации введения понятия действительного числа в старшей школе;

7) представить рекомендации к изучению понятия мощности алгебраических и трансцендентных чисел в вузе.

Объектом исследования являются основы методики обучения математике.

Предметом исследования выступают методические рекомендации к изучению числовых множеств и их свойств в школе и вузе.

Методы исследования: анализ имеющейся по данному вопросу литературы, сравнение материала в школьных учебниках разных авторов, сравнение материала в вузовских учебниках разных авторов, обобщение и систематизация полученных знаний о методических рекомендациях по данной теме.

Работа состоит из Введения, двух глав «Теоретические основы изучения числовых систем и их свойств» и «Методические рекомендации к изучению числовых систем в школе и вузе», Заключения и Библиографического списка, содержащего 26 наименований. Работа насчитывает 55 страницы.

В ведении представлены актуальность темы выпускной работы, цели и задачи исследования, краткая характеристика структуры работы и описание ее частей.

В первой главе рассмотрены историческая справка развития понятия числа, теоретические сведения о введении основных числовых систем, важнейшие свойства числовых систем.

Во второй главе предоставлены теоретические основы понятия числа в девятилетней школе, основы методики ведения понятия действительного числа,

методические подходы к обучению понятию действительного числа в старшей школе, рекомендации к изучению понятия мощности алгебраических и трансцендентных чисел.

Материалы исследования были представлены на конференциях:

1. Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах; доклад «О построении множества действительных чисел по Дедекинду» (апрель, 2014) [22].

2. Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах; доклад «Простейшие свойства алгебраических и трансцендентных чисел» (ноябрь, 2013) [23].

3. Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах; доклад «Особенности изучения свойств числовых систем в школе» (апрель, 2016) [24].

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ЧИСЛОВЫХ СИСТЕМ И ИХ СВОЙСТВ

Геометрическим образом всех действительных чисел является числовая прямая, так как между числами из R и точками прямой можно установить взаимно-однозначное соответствие с сохранением упорядоченности. Важнейшее свойство числовой прямой состоит в её непрерывности. Перед тем, как представить методические рекомендации к изучению данного свойства в школе и в вузе, рассмотрим теоретические основы числовых систем и их свойств.

1.1. История развития понятия числа

Уже людям античных обществ потребовалась простейшая ориентировка в жизненных явлениях, например определение емкости употребляемой посуды, тяжести переносимых вещей, длин проходимых путей, периметров и площадей занимаемых земель и др.

В первобытном обществе человек нуждался лишь в нескольких первых (натуральных) числах. Но с развитием цивилизации ему потребовалось изобретать всё большие и большие числа, уметь их записывать. Этот процесс продолжался на протяжении многих столетий и потребовал напряженного интеллектуального труда [4].

С зарождением обмена продуктами труда у людей появилась необходимость сравнить число предметов одного вида с числом предметов другого вида. На этом этапе возникли понятия «больше», «меньше», «столько же» или «равно» [3]. В результате сравнения рассматриваемых величин с их единичными величинами получали натуральные числа, показывающие, сколько

раз единичная величина содержится в рассматриваемой величине, или дробные числа, показывающие, какую долю или сколько долей единичной величины содержит рассматриваемая величина. Так создавалась и совершенствовалась практика измерения конкретных величин, встречающихся в жизни. Всё это служило основой для возникновения начал измерения и практики обращения сначала с натуральными, а уже потом и дробными числами. Значительно позже люди научились вычитать числа, затем умножать и делить их. Даже в средние века деление чисел считалось очень сложным и служило признакам чрезвычайно высокой образованности человека [3].

С открытием действий с числами или операций над ними возникла наука арифметика. Её возникновению и развитию способствовали практические потребности – строительство разнообразных сооружений, торговля, мореходство и пр. Долгое время в арифметике имели дело с числами, относительно небольшими. Ещё в III в. до н. э. люди не знали, что натуральный ряд чисел бесконечен. В своём трактате «Исчисление песчинок» – «Псаммит» Архимед разработал систему, которая позволила выразить сколь угодно большое число, и показал, что натуральный ряд чисел бесконечен [7]. Следует заметить, что первое представление о потенциально бесконечно малом и бесконечно большом дал Анаксагор (около 500 – 428 гг. до н. э.) [3]. Древнегреческий философ Аристотель (384 – 322 гг. до н. э.) в своих высказываниях, допуская бесконечность математического пространства, считал математическую прямую бесконечной. Аналогичных принципов придерживался и Евклид [4].

Математики Древней Греции, занявшись проблемами больших чисел, совершили скачок от конечного к бесконечному. Смелая идея бесконечности, которая шла вразрез с философскими воззрениями о конечности Вселенной,

открыла в математике широкие возможности, хотя и вызвала значительные противоречия, некоторые из них не раскрыты и по сей день [21].

В IV в. до н. э. греческие математики из школы Пифагора открыли несоизмеримые отрезки, длины которых они не могли выразить ни целым, ни дробным числом. Одним из таких отрезков была диагональ квадрата со сторонами, равными единице. Теперь длину такого отрезка мы выражаем через $\sqrt{2}$. Учёные того времени относили к числам только рациональные и не признавали иррациональные числа. Они нашли выход в том, что под числами стали понимать длины отрезков прямых [13].

Потребовалось не одно столетие для того, чтобы математики смогли осмыслить понятие иррационального числа и выработать способ записи такого числа и приближенного значения его в виде бесконечной десятичной дроби [16].

Новые способы построения учения о числе в основных чертах были развиты в первой половине XIX в. Но не все разделы учения о числе удалось построить на фундаменте, отвечающем новым требованиям. К последним относились арифметика натуральных и арифметика действительных чисел. Это было сделано во второй половине XIX в., в связи с развитием теории множеств и математической логики. К таковым можно отнести теории действительных чисел Дедекинда, Больцано, Кантора, Вейерштрасса, Мерэ.

Рихард Юлиус Дедекинд (1831-1916) является автором одной из первых и получившей наибольшее распространение системы строгого научного обоснования теории действительных чисел. В 1872 г. вышла первая работа Р. Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа»[10]. В этом же году Кантор изложил свою теорию в работе «Об обобщении одной теоремы из теории тригонометрических рядов». В этой работе он поставил перед собой

цель обобщить теорему единственности тригонометрического разложения на случай, когда множество особых точек тригонометрического ряда является бесконечным [15].

Развиваясь в дальнейшем, математика пришла к вопросу деления действительного числа на алгебраические и трансцендентные числа.

Впервые алгебраические поля стал рассматривать К. Ф. Гаусс. При обосновании теории биквадратичных вычетов он развил арифметику целых гауссовых чисел, т.е. чисел вида $a + bi$, где a и b – целые числа.

Каждое гауссово число $z = a + bi$ удовлетворяет квадратному уравнению: $(z - a)^2 + b^2 = 0$ [5].

Термин «трансцендентный» стал впервые употреблять Леонард Эйлер в своем большом труде «Ведение в анализ», вышедшем в 1748 г., установил фундаментальное соотношение: $e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z$, получив из последнего $e^{\pi \cdot i} = -1$. Оказалось, что основные числа 1, –1, i, e, π органически взаимосвязаны друг с другом, а e и π трансцендентные числа, возникшие из обобщенных цепных дробей. Швейцарский математик Ламберт И. Г. (1728 – 1777) впервые показал, что π – число иррациональное, опираясь на работы Л. Эйлера, получил разложение $tg\ x$ в бесконечную цепную дробь [9].

Как видно, понятие числа прошло длинный путь развития: сначала возникли целые числа, затем дробные (положительные), отрицательные числа и множество рациональных чисел (положительные и отрицательные) и, наконец, рациональные и множество действительных чисел.

1.2. Теоретические сведения о введении основных числовых систем

Определение действительного числа в школьном курсе математики дается в таком виде: если множество рациональных чисел дополнить множеством иррациональных чисел, то вместе они составляют множество действительных чисел. Данное определение поверхностно и не дает полноценного представления. Поэтому рассмотрим различные определения понятия действительного числа, такие как:

1) Определение на основе понятия сечения в области рациональных чисел (Р. Дедекинд);

2) Определение с помощью понятия фундаментальной последовательности (Г. Кантор);

Понятие действительного числа по Дедекинду.

Прежде чем дать определение действительного числа по Дедекинду, рассмотрим понятие сечения Дедекинда в поле рациональных чисел.

Сечением Дедекинда в поле рациональных чисел называется разбиение всего множества рациональных чисел на два непустых подмножества A и A' так, что каждое рациональное число входит в одно и только одно из этих двух подмножеств – A или A'; каждое число a, вошедшее в первое подмножество, меньше каждого числа a', вошедшего во второе подмножество.

Множество A называется нижним классом сечения, множество A' – верхним классом. Сечение обозначается $A|A'$ или $(A_1; A_2)$.

Из определения сечения следует, что всякое рациональное число, которое меньше числа a нижнего класса, также принадлежит нижнему классу. Аналогично, всякое рациональное число, которое больше числа a' верхнего класса, принадлежит верхнему классу [26].

Возможны три вида сечений Дедекинда:

1. Первый вид, когда в первом подмножестве есть наибольшее число, а во втором нет наименьшего числа;

Доказательство существования такого вида сечения:

Возьмем произвольное число r. Сконструируем сечение во множестве рациональных чисел, разбив его на два подмножества так: первое подмножество A состоит из всех рациональных чисел, не больших r, т.е. меньших или равных r, а второе A' – из всех, больших r. Тогда в A есть наибольшее число, а A' нет наименьшего числа. Докажем это методом от противного. Допустим, что r' есть наименьшее число в подмножестве A' . Среднее арифметическое r и r' является рациональным и заключено между r и r', т.е. $r < \frac{r+r'}{2} < r'$ значит, оно не может быть ни в A, ни в A', по определению сечения. Получили противоречие.

2. Второй вид сечения, когда в первом подмножестве нет наибольшего числа, а во втором есть наименьшее число;

Доказательство аналогично первому.

3. Третий вид сечения, когда в первом подмножестве нет наибольшего числа, а во втором нет наименьшего числа.

Доказательство существования такого вида сечения:

Возьмем произвольное простое число p, отнесем в первое подмножество R_1 все отрицательные рациональные числа, нуль и все те положительные рациональные числа, квадрат которых меньше p. Отнесем ко второму подмножеству R_2 положительные рациональные числа, квадрат которых больше p. Отметим, что рациональных чисел, квадраты которых равны простому числу p, не существует, что доказывается методом от противного.

Допустим, что существует несократимая дробь – рациональное число $\frac{m}{n}$,

где НОД (m, n) = 1, такое, что $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = p$ (1). Следовательно, $\frac{m^2}{n^2} = p$ или $m^2 = p \cdot n^2$ (2). Следовательно, m^2 делится на p, т.е. m делится на p. Поэтому запишем $m : p = m_1$ или $m = m_1 \cdot p$. Подставив в соотношение (2) получаем: $(m_1 \cdot p)^2 = p \cdot n^2$, или $m_1^2 \cdot p^2 = p \cdot n^2$, или $m_1^2 \cdot p = n^2$. Значит, n^2 делится на p или n делится на p. $n : p = n_1$, $n = p \cdot n_1$. Подставим в соотношение (1): $\frac{m}{n} = \frac{p \cdot m_1}{p \cdot n_1} = \frac{m_1}{n_1}$.

Видим, что дробь $\frac{m}{n}$ оказалась сократимой, что противоречит, что m и n взаимно просты, а потому допущение ложное, и тем самым доказано, что нет рационального числа, квадрат которого равен простому числу.

Докажем от противного, что сконструированное так сечение не имеет в первом подмножестве R_1 наибольшего числа.

Допустим, что в первом подмножестве R_1 есть наибольшее положительное число a, тогда отметим, что $a^2 < p$. Сконструируем новое положительное число так: $\frac{a \cdot (a^2 + 2p)}{2 \cdot a^2 + p} = r > 0$.

Покажем, что r находится в первом подмножестве R_1.

$$p - r^2 = p - \left[\frac{a \cdot (a^2 + 2p)}{2 \cdot a^2 + p}\right]^2 = \frac{(p - a^2) \cdot (p^2 + p \cdot a^2 + a^4)}{(2a^2 + p)^2} > 0,$$

Так как $a^2 < p$, следовательно, $r^2 < p$, а потому r находится в первом подмножестве R_1.

Покажем, что $r > a$, для этого рассмотрим разность:

$$r - a = \frac{a \cdot (a^2 + p)}{2a^2 + p} - a = \frac{a \cdot (p - a^2)}{2a^2 + p} > 0,$$

так как $a^2 < p$. Следовательно, $r > a$. Получилось противоречие с тем, что число a наибольшее в первом подмножестве. Значит, первое подмножество не

может иметь наибольшего числа.

Доказательство, что сконструированное сечение Дедекинда не может иметь во втором подмножестве R_2 наименьшего числа аналогично.

В первых двух случаях, сечение производится рациональным числом r (которое является пограничным между классом A и A'), или сечение определяет рациональное число r [2].

Не может существовать четвертого вида сечения, для которого одновременно в первом подмножестве нашлось бы наибольшее число, а во втором подмножестве – наименьшее.

Доказать это можно методом от противного. Предположим, что такое сечение существует. Возьмем тогда, пользуясь плотностью области рациональных чисел, любое рациональное число c, заключающееся между наибольшим числом в первом подмножестве и наименьшим числом во втором подмножестве. Число c не может принадлежать первому подмножеству, так как оно бы являлось наибольшим в этом подмножестве, и по аналогичной причине c не может принадлежать второму подмножеству, а это противоречит определению сечения Дедекинда (каждое рациональное число входит в одно и только в одно из двух подмножеств) [26].

Определение. **Действительным** называется число d, определяемое любым из трех видов сечений Дедекинда в поле рациональных чисел. В случае построения сечений первых двух видов это будет рациональное число. Иррациональным числом называется действительное число, определяемое сечением Дедекинда в поле рациональных чисел только третьего вида [2].

Понятие действительного числа по Кантору.

Для того чтобы дать определение действительного числа по Кантору, нам необходимо сначала вспомнить понятие о фундаментальной

последовательности и ее видах.

Определение. Фундаментальной последовательностью рациональных чисел a_1, a_2, a_3, … a_n, … называется последовательность, обладающая свойством, что для любого произвольно заданного положительного числа ε можно указать номер элемента этой последовательности, начиная с которого все последующие элементы будут попарно отличаться дуг от друга по модулю меньше чем на ε, иначе: существует такое натуральнее число m, что $|a_\lambda - a_\mu| < \varepsilon$, где $\lambda > m$, и $\mu > m$ и где λ и μ – тоже натуральные числа.

Теорема. Существуют фундаментальные последовательности, не имеющие рационального предела.

Доказательство.

Возьмем последовательность: $a_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$.

Исследуем разность общих элементов этой последовательности:

$$a_{n+k} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)} + ... + \frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)\cdot....\cdot(n+k)} \right\}.$$

Чтобы упростить предшествующее, рассмотрим увеличение слагаемых:

$$\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)} < \frac{1}{(n+1)^2}, ..., \frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)\cdot...\cdot(n+k)} < \frac{1}{(n+1)^{k-1}}.$$

Возьмем в фигурных скобках увеличенную сумму из предшествующей строки, получим: $\left\{ 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{(n+1)^{k-1}} \right\} = \frac{1}{n} \left\{ n + 1 - \frac{1}{(n+1)^{k-1}} \right\}$.

После подстановки имеем следующее неравенство:

$$a_{n+k} - a_n < \frac{1}{n(n+1)!} \cdot \left\{ n + 1 - \frac{1}{(n+1)^{k-1}} \right\} < \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Зная, что $a_{n+k} > a_n$, предшествующее на основе транзитивности «меньшее» запишем иначе: $0 < a_{n+k} - a_n < \frac{1}{n \cdot n!}$.

Подберем значения n такие, чтобы $\frac{1}{n \cdot n!} < \varepsilon$, это возможно, так как $\frac{1}{\varepsilon} < n$.

$$0 < a_{n+k} - a_n < \varepsilon .$$

Докажем, что эта фундаментальная последовательность не может иметь рационального предела, методом от противного.

Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{p}{q}$ – рациональное число, где p и q –натуральные взаимно-простые числа.

$$0 < a_{n+k} - a_n < \frac{1}{n \cdot n!} .$$

Прибавляя по a_k каждой из трех частей неравенства, будем иметь:

$$a_n < a_{n+k} < a_n < a_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

$$a_n < \frac{p}{q} < a_{n+k} < a_n < a_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

$$a_n < \frac{p}{q} < a_n + \frac{1}{n \cdot n!} .$$

Так как $n = q$, получаем:

$$a_q < \frac{p}{q} < a_q + \frac{1}{q \cdot q!} .$$

Умножим все части неравенства на $q \cdot q!$

$$a_n \cdot q \cdot q! < p \cdot q! < a_n \cdot q \cdot q! + 1 .$$

Исследуем полученное:

$$a_n \cdot q \cdot q! = \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{q!}\right) \cdot q \cdot q! = 2 \cdot q \cdot q! + \frac{1}{2!} \cdot q \cdot q! + ... + \frac{1}{n!} \cdot q \cdot q! .$$

Это выражение равно натуральному числу, так как все слагаемые натуральные числа [2].

$p \cdot q!$ – натуральное число;

$a_n \cdot q \cdot q!+1$ – натуральное число, на 1 больше, чем $a_n \cdot q \cdot q!$;

Получили противоречие: между двумя натуральными числами, различающимися на единицу, заключено натуральное число. Тем самым доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{p}{q}$ не может быть [15].

Итак, существует два вида фундаментальных последовательностей:

1) имеющие рациональный предел,

2) имеющие не рациональный предел.

Определение. Действительным числом называется всякая фундаментальная последовательность рациональных чисел[2].

Определение алгебраических и трансцендентных чисел.

Множество действительных чисел состоит из множества алгебраических и трансцендентных чисел. Рассмотрим их определение.

Определение. Алгебраическим действительным числом называется всякий корень алгебраического уравнения с целыми рациональными коэффициентами, другими словами корень уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \text{ [2].}$$

Например: а) рациональное число $\frac{3}{5}$ есть число алгебраическое, так как многочлен с целыми коэффициентами $5x - 3$ имеет корень $\frac{3}{5}$, что видно из $5 \cdot \frac{3}{5} - 3 = 0$; б) иррациональное число вида $\sqrt{2}$ есть число алгебраическое, так как многочлен с целыми коэффициентами $x^2 - 2$ имеет корень $\sqrt{2}$, что видно из $(\sqrt{2})^2 - 2 = 2 - 2 = 0$.

Понятие о трансцендентном (неалгебраическом) действительном числе возникает следующим образом.

Определение. Трансцендентным действительным числом называется действительное число, которое не может быть корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами [9].

Рассмотрим теперь некоторые свойства числовых систем.

1.3. Важнейшие свойства некоторых числовых систем

Простейшие свойства алгебраических и трансцендентных чисел.

Рациональные числа – числа алгебраические.

Возьмем произвольное рациональное число $\frac{m}{n}$, где $n \neq 0$. Сконструируем многочлен с целыми коэффициентами: $n \cdot x - m$. Покажем, что $\frac{m}{n}$ есть корень этого многочлена $n \cdot x - m = n \cdot \frac{m}{n} - m = m - m = 0$.

Иррациональные числа, являющиеся корнем из рациональных чисел, – числа алгебраические.

$\sqrt{r}$ есть число алгебраическое, где r – рациональное положительное число, не являющееся n-й степенью.

Доказательство:

Имеем $\sqrt[n]{r} = x$, откуда $r = x^n$; получаем многочлен с целыми коэффициентами $x^n - r$, для которого $\sqrt{r}$ является корнем: $(\sqrt[n]{r})^n - r = r - r = 0$.

1) $\sqrt[n]{r_1 + \sqrt[m]{r_2 + \sqrt[k]{r_3}}} = x$, где r_1, r_2, r_3 – рациональные числа, откуда $\sqrt[m]{r_2 + \sqrt[k]{r_3}} = x^n - r_1$, далее $r_2 + \sqrt[k]{r_3} = (x^n - r_1)^m$ (корни первого уравнения сохранились), $\sqrt[k]{r_3} = (x^n - r_1)^m - r_2$ (корни второго уравнения также сохранились),

$r_3 = [(x^n - r_1)^m - r_2]^k$ (корни третьего уравнения также сохранились),

откуда: $[(x^n - r_1)^m - r_2]^k - r_3 = 0$;

2) $x_1^{m_1} + a_1 x^{m_1 - 1} - a_2 x^{m_1 - 2} + \ldots + a_{m_1 - 1} x + a_{m_1} = 0$, где $m_1 = m \cdot n \cdot k$, где все коэффициенты – целые числа, а радикал $\sqrt[n]{r_1 + \sqrt[m]{r_2 + \sqrt[k]{r_3}}}$ есть один из корней

полученного многочлена, так как от возведения в степень обеих частей уравнения корни остаются [2].

Каждое трансцендентное вещественное число является иррациональным, но обратное неверно.

Например, число $\sqrt{2}$ – иррациональное, но не трансцендентное: оно является корнем многочлена $x^2 - 2$ (и потому является алгебраическим) [4].

Прежде чем говорить о свойстве мощности числовых систем, рассмотрим основные понятия теории множеств.

Понятие «множество» является одним из основных математических понятий и не подлежит точному определению. Ограничимся лишь описанием этого понятия. Множеством называется совокупность вещей, объединенных по какому-нибудь признаку [26].

Множества бывает конечными и бесконечными. Множество называется конечным, если количество его элементов может быть выражено некоторым числом. И множество называется бесконечным, если количество его элементов не выражается никаким числом.

Два множества считаются равными тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов.

Определение: Множество, не содержащее ни одного элемента, называют пустым множеством. Его обозначается знаком $\oslash$.

Определение: Множество N называется подмножеством множества M тогда и только тогда, когда каждый элемент множества N принадлежит множеству M. Отношение между множеством M и любым его подмножеством N называется включением и обозначается символом $\subseteq$: $M \subseteq N$ [14].

Некоторые теоретико-множественные операции над множествами.

Пересечением множеств M и N называют множество тех объектов, которые принадлежат множествам M и N одновременно. Обозначение: $M \cap N$.

Объединением множеств M и N называют множество тех элементов, которые содержатся, по крайней мере, в одном из множеств M или N. Обозначение: $M \cup N$.

Разностью множеств M и N называют множество тех элементов, которые принадлежат множеству M и не принадлежат множеству N. Обозначение: $M \setminus N$ [20].

Одним из наиболее важных теоретико-множественных свойств множеств является мощность.

Нередко возникает проблема: сравнить два непустых множества по количеству элементов. Для конечных множеств это не представляет никакого затруднения: подсчитать количество элементов в них и сравнить два натуральных числа. Таким образом, очевидной является роль натуральных чисел как меры количества элементов в конечных множествах. Для бесконечных множеств этот способ не годится – мы не сможем закончить подсчет всех натуральных чисел. С целыми, рациональными и тем более вещественными числами еще сложнее. Интуитивно ясно, что множество натуральных чисел беднее множества действительных чисел. Однако точно утверждать это без строгих математических критериев нельзя. Рассмотрим два множества, множество натуральных чисел и множество четных натуральных чисел. Сравним их. Очевидно, что множество натуральных чисел включает в себя множество четных натуральных чисел, из этого кажется, что первое больше второго. Но с другой стороны элементы этих множеств можно сопоставить.

$$1 \leftrightarrow 2;\ 2 \leftrightarrow 4;\ 3 \leftrightarrow 6;\ \ldots\ ;\ n \leftrightarrow 2n;\ \ldots\ .$$

Оказывается, эти два множества одинаково богаты элементами.

Определение: Если каждому элементу a множества A по некоторому закону поставлен в соответствие один и только один элемент b множества B, и если при том каждому элементу b множества B окажется поставлен в соответствие один и только один элемент a множества A, то между элементами множества A и B установлено взаимно-однозначное соответствие [11].

Определение: Если между множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие, то эти множества называются эквивалентными или равномощными (имеющими одинаковую мощность), и пишут $A \sim B$.

Отношение эквивалентности обладает свойствами: рефлективности, симметричности и транзитивности. Поэтому всевозможные множества распадаются на непересекающиеся классы эквивалентности. К классам эквивалентности можно приписать специальные символы, которые называют мощностями или кардинальными числами. Мощность можно трактовать как класс эквивалентности.

Определение: Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называют счетным, его мощность обозначается как α.

Из этого определения вытекает необходимое и достаточное условие счетности.

Теорема. Для того чтобы множество A было счетным, необходимо и достаточно, чтобы его элементы можно было занумеровать, потратив на нумерацию все множество натуральных чисел.

Свойства счетных множеств.

1. Счетное множество – минимальное по мощности среди бесконечных множеств.
2. Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно.

3. Сумма счетного множества счетных множеств счетна.

Замечание: каждое бесконечное множество имеет эквивалентное ему собственное подмножество. В этом существенное отличие бесконечных множеств от конечных.

Следствие 1. Сумма конечного числа счетного множества есть счетное множество.

Следствие 2. Сумма счетного числа конечных попарно не пересекающихся множеств есть счетное множество.

Существуют множества, которые богаче элементами, чем счетное, то есть они не могут уместиться ни в какую последовательность. Об этих множествах говорят, что они имеют мощность континуум (c).

Свойства несчетных множеств.

1. Объединение конечного множества с мощностью c имеет мощность c.

2. Множество всех подмножеств счетного множества имеет мощность c.

Замечание: мощность континуума может трактоваться как мощность всех подмножеств счетного множества [12].

Сравнение мощностей.

Рассмотрим два конечных множества A и B. Пусть множество A содержит m элементов, а множество B – n элементов. Числа m и n удовлетворяют одному и только одному из трех соотношений:

$$1) m = n,\ 2)\ m > n,\ 3)\ m < n.$$

Какое из соотношений имеет место, можно установить путем непосредственного пересчитывания элементов множеств A и B.

Заметим теперь, что соотношение $m = n$ выполняется тогда и только тогда, когда между множествами A и B можно установить взаимно-однозначное соответствие, т. е. когда множества A и B эквивалентны. Соотношение $m > n$

выполняется тогда и только тогда, когда между множествами A и B нельзя установить взаимно-однозначное соотношение, но такое соотношение можно установить между множеством B и некоторым подмножеством A_1 множества A. Случай, когда $m < n$ имеет место тогда и только тогда, когда A и B не эквивалентны, но A эквивалентно некоторому B_1, являющемуся подмножеством B [8].

Таким образом, сравнение бесконечных множеств можно производить путем установления взаимно однозначного соответствия между этими множествами и их подмножествами.

Счетность множества алгебраических чисел.

Т е о р е м а . Множество алгебраических чисел есть множество счетное.

Д о к а з а т е л ь с т в о .

Множество всех алгебраических чисел есть множество различных корней всех многочленов с целыми коэффициентами вида

$a_0x^n + a_0x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, где все a_i – целые числа, причём $a_0 > 0$, и многочлен неприводим.

Уравнений указанного вида степени n имеется счетное множество. Это следует из того, что каждое уравнение определяется $(n+1)$ натуральных чисел $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$, а множество таких наборов из $(n+1)$ числа на основании 2-го свойства счетности счетно. Множество всех алгебраических уравнений является суммой счетного числа алгебраических уравнений различных степеней n, где n пробегает натуральный ряд и, следовательно, на основании свойства счетности 3 есть счетное множество.

Так как каждое уравнение имеет конечное число корней, то множество всех корней рассматриваемых уравнений, а значит и всех алгебраических чисел является суммой счетного числа конечных множеств, которые могут попарно

пересекаться (корни различных уравнений могут быть одинаковыми). Это множество на основании второго следствия не может иметь мощность больше счетной, но так как данное множество является бесконечным, и его мощность не может быть меньше счетной.

Так доказана объективная возможность установления взаимно-однозначного соответствия между множеством действительных корней многочленов с целыми коэффициентами и множеством натуральных чисел, тем самым теорема доказана [2].

Несчетность множества действительных чисел.

Существуют множества, которые «богаче» элементами, чем счетное, т.е. они не могут уместиться ни в какую последовательность.

Теорема. Множество действительных чисел отрезка [0, 1] несчетно.

Докажем эту теорему методом от противного. Предположим, что множество действительных чисел отрезка [0,1] счетное, т.е. все действительные числа отрезка [0,1] можно расположить в последовательность (x_n), где $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Противоречие будет достигнуто тем, что мы покажем наличие $x \in [0,1]$, которого в последовательности нет.

Представим отрезок [0, 1] в виде суммы трех отрезков $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, и выберем из них ту часть, которой не принадлежит точка x_1. Ясно, что хотя бы одна такая часть из трех найдется. Обозначим ее Δ_1. Данный сегмент вновь разделим на три части и повторим выбор. Имеем точку x_2. Обозначим через Δ_2 ту часть, которая не содержит x_2. Продолжим этот процесс неограниченное количество раз и выберем точку x_i. Возникла бесконечная последовательность $\{\Delta_i\}$ вложенных друг в друга сегментов, которая обладает свойством, что

сегмент Δ_i не содержит точку x_i при любом i. Так как длина сегмента Δ_i есть $\frac{1}{3^i}$ и стремится к нулю по мере возрастания i, то получается последовательность стягивающихся сегментов. По теореме Кантора (принцип вложенных отрезков) следует, что существует точка x, принадлежащая всем сегментам $\{\Delta_i\}$, очевидно, что $x \neq x_1$, $x \neq x_2$, … , $x \neq x_i$ по построению.

Но с другой стороны, она принадлежит каждому отрезку [0,1]. Тем самым мы получим противоречие.

Итак, множество всех точек отрезка [0,1] является представителем некоторого класса эквивалентности несчетных множеств. Об этих множествах говорят, что они имеют мощность континуум.

Теорема. Всякий сегмент, интервал и полусегмент являются множествами мощности континуум.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что любой сегмент $[a,b]$ эквивалентен сегменту [0,1], так как удаление из сегмента одной или нескольких точек не изменяет его мощности.

Пусть дан некоторый сегмент $[a,b]$. Докажем, что множество его точек эквивалентно множеству точек сегмента [0,1].

Пусть точка $y \in [a,b]$, а точка $x \in [1,0]$. Установим закон соотношения между $y \leftrightarrow x$.

Действительно, соотношение $y = a + (b-a)x$ ставит в соответствие каждой точке сегмента [0,1] одну и только одну точку сегмента $[a,b]$, и, наоборот, каждой точке сегмента $[a,b]$ обратное соотношение $x = \frac{y-a}{b-a}$ ставит в соответствие одну и только одну точку сегмента [0,1].

Теорема. Множество действительных чисел имеет мощность континуум.

Доказательство. Установим взаимно однозначное соответствие между элементами *y* множества всех действительных чисел и элементами *x* множества чисел (0,1). Это соответствие устанавливается следующим законом: $y = tg((2x-1)\frac{\pi}{2})$.

По принятому закону каждому числу *x* интервала (0,1) будет соответствовать одно и только одно действительное число *y* и, наоборот, каждому действительному числу *y* по формуле: $(2x-1)\frac{\pi}{2} = arctg(y)$ будет соответствовать, если рассматривать только главное значение арктангенса, одно и только одно значение *x* из интервала (0,1). Тем самым установлена эквивалентность множества действительных чисел и множеством действительных чисел интервала (0,1), т.е. доказано, что множество всех действительных чисел обладает мощностью *c* [12].

Т е о р е м а . Существует бесконечное множество действительных трансцендентных чисел.

Д о к а з а т е л ь с т в о .

Выше доказано, что множество действительных чисел – множество несчетное.

Также установлено, что множество алгебраических чисел – множество счетное.

Значит, существуют среди действительных чисел какие-то другие неалгебраические числа, причем этих неалгебраических чисел множество несчетное, так как, допустив, что их счетное множество, получаем, что объединение алгебраических и неалгебраических чисел дает в результате счетное множество, а это объединение есть множество действительных чисел, которое есть множество несчётное. Следовательно, допущение, что

множество счетное, приводит к противоречию. Поэтому множество действительных неалгебраических (трансцендентных) чисел есть множество несчетное.

Вводится понятие мощности множества, как характеристики того общего, что есть у всех множеств, эквивалентных данному. Для конечных множеств мощностью является натуральные числа. Для бесконечных множеств наименьшей мощностью из всех бесконечных множеств обладает счетное множество. Мощность множества всех действительных чисел называют континуум (от латинского слова continuum – «непрерывное») [26]. Хотя трансцендентных чисел, как доказано, есть несчетное множество, однако ни одного трансцендентного числа математики до 1873 г. не могли указать [12].

Понятие действительного числа прошло большой путь развития. Потребовалось много лет, чтобы доказать существование действительных чисел и исследовать их важнейшее свойство – непрерывность. Многие великие ученые, такие как Кантор и Дедекинд, долгие годы посвятили изучению этих чисел. Их теории действительных чисел оказалась весьма плодотворными для развития математического анализа и математики в целом.

Выводы первой главы

В данной главе проанализированы основные теоретические сведения, связанные с понятием действительного числа, позволяющие при составлении методических рекомендаций по данному вопросу лучше ориентироваться в материале. Приведены различные определения понятия действительного числа. Рассмотрено понятие о мощности числовых множеств и основные способы доказательства того, что множества действительных, алгебраических и трансцендентных чисел имеют ту или иную мощность.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ ЧИСЛОВЫХ СИСТЕМ В ШКОЛЕ И ВУЗЕ

Уже в самом начале своей сознательной жизни ребенок знакомится с натуральными числами, которые затем в начальной школе окончательно формируются и закрепляются словесно и письменно. Далее, на протяжении всего курса изучения математики в школе, происходит постепенное расширение изначально введенного множества натуральных чисел до множества действительных чисел. Рассмотрим этот процесс более подробно, выделив его основные цели и особенности.

2.1. Теория числа в курсе алгебры девятилетней школы

Как известно, строгая научная теория действительного числа появилась во второй половине XIX в. Вейерштрасс представляет действительное число в виде бесконечной десятичной дроби. Дедекинд определяет действительное число через построение сечения на множестве. Кантор вводит действительные числа через построение фундаментальных последовательностей рациональных чисел.

Возникает вопрос: как же в теории появляются новые числа? Новые числа возникают как расширение некоторого множества чисел. При этом возможны два пути.

Первый путь: вводится новое множество B. Затем некоторое его подмножество отождествляется с множеством A (устанавливается изоморфизм). Эта возможность отражена в учебнике А. П. Киселева. При ее реализации у школьников может сформироваться впечатление, что множества

отрицательных и положительных чисел – не связанные друг с другом числовые множества.

Второй путь: A дополняется новыми числами – $\overline{A}$, получаем расширенное множество: $B = A \cup \overline{A}$. В учебнике Н.Я. Виленкина Q^+(положительные рациональные числа и 0) дополняется Q^-: $Q = Q^+ \cup Q^-$.

Для расширения числовых множеств имеют большое значение следующие идеи.

Во-первых, в основе новых определений лежит принцип перманентности. Он предполагает невозможность сохранять все свойства. Принцип сводится к следующим требованиям:

1. Множество A есть подмножество множества B ($A \subseteq B$).

2. Все операции и отношения элементов из A определены также и для элементов множества B, причем их смысл для элементов из A, рассматриваемых уже как элементы расширенного множества B, должен совпадать с тем, какой они имели во множестве A до расширения.

3. Во множестве B выполнима операция, которая невыполнима или не всегда выполнима во множестве A. (В этом условии заключена основная цель расширения множества A.)

4. Расширение B должно быть минимальным среди всех расширений множества A, удовлетворяющих условиям 1 – 3, т. е. таким, чтобы не существовало никакое подмножество B, содержащее A и удовлетворяющее тем же условиям. (Исходи именно из условия 4, отражающего логическую завершенность схемы расширения, множество натуральных чисел расширяется до целых, а не сразу до рациональных или действительных чисел) [14].

Во-вторых, операторное истолкование числа. Действия над числами можно интерпретировать, при этом один из компонентов будет играть

пассивную роль, а другой – активную. Сложение можно понимать как изменение на величину, описываемую вторым слагаемым, а умножение – как многократное сложение или нахождение части от числа.

В-третьих, наличие синтаксического и семантического аспектов числа. Синтаксический аспект числа выражается в форме записи и учитывает вероятную неоднозначность записи чисел, например: в десятичной и двоичной системах, в римской нумерации – для натуральных чисел.

Перед изучением линии числа ставятся конкретные цели:

- понимание числа как основного объекта математики, истории развития числа;
- демонстрация идеи расширения числовых множеств, свойств числовых множеств;
- иллюстрация идеи алгебраических структур, R – бесконечное упорядоченное, без начального и конечного элементов, всюду плотно, замкнуто относительно +, –, ·, :, определен предел любой сходящейся последовательности действительных чисел (R непрерывно);
- знакомство с системами счисления, теорией делимости;
- воспитание вычислительной культуры (алгоритмы вычислений, приближенные вычисления, использование средств вычислительной техники).

Рассмотрим теперь методические особенности расширения числовых множеств в курсе алгебры девятилетней школы.

Первое расширение понятия о числе, которое учащиеся усваивают после знакомства с натуральными числами, – это добавление нуля. Сначала 0 – знак для обозначения отсутствия числа. Почему же нельзя делить на нуль?

Разделить – значит найти x: $x \cdot 0 = a$. Рассматриваются два случая: 1) $a = 0$, следовательно, надо найти x: $x \cdot 0 \neq 0$ Это невозможно. 2) $a = 0$, следовательно,

надо найти x: $x \cdot 0 = 0$. Таких x сколько угодно, что противоречит требованию однозначности каждой арифметической операции.

Для чего нужны определения $a \cdot 1 = a$, $a \cdot 0 = 0$? Для того, чтобы сохранить переместительный закон умножения и монотонности умножения.

Изучение нового числового множества идет по единой схеме:

- необходимость новых чисел;
- введение новых чисел;
- сравнение (геометрическая интерпретация);
- действия над числами;
- законы.

Сначала расширение числового множества происходит, пока множество не станет числовым полем. Не каждая из числовых систем является числовым полем. Например, система натуральных чисел не является числовым полем; система целых чисел тоже – не числовое поле. Система рациональных чисел – числовое поле [25].

Поле – множество, содержащее не менее двух элементов, на котором заданы две бинарные алгебраические операции – умножение и сложение, обе ассоциативные и коммутативные. Они связаны законом дистрибутивности. Кроме того, в поле существует нулевой элемент: для любого a выполняется $a + 0 = a$ и всякий элемент, отличный от нуля, имеет обратный: $– a + a = 0$. Для каждого элемента a, отличного от нуля, существует обратный элемент a^{-1}: $a \cdot a^{-1} = 1$[18]. В системе рациональных чисел действия сложения, вычитания, умножения и деления (за исключением деления на нуль) выполнимы и однозначны относительно каждой пары чисел, т.е. определены так, что применение любого действия к паре рациональных чисел приводит к однозначно определенному рациональному числу. Этим же свойством

обладает система действительных чисел.

Невыполнимость одного из действий приводит к расширению числового множества. В курсе математики 5 – 6 классов имеет место построение множества рациональных чисел. Следует отметить, что последовательность построения неоднозначна. Возможны варианты:

1. $N \cup \{0\}$ → Обыкновенные дроби → Десятичные дроби → Рациональные числа (введение отрицательных чисел).

2. $N \cup \{0\}$ → Десятичные дроби → Обыкновенные дроби → Рациональные числа (введение отрицательных чисел).

3. $N \cup \{0\}$ → Десятичные дроби → Отрицательные числа → Обыкновенные дроби → Рациональные числа (целые и дробные, положительные и отрицательные числа).

4. $N \cup \{0\}$ → Целые числа → Десятичные дроби (положительные) → Обыкновенные дроби (положительные) → Рациональные числа (введение отрицательных чисел).

Возможен и такой вариант (П. М. Эрдниев «Математика 5 – 6»):

$N \cup \{0\}$ → Дробные (обыкновенные и десятичные) → Рациональные числа (введение отрицательных чисел).

Элементарное понятие о дробном числе дается уже в начальной школе как о нескольких долях единиц [25].

В основной школе дроби обычно вводятся методом целесообразных задач, придуманным С.И. Шохор-Троцким, например при рассмотрении следующей задачи: «1 килограмм сахарного песка стоит 15 рублей. Сколько стоят 4 кг песка? 5 кг? $\frac{2}{3}$ кг?». Тем самым задается проблемная ситуация, ученики могут умножить 15 на 4, на 5, найти $\frac{2}{3}$ от 15 ученики уже затрудняются. Ученики

могут разделить на 3 и умножить на 2. Поскольку одну и ту же задачу разумно решать одинаковым арифметическим действием, то они приходят к выводу, что эти два последовательных действия равнозначны умножению 15 на $\frac{2}{3}$.

Рекомендуется располагать различные случаи умножения на правильную дробь в порядке возрастания трудности: умножение на целое число; умножение целого числа на смешанное число; умножение дроби на смешанное число; умножение на правильную дробь; умножение на дробь, в которой числитель равен знаменателю.

При изучении десятичных дробей до обыкновенных они могут быть введены при рассмотрении десятичной системы нумерации целых положительных чисел (первая разрядная единица после запятой – десятые доли единицы, следующая – сотые и т.д.). Следует иметь в виду, что все арифметические действия над десятичными дробями выполняются проще, чем над обыкновенными, да и их практическое применение шире.

Изучение обыкновенных дробей до десятичных также имеет свои достоинства. Десятичные дроби – частный случай обыкновенных, правила действия с ними являются следствиями правил действий над обыкновенными дробями. В отдельных случаях выполнение действий второй ступени над обыкновенными дробями проще. Основное свойство дроби объяснимо только на основе общего понятия о дроби. Если десятичные дроби рассматриваются до обыкновенных, то всю теорию дробей надо строить заново, так как нельзя из частного случая делать выводы для общего.

Целесообразность введения отрицательных чисел может быть показана учащимся разными способами:

1. Через анализ ситуации, в которой действие вычитания невыполнимо.

Пример: «Чебурашка, спасаясь от Шапокляк, проплыл вверх по реке *a*

км, но, оказавшись перед бродом, был вынужден плыть вниз по реке, и проплыл b км. Где он оказался по отношению к исходному месту входа в реку?»

Ответом служит разность $a - b$, но при $a < b$ действие невозможно.

2. В связи с рассмотрением величин, которые имеют противоположный смысл (А.П. Киселев).

3. Как характеристика изменений (увеличений и уменьшений) величин.

4. На основе графических представлений, отрицательные числа как отметки точек на оси (В.Л. Гончаров).

5. Через задачу об изменении уровня воды в реке в течение двух суток (Д.К. Фадеев, И.С. Соминский).

6. Как средство изображения расстояний на температурной шкале (А.Н. Барсуков).

Появление нового числового множества сопровождается введением правил сравнения (равенства и неравенства) чисел и арифметических операций над ними. Средством обоснования правил сравнения нередко служит координатная прямая.

Получив числовое поле, дальнейшее расширение уже не может быть продиктовано невыполнением действий. Расширение понятия числа было вызвано геометрическими соображениями, а именно: отсутствием взаимно однозначного соответствия между множеством рациональных чисел и множеством точек числовой прямой. Для геометрии необходимо, чтобы каждая точка числовой прямой имела абсциссу, т.е. чтобы каждому отрезку при данной единице измерения соответствовало число, которое можно было бы принять за его длину. Эта цель достигается после того, как поле рациональных чисел (с помощью присоединения к нему системы иррациональных чисел) подвергается расширению до системы действительных чисел, которая является числовым

полем.

К необходимости этого расширения приводит и невозможность извлечения корня из положительного числа, нахождение логарифма положительного числа при положительном основании.

В девятилетней школе стараются избежать вопросов, связанных с непрерывностью и бесконечностью, хотя полностью достичь этого нельзя. Не затрагивается вопрос о недостаточности рациональных чисел для решения алгебраических задач, для измерения (каждый отрезок имеет длину, каждая фигура – площадь), построения графиков (функции должны быть разрывными). Интуитивно учащиеся понимают, что не существует несоизмеримых отрезков. Не надо строить строгую теорию, достаточно создать верные представления о сущности вопроса.

Если ввести иррациональные числа как неизвлекаемые корни (А.П. Киселев), то у учащихся сформируется представление об иррациональных числах только как о неизвлекаемых корнях, поэтому целесообразно указать школьникам на несоизмеримость отрезков. В качестве примера можно взять стороны равнобедренного треугольника с углом при вершине 36^0. Проведем биссектрису угла при основании данного треугольника, которая отсечет от данного треугольника подобные ему (углы $36^0,72^0,72^0$). Дальнейшее последовательное проведение биссектрис угла при основании вновь получаемых равнобедренных треугольников, которое можно продолжать до бесконечности, показывает несоизмеримость основания и боковой стороны исходного треугольника.

Периодичность бесконечной десятичной дроби, выражающей рациональное число, вытекает из деления натуральных чисел, так как при таком делении может получиться только конечное число различных остатков, не

превосходящих делителя. Следовательно, при бесконечном делении какой-то остаток должен повториться, а за ним повторятся и соответствующие остатки числа частного – получится периодическая дробь.

В большинстве учебников иррациональное число рассматривается как бесконечная непериодическая десятичная дробь (как и в теории Вейерштрасса). В некоторых учебниках – как длина отрезка, несоизмеримого с единицей масштаба, а затем показывается, как находятся приближения этого числа в виде десятичных дробей.

Далее необходимо установить, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством точек на числовой прямой и множеством действительных чисел. Поскольку иррациональные числа вводятся для измерения отрезков, несоизмеримых с единицей длины, то сразу получается, что для каждого отрезка можно найти действительное число, выражающее его отношение к единице длины. Обратное положение есть аксиома непрерывности прямой. В большинстве учебников не формулируется, а подчеркивается это взаимно однозначное соответствие. В некоторых учебниках (Д.К. Фадеев и др.) используется подход Кантора: для всякой стягивающейся последовательности вложенных друг в друга промежутков на прямой существует точка, принадлежащая всем промежуткам последовательности. Отсюда и следует непрерывность множества действительных чисел.

Можно не доказывать непрерывность множества R, но необходимо выяснить различие в структуре множеств рациональных и действительных чисел. Множество рациональных чисел плотно (между любыми двумя рациональными числами существует сколько угодно рациональных чисел), но не непрерывно.

Из всех теорий иррациональных чисел более доступной считалась теория

Кантора – Мере, рассматривающая стягивающиеся последовательности вложенных друг в друга сегментов. Поэтому во многих учебниках результат действий над иррациональными числами представляется как число, заключенное между всеми приближенными результатами, взятыми по избытку, и всеми приближенными значениями, взятыми по недостатку. Такое определение не формирует у учащихся представления о результате действий над иррациональными числами и вообще об иррациональном числе. Многие учащиеся считают результат действий над иррациональными числами неточными, приближенными и, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$ нельзя сложить. Причина и в неудачной терминологии: «точный» корень, «неточный» корень. Лучше использовать термины «приближенное значение корня» и «точное значение корня».

Действия с иррациональными числами следует начинать с геометрического изображения суммы $\sqrt{2}+\sqrt{5}$. Известно, что можно точно построить отрезки, имеющие такую длину.

Следует зафиксировать внимание учащихся на том, что в результате действий над иррациональными числами могут получаться как рациональные, так и иррациональные.

Дальнейшего расширения числовой системы потребовала алгебраическая задача извлечения четной степени (квадратного корня) из отрицательного числа. Поле действительных чисел расширено до системы комплексных чисел присоединением к нему множества мнимых чисел [25].

Перейдем теперь к методике введения понятия «действительное число».

2.2. Основы методики введения понятия действительного числа

С множеством действительных чисел и с таким его свойством, как «непрерывность множества действительных чисел», в основной школе учащиеся впервые знакомятся в восьмом классе. Для ознакомления с ним, на наш взгляд, отводится недостаточно учебного времени – всего один академический час. Чтобы компенсировать потери, связанные из-за названного недостатка с возможными трудностями усвоения данного теоретического материала, считаем важным использование нетривиальных подходов к проведению урока с привлечением разнообразных средств информационных и компьютерных технологий.

Введение понятия действительного числа в школьном курсе математике представлено, как обобщение и систематизация знаний о рациональных и иррациональных числах, поэтому основной акцент на соответствующем уроке предпочтительнее сделать на введении свойства непрерывности множества действительных чисел. Поясним основные этапы реализации этого предпочтения с помощью описания основных этапов урока по теме, отвечающей рассмотрению упомянутого свойства.

Выделим триединую цель урока.

Цели урока:

Образовательные: расширение и систематизация знаний учащихся о числах; изучение множества действительных чисел.

Развивающие: развитие умения приобретать новые знания; пополнение лексического запаса новыми терминами; развитие логического мышления и интереса к предмету.

Воспитательные: воспитание навыков четкой, последовательной и

аккуратной деятельности; выработка желания и потребности обобщать полученные факты и знания; развитие самостоятельности и любознательности.

Структура урока:

1. Организационный этап (1 минута): взаимные приветствия учителя и учащихся, фиксация отсутствующих, проверка подготовленности учащихся к уроку;

2. Этап проверки знаний и умений (10 минут): проверка качества усвоения материала, оценка знаний, умений и навыков;

На этапе проверки ранее изученного материала на экран можно вывести следующее задание.

Дан ряд чисел:

$4{,}8;\ -\sqrt{5};\ \sqrt{8};\ 0;\ \sqrt{\frac{3}{8}};\ 5{,}37;\ \sqrt{0{,}5};\ -\frac{28}{7};\ -14;\ \sqrt{25};\ \frac{12}{17};\ \pi.$

Назовите те из чисел, которые можно представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби. Как называются такие числа?

На предыдущем уроке учащимся было предложено домашнее задание (по желанию): приготовить небольшую историческую справку о рациональных и иррациональных числах. Историческая справка может содержать, например, такой текст:

«Термин «рациональное» (число) происходит от латиноамериканского слова *rstio* – отношение, которое является переводом греческого слова «логос». В отличие от рациональных чисел, числа, выражающие отношение несоизмеримых величин, были названы еще в древности иррациональными, т.е. нерациональными (по-гречески «алогос»). Правда, первоначальные термины «рациональный» и «иррациональный» относились не к числам, а к соизмеримым и соответственно несоизмеримым величинам, которые пифагорейцы называли выразимыми и невыразимыми».

Этим мы покажем, что данные понятия противоположные, и перейдем к тому, что объединение множества рациональных чисел с множеством иррациональных чисел есть множество действительных чисел.

Далее можно показать отношение этих множеств на кругах Эйлера.

3. Этап мотивации учебной деятельности (10 мин.). Создание проблемной ситуации.

На данном этапе учитель может вызвать интерес у учащихся, предложив им задание: если каждый из вас напишет любое действительное число, представленное в виде десятичной дроби, с пятью знаками после запятой, то можно меньше, чем за полминуты, найти то число, которого в вашем списке не будет.

Предоставить возможность каждому ученику написать такое действительное число и показать то число, которого в их списке нет. А это всегда можно сделать, так как, если на первом месте в первой десятичной дроби первая цифра отлична от единицы, то в числе, которое пишем, ставим единицу, а если эта цифра единица, то – любую из оставшихся девяти цифр. Со второй дробью проделываем то же самое только для второй цифры и т. д. Таким образом, мы найдем число, которого в списке нет [6].

5. Этап изложения нового материала (10 минуты): представление нового материала, осознание, систематизация и обобщение материала учащимися.

Свойство непрерывности в основной школе не дается, а представляется как пропедевтика, на наглядном образе, т.е. констатируется факт эквивалентности множества точек прямой и множества действительных чисел.

«Каждое действительное число можно изобразить точкой на координатной прямой. Верно и обратное: каждая точка координатной прямой имеет действительную координату. Математики обычно говорят так: между

множеством R действительных чисел и множеством точек координатной прямой установлено взаимно-однозначное соответствие» [17, с. 53].

Чтобы заинтересовать учащихся, на экран можно вывести анимацию, на которой представлена прямая и падающие на эту прямую лучи солнца. Тем самым можно создать следующий образ: если представить, что рациональные точки не пропускают, а иррациональные – пропускают солнечные лучи, и поставить числовую прямую (соответствующую множеству действительных чисел) на пути лучей, то покажется, что солнце пробивается почти сплошь.

5. Этап усвоения знаний (7 минут): решение простых задач на применение свойств действительных чисел, повторение изученных на уроке понятий, развитие умений и навыков;

На данном этапе можно предложить учащимся решить задачу: «Дан равнобедренный треугольник с углом при вершине 36 градусов. Докажите, что биссектриса угла при основании данного треугольник делит его на два новых равнобедренных треугольника».

После этого предлагается показать, что в полученном равнобедренном треугольнике можно вновь провести биссектрису, которая также поделит полученный треугольник на два новых равнобедренных треугольника. Далее учащиеся могут сами заметить, что дальнейшее последовательное проведение биссектрис угла, при основании вновь получаемых равнобедренных треугольников, будет продолжаться до бесконечности.

Тем самым показываем учащимся, как часто при решении задач встречается несоизмеримость отрезков. Именно такие задачи привели к расширению числовых множеств до действительных чисел.

6. Этап подведения итогов (1 минута): подведение итогов работы в виде резюме о том, как работал класс, кто из учащихся особенно старался, что нового

узнали школьники, какова самооценка и оценка работы класса и отдельных учащихся, аргументация выставленных отметок, замечания по уроку.

7. Этап информирования учащихся о домашнем задании (1 минута): информация о домашнем задании, инструктаж по его выполнению, проверка того, как учащиеся поняли содержание работы и способы ее выполнения.

В качестве домашнего задания учащимся предлагается на выбор три вида заданий:

1. Выполнить задания из задачника;

2. Решить задачу на несоизмеримость отрезков (например, одну из трех основных задач древности, предложенных учителем);

Например: «Можно ли с помощью циркуля и линейки построить квадрат, площадь которого равна площади круга (квадратура круга)? Аргументируйте свой ответ».

Если обозначить радиус r заданного круга, x – длину стороны искомого квадрата, то, в современном понимании, задача сводится к решению уравнения: $x^2 = \pi r^2$ откуда получаем: $x = r\sqrt{\pi}$. Понятно, что с помощью циркуля и линейки точно построить такую величину невозможно.

3. Придумать самим (или найти интересную) задачу на несоизмеримость отрезков.

2.3. Методические подходы к обучению понятию о множестве действительных чисел

Изучение курса алгебры и начал математического анализа в 10-м классе начинается с темы: «Числовые множества и понятие действительного числа». Изучение данной темы в классах с углубленным изучением математики лучше вести в логике учебника. В остальных случаях можно использовать схему изложения данного вопроса, приведенную ниже. Данная тема явно избыточна, часть вопросов можно опустить, либо рассмотреть обзорно (сообщения учащихся, краткий рассказ учителя), либо рекомендовать для самостоятельного изучения с последующим представлением докладов или рефератов. Разговор предваряется беседой учителя, в которой раскрывается процесс расширения понятия числа от натуральных до гиперкомплексных чисел на практике и в математике, как науке. Важно подчеркнуть, что «историческая» и «научная» последовательности появления новых числовых множеств различны. Следует показать, что в каждом числовом множестве задаются действия с определенными свойствами, раскрываются причины введения новых числовых множеств, возникающие при этом приобретения и потери. Демонстрация «одинаковости» устройства числовых множеств создает основу для разговора об алгебраических структурах в конце изучения темы.

В качестве дополнительного материала здесь могут быть использованы сообщения учащихся о трех знаменитых задачах древности (об удвоении куба, трисекции угла, квадратуре круга) [25].

Далее рассматривается вопрос о представлении натуральных, целых, рациональных чисел конечными или бесконечными периодическими десятичными дробями, формулируется правило представления периодических дробей обыкновенными:

«Пусть $x = 0{,}2(18) = 0{,}2181818\ldots$. Так как в записи этого числа, до периода содержится только один десятичный знак, то, умножая на 10, получаем: $10x = 2{,}181818\ldots$. Период этой дроби состоит из двух цифр. Поэтому умножая обе части последнего равенства на $10^2 = 100$, находим: $1000x = 218{,}181818\ldots$.вычитая из второго равенства первое, получаем: $990x = 216$. Отсюда $x = \frac{216}{990} = \frac{12}{55}$» [1, с. 5].

После этого можно ввести определение действительного числа как бесконечной десятичной дроби: «Действительным числом называется бесконечная десятичная дробь, т.е. дробь вида: $+a_0, a_1a_2a_3\ldots$ или $-a_0, a_1a_2a_3\ldots$, где a_0 – целое неотрицательное число, а каждая из букв $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – это одна из десяти цифр» [1, с. 7].

Также рассматривается вопрос о приближении по недостатку и по избытку, формируется правило сравнения действительных чисел.

Введение действий на множестве действительных чисел целесообразно показать на конкретном примере для сложения, поставив задачу определения четырех знаков суммы чисел $x = 1{,}23001\ldots$ и $y = 0{,}78044\ldots$. Рассматривается последовательность десятичных приближений x и y, и ученики видят, что при $x_5 = 1{,}23001$, $y_5 = 0{,}78044$, $x_5' = 1{,}23002$, $y_5' = 0{,}78045$ получаем, $2{,}01045 \le x + y \le 2{,}01047$ – необходимые десятичные знаки найдены. Далее делается вывод, что существует единственное действительное число, являющееся суммой двух данных (две последовательности приближений сходятся к единственному числу). Затем делается вывод, что другие действия вводятся аналогично.

В качестве примера учитель может познакомить школьников с построением числовых систем и с алгебраическими структурами на примерах числовых множеств (группами, кольцами, полями) [25].

2.4. Рекомендации к изучению понятия мощности алгебраических и трансцендентных чисел

Основными формами обучения в вузе остаются лекция и самостоятельная работа студентов. Данная тема (мощность алгебраических и трансцендентных чисел) проводится обычно в форме лекции. Чтобы пробудить у большой аудитории интерес, заставить студентов самостоятельно работать и мыслить, лучше всего прочитать проблемную лекцию. Задать проблемную ситуацию можно с помощью кругов Эйлера, предложив студентам разбить множество действительных чисел на рациональные и иррациональные, алгебраические и трансцендентные числа.

Легко увидеть, что каждое рациональное число является алгебраическим. Например, $\frac{5}{7}$ удовлетворяет уравнению следующего вида $7x - 5 = 0$. То есть любое рациональное число $\frac{a}{b}$ удовлетворяет уравнению $bx - a = 0$ и поэтому является алгебраическим. Из этого следует, что если каждое рациональное число является алгебраическим, то каждое не алгебраическое число не рационально. Таким образом, каждое трансцендентное число иррационально. Но иррациональные числа, являющиеся корнем из рационального чисел, числа алгебраические. Например, $\sqrt{2}$ является корнем уравнения $x^2 - 2 = 0$. То есть какая-то часть иррациональных чисел входит во множество алгебраических чисел.

После этого можно спросить студентов, какое множество богаче элементами. На первый взгляд студентам может показаться, что множество алгебраических чисел богаче элементами, так как оно включает в себя все множество рациональных чисел и часть иррациональных чисел. Но на самом

деле это не так. Множество алгебраических чисел счетно. А трансцендентных чисел несчетное множество, которыми могут быть и иррациональные числа, которых также континуум.

На основании изученных свойств счетности доказываем, что множество алгебраических чисел счетно. Также доказать, что множество алгебраических чисел есть множество счетное, можно используя метод, приведенный в п.1.3. Этот способ доказательства можно предложить студентам на самостоятельное изучение.

Доказать, что множество трансцендентных чисел несчетно, можно не прибегая к громоздким вычислениям. Множество трансцендентных чисел несчетно, так как алгебраические и трансцендентные числа дают в объединении множество действительных чисел, а множество действительных чисел, как доказано, есть множество несчетное (имеющее мощность континуум). А удаление из бесконечного множества конечного или счетного множества (каким является множество алгебраических чисел) не меняет мощности множества.

Все это становится более наглядным благодаря следующему представлению (рис. 1).

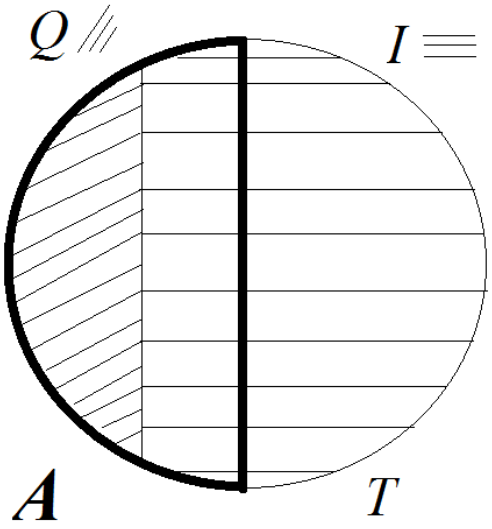

Рис. 1. Структура множества действительных чисел $\boldsymbol{R}$

Весь круг – множество действительных чисел *R*; делим его на две части (неравные): рациональные и иррациональные числа (первое множество заштриховано линиями наискосок; второе заштриховано линиями, параллельными линии горизонта). И обозначаем эти множества пояснениями, как они заштрихованы: /// – *Q* (множество рациональных чисел); ≡ – *I* (множество иррациональных чисел). Далее делим круг еще на две части (опять неравные): одна из них полностью включает в себя рациональные числа и часть иррациональных – это множество *A* (множество алгебраических чисел); вторая часть – это *T (*множество трансцендентных чисел; оно включает в себя только оставшееся от первоначально отмеченного множества иррациональных чисел, не вошедшее в *A*). Этот рисунок отражает в себе те особенности, о которых шла речь ранее. Обозначив мощности этих множеств $\overline{\overline{R}}, \overline{\overline{Q}}, \overline{\overline{\mathrm{A}}}, \overline{\overline{\mathrm{I}}}, \overline{\overline{\mathrm{T}}}$ и учитывая доказанное, что $\overline{\overline{R}} = c; \overline{\overline{\mathrm{Q}}} = \alpha; \overline{\overline{\mathrm{A}}} = \alpha$, получим $\overline{\overline{I}} = c; \overline{\overline{\mathrm{T}}} = c$ (добавление к бесконечному множеству и удаление из него счетного множества не меняет его мощности). А из рис. 1 становится понятным, почему так происходит для конкретного множества *R.* В его состав входит множество *T (*с мощностью $\overline{\overline{\mathrm{T}}} = c$), что и определяет следующие мощности: $\overline{\overline{I}} = c$, $\overline{\overline{R}} = c$.

Для того чтобы закрепить данный материал, можно рассмотреть следующие задачи.

Задача 1.

Существует ли функция вида $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n}$, ($a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – целые числа) обладающая следующими свойствами: для любого рационального числа *r*, найдется целое *k* такое, что $f(k) = r$ [19].

Такой функции не существует, так как всякая функция $f(x)$, представимая в виде частного от деления двух многочленов, имеет конечный или бесконечный предел при x, стремящемся к плюс бесконечности.

Если функция имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\rho$, то существует такое натуральное число n, что для всех $k > n$ имеет место неравенство:

$$\rho-1< f(k)<\rho+1.$$

Но тогда тем рациональным числам, которые лежат вне интервала $]\rho-1,\rho+1[$, может соответствовать лишь конечное число номеров k.

Следовательно, не все рациональные числа получатся в виде значения $f(x)$.

Для функции, имеющей бесконечный предел, рассуждения аналогичные.

Задача 2.

Пусть на плоскости (рис. 2) изображены буквы T, причем никакие две буквы не имеют общих точек (размеры букв могут быть произвольными).

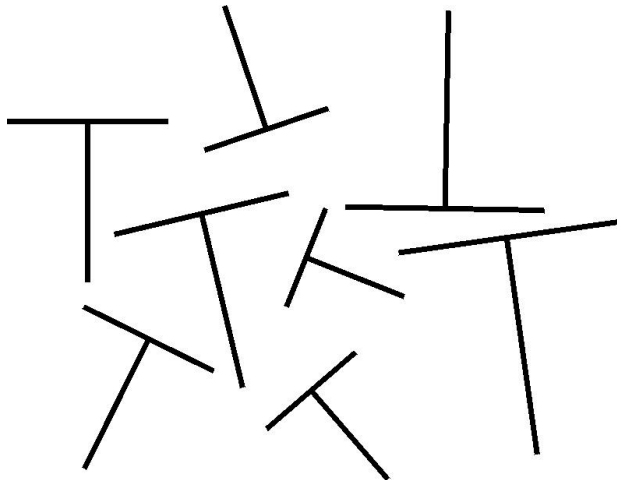

Рис. 2. Множество, состоящее из букв T

Покажем, что это множество букв или счетно, или конечно. Для этого выберем на плоскости систему координат и поставим в соответствие каждой букве T треугольник, имеющий вершины с рациональными координатами и

такой, что одна сторона треугольника пересекает «ножку» буквы *Т*, а две другие – «боковые ветви» этой буквы (рис. 3). Геометрически очевидно, что если две буквы *Т* соответствуют одному и тому же треугольнику, то они должны пересекаться (рис. 4). Поскольку по условию наши буквы попарно не имеют общих точек, то разным буквам соответствуют разные треугольники.

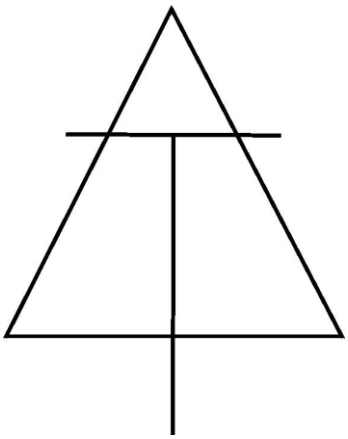

Рис. 3. Сопоставление множества букв *Т* множеству треугольников

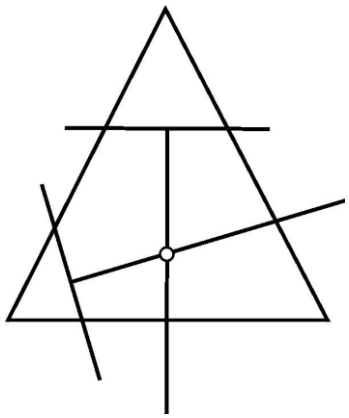

Рис. 4. Соответствие двух букв *Т* одному треугольнику

Поэтому нам осталось показать, что множество выбранных треугольников счетно или конечно. А для этого заметим, что каждый треугольник задается своими тремя вершинами *A, B, C*, а каждая вершина – своими координатами. Так как мы условились выбирать лишь вершины, обе координаты которых рациональны, то каждый треугольник задается шестью рациональными числами – координатами его вершин. А множество шестерок рациональных чисел счетно. Поэтому множество треугольников с «рациональными» вершинами счетно, а тогда множество треугольников, которые мы построили для наших букв, или счетно, или конечно. Значит, или счетно, или конечно и множество самих букв.

Задача 3.

Можно ли установить взаимно однозначное соответствие между множеством точек на прямой и множеством точек на отрезке [6, с. 81]?

Ответ – можно; а как лучше всего это сделать, видно из рис. 5.

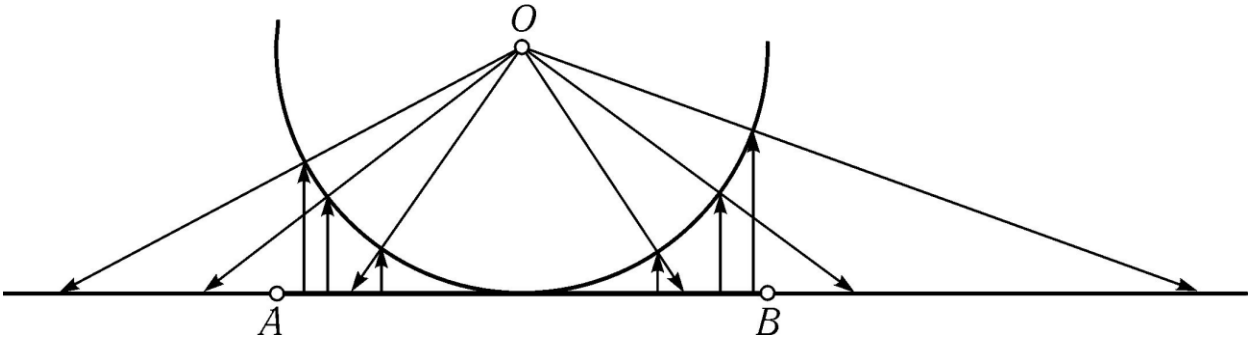

Рис. 5. Взаимно однозначное соответствие между множеством точек на прямой и множеством точек на отрезке

Сначала точки промежутка отображают на полуокружность, а потом проектируют полуокружность на прямую. Ясно, что при этом каждой точке промежутка соответствует одна и только одна точка прямой, причем ни одна точка на прямой не пропущена.

Выводы второй главы

Таким образом, в данной главе рассмотрены различные подходы к формированию представлений о числовых системах в школьном курсе математики. Приведены основные типы задач, связанных с введением рациональных и иррациональных чисел. Представлены основы введения понятия действительного числа и разобраны некоторые задачи при изучении данной темы в школе. Также в главе рассмотрены рекомендации к изучению мощности алгебраических и трансцендентных чисел в вузе. Приведены основные типы задач на закрепление понятия о мощности. Задачи снабжены рисунками, что позволяет быстро найти необходимый путь решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория множеств является основой для многих разделов математики, оказывает существенное влияние на современное понимание предмета математики.

В данной работе были представлены история развития понятия действительного числа и основные понятия теории множеств. Одним из понятий теории множеств, которое играет большую роль при перенесении представления о «количестве» элементов множества с конечных множеств на бесконечные, является понятие взаимно однозначного соответствия. Это необходимо, поскольку при изучении теории множеств мы постоянно имеем дело с бесконечными множествами.

Важно было показать не только теоретический материал, но и разработать рекомендации по изучению данной темы, показать примеры задач, способы их решения.

В процессе выполнения работы была достигнута поставленная цель – разработка методических рекомендаций к изучению свойств числовых систем в школьном курсе математики и вузе.

Решены сформулированные в начале исследования задачи:

1. Изложены сведения из истории возникновения понятия числа.

2.Проанализирована учебная и научная литература по теме исследования.

3. Приведены важнейшие свойства некоторых числовых систем.

4. Рассмотрены теоретические основы введения понятия действительного числа и его основных свойств в средней школе.

5. Представлены рекомендации к изучению темы «Действительные

числа».

6. Систематизированы методические рекомендации введения понятия действительного числа в старшей школе.

7. Представлены рекомендации к изучению понятия мощности алгебраических и трансцендентных чисел в вузе.

Приведенные в работе сведения можно рассматривать при изучении соответствующей темы в школьном курсе математики и при изучении данного раздела в вузе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алимов Ш.А. Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений: базовый уровень / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. – 18-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 464 с.

2. Андронов И. К. Математика действительных и комплексных чисел / И.К. Андронов. – М.: Просвещение, 1975. – 158с.

3. Болгарский Н. Очерки по истории математики / Н. Болгарский. – М.: Высшая школа, 1979. – 368с.

4. Бурбаки Н. Очерки истории математики / Н. Бурбаки [Электронный ресурс]. – Электрон. дан.– Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view&book_id=112134&page_id=264 (дата обращения 18 03.2015).

5. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Г. Вилейтнер [Электронный ресурс].– Электрон. дан.– Режим доступа: http://www.alleng.ru/d/math/math192.htm (дата обращения 20. 02.2015).

6. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах / Н. Я. Виленкин. – М.: МЦНМО, 2005. – 150 с.

7. Выгодский М.Я. Арифметика и алгебра в Древнем Мире / М.Я. Выгодский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1967. – 368 с.

8. Геке Э. Лекции по теории алгебраических чисел / Э. Геке. – М. – Л., издательство технико-теоретической литературы, 1940. – 261с.

9. Гельфонд А. О. Трансцендентные и алгебраические числа / А.О. Гельфонд. – М.: Гостехиздат, 1952. – 224с.

10. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии / Ф. Клейн. – М. – Л.: ГОНТИ, 1937. – 432с.

11. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел: Учеб. пособие для педагогических институтов / Л.Я. Куликов. – М.: Высшая школа, 1979. – 559 с.

12. Марков И.П. Дополнительные главы математического анализа / И.П. Марков. – Т.1, М.: Просвещение, 1968. – 319с.

13. Матвиевская Г.П. К истории учения о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке / Г.П. Матвиевская. – М.: Фан, 1966. – 471с.

14. Математический форум Math help planet – Электрон. дан.– Режим доступа: http://mathhelpplanet.com (дата обращения 12. 03. 2016).

15. Медведев Ф.А. О канторовской теории действительных чисел / Ф.А. Медведев. – Историко-математические исследования, вып.23, М., 1978. – 359 с.

16. Молодший В.Н. Основы учения о числе в XVIII и в первой половине XIX века / В.Н. Молодший. – М.: Просвещение, 1952. – 180с.

17. Мордкович А.Г. Алгебра. 8 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович. – 12-е изд. – Ч. 1. – М.: Мнемозина, 2010. – 215 с.

18. Нечаев В.И. Числовые системы. Пособие для студентов пединститутов / В. И. Нечаев. – М.: Просвещение, 1975. – 199 с.

19. Очан Ю.С. Сборник задач по теории функции действительного переменного / Ю.С. Очан. – М.: Просвещение, 1985. – 288с.

20. Погребной В.Д. Теория функций действительного переменного: конспект лекций / В.Д. Погребной. – Сумы: 2012. – 239с.

21. Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т.1, М.: 1960. – 187с.

22. Степанова, Д.С. О построении множества действительных чисел по Дедекинду [Текст] / Д.С. Степанова (Науч. рук. Латышева Л.П.) // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. межрегион. науч.-практ. конф. студентов матем. фак-тов / редкол.: Ю.В. Корзнякова, И.В. Косолапова; под общ. ред. Ю.В. Корзняковой; Перм. гос. гуманит.-пед ун-т. – Пермь, 2014. – Вып. 7. С. 15-16.

23. Степанова, Д.С. Простейшие свойства алгебраических и трансцендентных чисел [Текст] / Д.С. Степанова (Науч. рук. Латышева Л.П.) // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. межрегион. науч.-практ. конф. студентов матем. фак-тов / редкол.: Ю.В. Корзнякова, И.В. Косолапова; под общ. ред. Ю.В. Корзняковой; Перм. гос. гуманит.-пед ун-т. – Пермь, 2014. – Вып. 7. С. 16-17.

24. Степанова, Д.С. Особенности изучения свойств числовых систем в школе [Текст] / Д.С. Степанова (Науч. рук. Латышева Л.П.) // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. межрегион. науч.-практ. конф. студентов матем. фак-тов / редкол.: Ю.В. Корзнякова, И.В. Косолапова; под общ. ред. Ю.В. Корзняковой; Перм. гос. гуманит.-пед ун-т. – Пермь, 2016. – Вып. 9. С. 51-52.

25. Стефанова Н.Л. Методика и технологии обучения математики. Курс лекций: пособие для вузов / Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова. – М.: Дрофа, 2008. – 415с.

26. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – 8-е изд. – Т. I. – М.: Физматлит, 2001. – 680с.